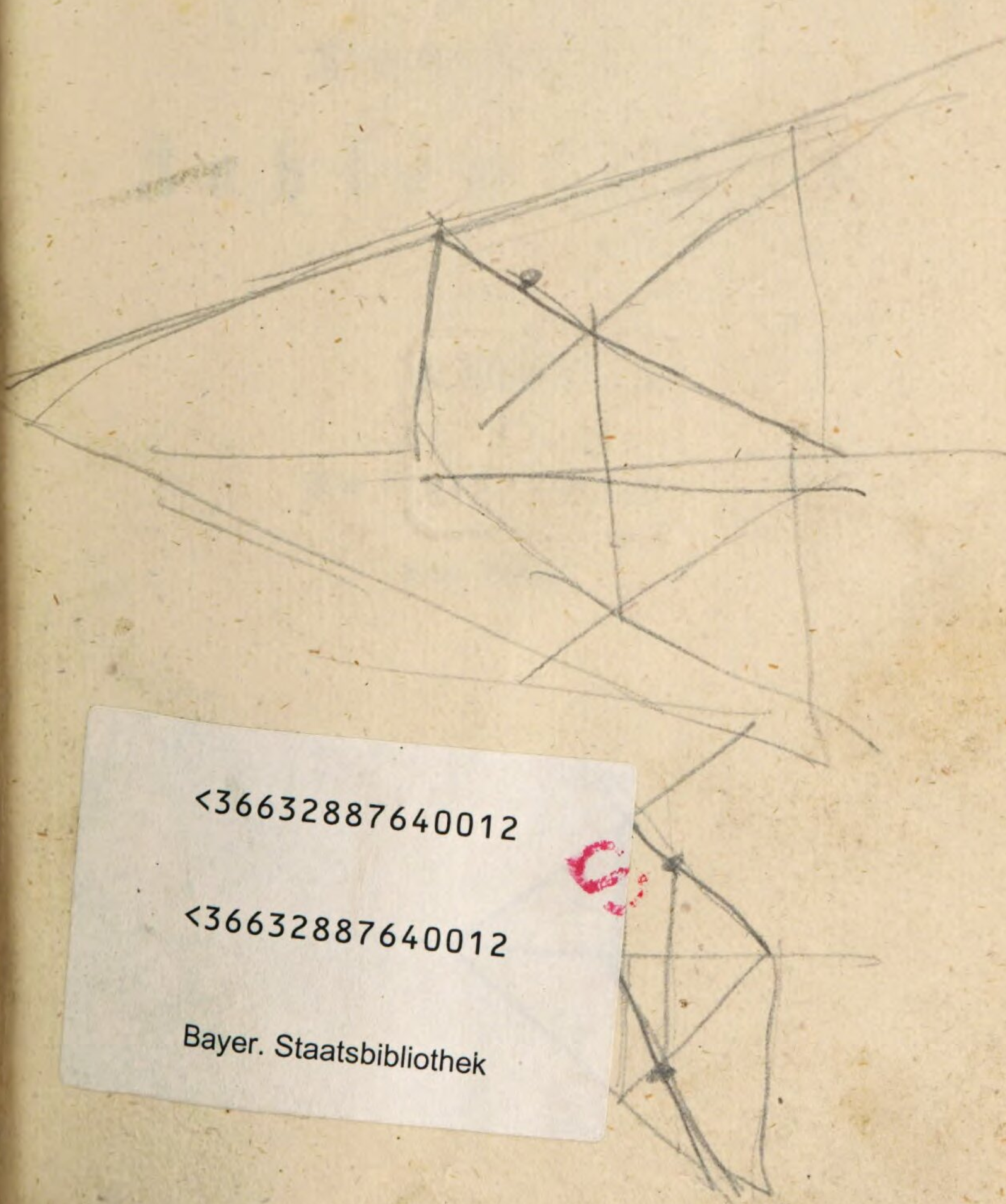


Theoretisch-praktische

Zahlenlehre.

Von

F. Wolff.

Zweiter Theil.

Dritte Auflage.

Die

algebraische Analysis

und die

Differential- und Integral-Rechnung

im

ersten Lehrgange.

Von

F. Wolff.

Dritte verbesserte Auflage.

Berlin, 1856.

Verlag von Georg Reimer.

Vorwort.

Ursprünglich bildete dieses Buch den zweiten Theil meiner theoretisch-praktischen Zahlenlehre, und bereits im Jahre 1847 war es in zweiter Auflage vergriffen. Seine große Mangelhaftigkeit verbot einen ungeänderten Abdruck, Geschäftsdrang eine durchgreifende Ueberarbeitung. Verschiedene Umstände ließen den Gedanken auftauchen, ein ausführliches Werk über algebraische Analysis, Differential- und Integral-Rechnung zu liefern, welches die dem Techniker nothwendigen Gegenstände ausreichend und außerdem durch vielseitige kritische und sonstige Erörterungen eine Belehrung gewähren sollte, die von Jedem gewünscht, aber nicht überall gefunden wird. Früher durch andere Arbeiten im Uebermaaß beansprucht blieb die Ausführung verschoben, und jetzt, dem Ruhestande überwiesen, entbehre ich der Mittel, welche mir dazu nöthig wären. Inzwischen wollte ich, vielfachen Mahnungen gegenüber, jenen Band der Zahlenlehre nicht gänzlich untergehen lassen, und so entstand dieses Buch unter sich widerstrebenden Gedanken und Verhältnissen, nicht als ein Product des Interesses und der Freudigkeit, sondern des guten Willens den die Umstände niederschlagen.

Ueber die durchgreifenden Aenderungen und den Inhalt möge das Buch selbst Auskunft geben.

Ein reiches Material über technische Mechanik und andere Gegenstände, die Frucht zwanzigjähriger Arbeit und übergroßer Anstrengung liegt vor mir, ohne daß ich es, wegen Ungunst äußerer Lage, zum Druck fördern kann. Ich lege es zurück, und es wird völlig ungenutzt verloren gehen.

So ist denn dieses Buch das letzte, dem ich einige Arbeit zugewendet habe. Ich scheide mit ihm von der studirenden Jugend.

Schleusingen, den 18. Novbr. 1855.

Wolff.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Algebraische Analysis.

Zweiter Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Verbesserungen.

Seite 16, Zeile 6 steht $\leqq$ soll heißen $\geqq$

Dem Paragraph 43 beliebe man hinzuzufügen:

Es ist

$$(-1)_n + (-2)_n + (-3)_n + \ldots + (-a)_n = -(-a)_{n+1}$$

welches folgt, wenn man oben $a = 0$ und $q = a$ setzt.

Erster Abschnitt.

Algebraische Analysis.

Erstes Kapitel.

Von den Kettenbrüchen.

§. 1.

Jeder Ausdruck von der Form

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{f+\ldots}}}}}$$

unter a, b, c, d .... positive ganze Zahlen verstanden, heißt ein Kettenbruch oder ein continuirlicher Bruch. Die Ausdrücke a, b, c, d .... heißen die Quotienten des Kettenbruchs, und zwar der Reihe nach, der erste, zweite, dritte, vierte u. s. w. Quotient. Ein Kettenbruch ist entweder begränzt, oder geht ins Unendliche fort. Ein Kettenbruch heißt periodisch, wenn alle Quotienten einander gleich sind, oder eine Anzahl derselben beständig wiederkehrt, z. B.

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}} \qquad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots}}}}}}$$

Wir haben jeden Dividenden in einem Kettenbruch gleich 1 angenommen, und die Quotienten als positive ganze Zahlen. Die Dividenden sowohl als die Quotienten können indeß beliebige Zahlen sein. Wir beschränken uns hier auf Kettenbrüche der ersteren Art.

Kettenbrüche ergeben sich bei verschiedenen Gelegenheiten. Man dividire z. B. Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{216}{1147}$ durch den Zähler, und es entsteht

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5 + \frac{67}{216}}$$

Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{67}{216}$ dividire man durch den Zähler 67, und fahre in solcher Weise fort; das liefert

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}}}}$$

und man hat für den Bruch $\frac{216}{1147}$ einen Kettenbruch erhalten.

Oder es sei gegeben die Gleichung

$$x^2 + 5x = 1.$$

Man setze dafür

$$x(5 + x) = 1$$

und es folgt

$$x = \frac{1}{5 + x}.$$

In dem Quotienten $\frac{1}{5 + x}$, welcher gleich x ist, werde statt x der Quotient selbst gesetzt; das liefert

$$x = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + x}}.$$

Statt des letzteren x setze man wiederum den oberen Quotienten und so fort; dadurch entsteht

$$x = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \ldots}}}} \text{ ohne Ende.}$$

Und es ist der Werth des x aus der gegebenen Gleichung durch einen unendlichen periodischen Kettenbruch ausgedrückt.

§. 2.

Es sei ein Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{f + \cfrac{1}{g + \ldots}}}}}}$$

gegeben. Alsdann heißen der Bruch

$$\frac{1}{a}$$

und die Kettenbrüche

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}} \qquad \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}}$$

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}} \qquad \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{f}}}}} \text{ u. s. w.}$$

Partialbrüche des gegebenen Kettenbruchs; und zwar wird

$$\frac{1}{a}$$

der erste

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b}}$$

der zweite, überhaupt ein Partialbruch der nte Partialbruch genannt, sobald er bis zum nten Quotienten des gegebenen Kettenbruchs reicht.

§. 3.

Die Partialbrüche drücken nicht genau, sondern mit Abweichungen den zu ihnen gehörenden Kettenbruch aus. Der erste, dritte, fünfte u. s. w. Partialbruch ist größer; der zweite, vierte, sechste u. s. w. kleiner als der zugehörige Kettenbruch.

Man vergleiche den ersten Partialbruch im vorigen Paragraphen mit dem zugehörigen Kettenbruch. Beide haben 1 zum Zähler; der Nenner des ersten Partialbruchs ist a, der des Kettenbruchs $a + \frac{1}{b + \ldots}$, der Nenner des ersten Partialbruchs ist also kleiner als der des Kettenbruchs, und daher ist der erste Partialbruch größer als der zugehörige Kettenbruch. Man vergleiche ferner den zweiten Partialbruch mit dem zugehörigen Kettenbruch: es ist $\frac{1}{b}$ größer als $\frac{1}{b + \frac{1}{c + \ldots}}$, daher auch $a + \frac{1}{b}$ größer als $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \ldots}}$, folglich der zweite Partialbruch $\frac{1}{a + \frac{1}{b}}$ kleiner als der Kettenbruch u. s. w.

§. 4.

Von zusammengehörigen Partialbrüchen ist der erste ein gewöhnlicher Bruch, jeder der übrigen ist ein begränzter Kettenbruch, und kann in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden. Zu diesem Verwandeln bedarf es keiner Anleitung. Die gewöhnlichen Brüche, welche aus Partialbrüchen erhalten werden, stehen aber in einer Beziehung zu einander, welche das Verwandeln der Partialbrüche in gewöhnliche Brüche erleichtert. Diese

Beziehung aufzudecken, ist der Gegenstand des folgenden Paragraphen.

Den ersten Partialbruch bezeichnen wir in der Folge auch durch $\frac{A_1}{B_1}$; den gewöhnlichen Bruch, welcher hervorgeht, wenn man den zweiten Partialbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, durch $\frac{A_2}{B_2}$ u. s. w.; den gewöhnlichen Bruch, welchen der nte Partialbruch liefert, durch $\frac{A_n}{B_n}$. Die gewöhnlichen Brüche, in welche sich Partialbrüche verwandeln lassen, werden wir gleichfalls Partialbrüche nennen, z. B. $\frac{A_n}{B_n}$ den nten Partialbruch.

§. 5.

Die Beziehung aufzufinden, in welcher die Brüche stehen, die erhalten werden, wenn man zusammengehörige Partialbrüche in gewöhnliche Brüche verwandelt, wollen wir zuvörderst die Partialbrüche des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{f + \cfrac{1}{g + \cfrac{1}{h + \dots}}}}}}}$$

auf gewöhnliche Brüche zurückführen.

Der erste Partialbruch $\frac{1}{a}$ ist schon ein gewöhnlicher Bruch. Es ist der zweite Partialbruch

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}} = \frac{b}{ab + 1}$$

welches entsteht, wenn wir Zähler und Nenner des zweiten Partialbruchs mit b multipliciren.

Es ist der dritte Partialbruch

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{c}{bc+1}} = \frac{bc+1}{abc+a+c}.$$

Der vierte

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}} = \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}.$$

Für den fünften entsteht

$$\frac{bcdf+bc+bf+df+1}{abcdf+abc+abf+adf+cdf+a+c+f}$$

u. s. w.

Wir haben also

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{b}{ab+1}$$

$$\frac{A_3}{B_3} = \frac{bc+1}{abc+a+c}$$

$$\frac{A_4}{B_4} = \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}$$

$$\frac{A_5}{B_5} = \frac{bcdf+bc+bf+df+1}{abcdf+abc+abf+adf+cdf+a+c+f}.$$

Vergleichen wir den dritten Partialbruch mit dem zweiten und ersten, so übersieht sich, daß

$$\frac{A_3}{B_3} = \frac{A_2 c + A_1}{B_2 c + B_1}.$$

Vergleichen wir den vierten Partialbruch mit dem dritten und zweiten, so wird erkannt, daß

$$\frac{A_4}{B_4} = \frac{A_3 d + A_2}{B_3 d + B_2}.$$

Die Vergleichung des fünften Partialbruchs mit dem vierten und dritten lehrt, daß

$$\frac{A_5}{B_5} = \frac{A_4 f + A_3}{B_4 f + B_3}.$$

Beachten wir, daß c der dritte, d der vierte, f der fünfte Quotient ist, so erhellet, daß wie der dritte Partialbruch aus dem zweiten und ersten, eben so der vierte aus dem dritten und zweiten, und der fünfte aus dem vierten und dritten gebildet ist. Es entsteht die Frage, ob das Gesetz, welches sich bei der Bildung dieser Partialbrüche zu erkennen giebt, auch für die Bildung aller späteren gilt.

Der fünfte Partialbruch geht offenbar in den sechsten über, wenn überall in dem fünften $f + \frac{1}{g}$ statt f gesetzt wird. Und da die Ausdrücke A_4, A_3, B_4, B_3 kein f enthalten, so ist

$$\frac{A_6}{B_6} = \frac{A_4\left(f + \frac{1}{g}\right) + A_3}{B_4\left(f + \frac{1}{g}\right) + B_3},$$

$$= \frac{(A_4 f + A_3)\,g + A_4}{(B_4 f + B_3)\,g + B_4},$$

$$= \frac{A_5 g + A_4}{B_5 g + B_4}.$$

Der sechste Partialbruch erscheint also nach dem nämlichen Gesetz gebildet, welches sich bei der Bildung des fünften, vierten und dritten kund giebt. Der sechste Partialbruch geht in den siebenten über, wenn $g + \frac{1}{h}$ statt g gesetzt wird; dabei würden die Operationen, welche wir eben ausgeführt haben,

$$\frac{A_7}{B_7} = \frac{A_6 h + A_5}{B_6 h + B_5}$$

liefern. Und da aus jedem Partialbruch der folgende in der nämlichen Weise zu bilden ist, so erhellet, daß das Gesetz der Bildung für alle folgenden Partialbrüche gilt. Dies Gesetz besteht aber darin, daß der Zähler des n ten Partialbruchs erhalten wird, wenn man den Zähler des (n — 1)sten mit dem n ten Quotienten multiciplirt, und zu dem entstehenden Produkt den Zähler des (n — 2)ten Partialsbruchs addirt; und daß der Nenner des

nten Partialbruchs hervorgeht, wenn man den Nenner des (n — 1)sten mit dem nten Quotienten multiplicirt, und zu dem Produkt den Nenner des (n — 2)ten Partialbruchs addirt.

Um nach diesem Gesetz den nten Partialbruch zu erhalten, ist es nothwendig, daß die beiden vorangehenden Partialbrüche gebildet sind. Die Anwendung des Gesetzes tritt daher mit dem dritten Partialbruch ein. Der erste Partialbruch ist bereits ein gewöhnlicher Bruch, der zweite so leicht in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, daß zu der Verwandlung keine fernere Erleichterung Bedürfniß ist. Dessen ungeachtet hat man das Gesetz auch auf den zweiten und ersten Partialbruch auszudehnen gesucht, und diese Ausdehnung dadurch erreicht, daß man jeden zusammengehörigen Partialbrüchen die beiden Quotienten $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ als Partialbrüche vorangehen läßt, die man aber lediglich jenem Gesetz zu Gefallen hinzudenkt. Es ist nämlich der erste Partialbruch

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{0.a + 1}{1.a + 0} = \frac{1}{a}$$

und der zweite

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{1.b + 0}{a.b + 1} = \frac{b}{ab + 1}.$$

Sind nun a, b, c, d, f.... die Quotienten eines Kettenbruchs, so bildet man die Partialbrüche bequem nach folgendem Schema:

	1	0
	0	1
a	1	a
b	b	ab + 1
c	bc + 1	abc + c + a
d	bcd + d + b	abcd + cd + ad + ab + 1
f	bcdf+df+bf+bc+1	abcdf+cdf+adf+abf+f+abc+c+a
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Die zweite Kolumne, in welche alle Zähler kommen, beginnt man mit 1 und 0, die dritte, in welche alle Nenner kommen, mit 0 und 1; in die erste Kolumne werden die Quotienten gesetzt. Jeder folgende Zähler entsteht, wenn man mit dem zu ihm gehörenden Quotienten den vorangehenden Zähler multiplicirt, und den vorvorangehenden Zähler zu dem erhaltenen Produkt addirt; eben so finden sich die folgenden Nenner.

Es mögen z. B. Partialbrüche des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}}}}$$

berechnet werden.

Wir bilden zuvörderst

	1	0
	0	1
3	1	3
5	5	16
2	11	35
7	82	261
4	339	1079

haben daraus die Partialbrüche $\frac{1}{3}, \frac{5}{16}, \frac{11}{35}, \frac{82}{261}$ und den Werth des vollständigen Kettenbruchs gleich $\frac{339}{1079}$. Es ist nämlich im vorliegenden Fall der fünfte Partialbruch der Kettenbruch selbst.

§. 6.

Sind a, b, a', b' ganze Zahlen und sind die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ nicht einander gleich, so ist $\frac{1}{bb'}$ die geringste Differenz, welche zwischen diesen Brüchen stattfinden kann.

Die Differenz der Brüche ist $\frac{ab' - a'b}{bb'}$. Der Zähler $ab' - a'b$

ist nicht Null, weil die Brüche ungleich sind, und er bezeichnet eine ganze Zahl. Er kann also nicht kleiner sein als 1.

§. 7.

Die Differenz irgend zweier auf einander folgenden Partialbrüche $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n}$ ist jedesmal $\frac{\pm 1}{B_{n-1}\,B_n}$, und zwar $\pm$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Bezeichnen wir den $(n+1)$sten Quotienten mit q, so ist nach §. 5

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{A_n q + A_{n-1}}{B_n q + B_{n-1}}.$$

Wir vergleichen zunächst die Differenzen $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n}$ und $\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$. Es ist

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1}}{B_{n-1}B_n}$$

und es ist

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_nq + A_{n-1}}{B_nq + B_{n-1}},$$

$$= \frac{A_nB_nq + A_nB_{n-1} - A_nB_nq - A_{n-1}B_n}{B_n(B_nq + B_{n-1})},$$

$$= \frac{A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n}{B_n(B_nq + B_{n-1})},$$

oder

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{-(A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1})}{B_nB_{n+1}}.$$

Ist also die Differenz

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{\pm r}{B_{n+1}B_n},$$

so ist die Differenz

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{\mp r}{B_nB_{n+1}}.$$

Die sämmtlichen Differenzen, welche hervorgehen, wenn man von jedem Partialbruch den nächstfolgenden subtrahirt, haben deshalb

in absoluter Hinsicht denselben Zähler r, und die Zähler sind abwechselnd positiv und negativ. Den Zähler r zu erhalten, dürfen wir nur von irgend einem Partialbruch den nächstfolgenden subtrahiren. Sind a und b die beiden ersten Quotienten eines Kettenbruchs, so ist der erste Partialbruch $\frac{1}{a}$, der zweite $\frac{b}{ab+1}$; und es ist die Differenz

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{ab+1} = \frac{ab+1-ab}{a(ab+1)} = \frac{1}{a(ab+1)}.$$

Wir haben daher

$$\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2} = \frac{+1}{B_1 B_2},$$

$$\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_3}{B_3} = \frac{-1}{B_2 B_3},$$

$$\frac{A_3}{B_3} - \frac{A_4}{B_4} = \frac{+1}{B_3 B_4},$$

u. s. f. Und das ist der Satz.

§. 8.

Es ist stets

$$A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1} = \pm 1$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl bezeichnet.

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{\pm 1}{B_{n-1} B_n}$$

und wenn man hier die Nenner beseitigt, entspringt das Gesetz.

§. 9.

Jeder Partialbruch ergiebt sich als ein reducirter Bruch.

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1} = \pm 1.$$

Die Ausdrücke A_n und B_n sind deshalb relative Primzahlen; sie können nämlich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, weil ein solcher auch Theiler zu der Differenz ± 1 sein müßte. Dann ist aber $\frac{A_n}{B_n}$, d. h. jeder Partialbruch ein reducirter Bruch.

§. 10.

Es ist stets

$$B_{n+1} > B_n > B_{n-1} \cdots \text{ und } A_{n+1} > A_n > A_{n-1} \cdots$$

Folgt aus §. 5 und dem vorigen Paragraph.

§. 11.

Der Unterschied zwischen dem n ten Partialbruch und dem zugehörigen Kettenbruch beträgt in absoluter Hinsicht weniger als $\frac{1}{B_n B_{n+1}}$.

Nach §. 3 sind die auf einander folgenden Partialbrüche abwechselnd größer und kleiner als der zugehörige Kettenbruch. Der Kettenbruch liegt daher zwischen je zwei aufeinander folgenden Partialbrüchen. Der Unterschied zwischen dem n ten und dem (n + 1) sten Partialbruch ist nach §. 7 $\frac{\pm 1}{B_n B_{n+1}}$, und da der Kettenbruch zwischen beiden liegt, so ist er von seinem n ten Partialbruch in absoluter Hinsicht um weniger als $\frac{1}{B_n B_{n+1}}$ verschieden.

Nach dem vorigen Paragraph ist B_{n+1} größer als B_n. Deshalb ist $\frac{1}{B_n{}^2}$ größer als $\frac{1}{B_n B_{n+1}}$, und man kann auch aufstellen, daß der Unterschied zwischen dem n ten Partialbruch und dem Kettenbruch geringer ist als $\frac{1}{B_n{}^2}$.

§. 12.

Der Unterschied zwischen dem zweiten Partialbruch und dem Kettenbruch ist geringer, als der Unterschied zwischen dem ersten Partialbruch und dem Kettenbruch; der dritte Partialbruch steht dem Kettenbruch näher als der zweite u. s. f., überhaupt ist jeder spätere Partialbruch von dem Kettenbruch um weniger verschieden als jeder vorangehende.

Es stelle q den (n + 1) sten Quotienten vor, und der (n + 1) ste Partialbruch drückt sich aus durch

$$\frac{A_n q + A_{n-1}}{B_n q + B_{n-1}}.$$

Die sämmtlichen dem Quotienten q folgenden Quotienten seien r, s, t ...; dann ist

$$q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \ldots}}}$$

der im Kettenbruch dem q nachfolgende Theil. Diesen Theil bezeichne z; und wenn wir oben in dem Ausdruck für den (n + 1)sten Partialbruch z statt q setzen, so erhalten wir

$$\frac{A_n z + A_{n-1}}{B_n z + B_{n-1}}$$

als Werth des vollständigen Kettenbruchs.

Man betrachte jetzt die Differenzen

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n z + A_{n-1}}{B_n z + B_{n-1}}$$

und

$$\frac{A_n z + A_{n-1}}{B_n z + B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n}.$$

Wenn man auf einerlei Nenner bringt und §. 8 beachtet entsteht für die erste

$$\frac{\pm z}{B_{n-1}(B_n z + B_{n-1})}$$

für die andere

$$\frac{\pm 1}{B_n(B_n z + B_{n-1})}$$

Da nun z in absoluter Hinsicht nicht kleiner sein kann als 1, und wegen §. 10 $B_n > B_{n-1}$, so ist in absoluter Hinsicht die zweite Differenz kleiner als die erste, d. h. es steht der Kettenbruch dem späteren Partialbruch $\frac{A_n}{B_n}$ näher als dem früheren $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$.

§. 13.

Soll ein reducirter (also in den kleinsten Zahlen ausgedrückter) Bruch $\frac{p}{q}$ seinem Werthe nach zwischen zwei aufeinander folgen-

den Partialbrüchen liegen, so muß sein Nenner größer sein als der Nenner des spätern Partialbruchs (um so mehr also größer als der Nenner des früheren) und sein Zähler größer als der Zähler dieses späteren Partialbruchs. Oder, in anderen Worten, soll, je nachdem

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \gtrless \frac{A_n}{B_n}$$

ist,

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \gtrless \frac{p}{q} \gtrless \frac{A_n}{B_n}$$

sein, so muß q größer sein als B_n und p größer als A_n.

Es ist

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{\pm 1}{B_{n-1}B_n}.$$

Andererseits ist

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{p}{q} = \frac{A_{n-1}q - pB_{n-1}}{B_{n-1}q},$$

oder, wenn wir die Differenz im Zähler, welche je nach der Annahme positiv oder negativ ausfallen muß, mit $\pm d$ bezeichnen,

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{p}{q} = \frac{\pm d}{B_{n-1}q}.$$

Nun muß, je nach der Annahme

$$\frac{\pm 1}{B_{n-1}B_n} \gtrless \frac{\pm d}{B_{n-1}q}.$$

Beides wird erfüllt, wenn in absoluter Hinsicht

$$\frac{1}{B_{n-1}B_n} > \frac{d}{B_{n-1}q}$$

oder

$$q > dB_n$$

ist; und da d nach §. 6. nicht kleiner sein kann als 1, so hat man $q > B_n$.

Setzen wir wiederum

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} \gtrless \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{p}{q},$$

welches jedenfalls sich erfüllt, sobald in absoluter Hinsicht

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} > \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{p}{q},$$

so folgt

$$\frac{p}{q} > \frac{A_n}{B_n}$$

oder

$$p > \frac{q}{B_n} A_n$$

und da $q > B_n$, deshalb $\frac{q}{B_n} > 1$ ist, so ist $p > A_n$.

§. 14.

Jeder Partialbruch $\frac{A_n}{B_n}$ steht dem Werthe k seines Kettenbruchs näher, als irgend ein anderer Bruch $\frac{g}{h}$, der in kleineren Zahlen ausgedrückt ist, als der Partialbruch.

Es ist entweder

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} > k > \frac{A_n}{B_n}$$

oder

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} < k < \frac{A_n}{B_n}$$

und immer steht nach §. 12 k näher an $\frac{A_n}{B_n}$ als an $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$. Nach dem vorigen Paragraphen kann der Werth $\frac{g}{h}$ nicht innerhalb der Gränzen $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ und $\frac{A_n}{B_n}$ sich befinden. Liegt nun $\frac{g}{h}$ über die Gränze $\frac{A_n}{B_n}$ hinaus, d. h. ist

$$k > \frac{A_n}{B_n} > \frac{g}{h}$$

oder

$$k < \frac{A_n}{B_n} < \frac{g}{h}$$

so fällt in die Augen, daß der Partialbruch dem Kettenbruch näher steht, als der Bruch $\frac{g}{h}$. Liegt aber $\frac{g}{h}$ über die Gränze $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$

hinaus, so erhellet dasselbe aus dem Umstande, daß k näher an $\frac{A_n}{B_n}$ liegt als an $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$.

Uebungen und Praktisches.

§. 15.

1) Was ist ein Kettenbruch? Was versteht man unter seinen Quotienten?

2) Was sind Partialbrüche eines Kettenbruchs? Welche Partialbrüche sind größer als der Kettenbruch, welche kleiner? Ist der nte oder der (n + p)te Partialbruch um weniger von dem Kettenbruch verschieden? Wie läßt sich ein Partialbruch aus den beiden ihm vorangehenden Partialbrüchen bilden? Wie werden die Partialbrüche am bequemsten in gewöhnliche Brüche verwandelt? Welches ist die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Partialbrüchen? Kann ein Partialbruch gehoben werden? Innerhalb welcher Gränzen liegt der Unterschied zwischen einem Kettenbruch und seinem nten Partialbruch? Giebt es Brüche, welche kleinere Nenner haben, als die Partialbrüche, und welche sich um weniger von dem Kettenbruch unterscheiden, als die Partialbrüche?

Anwendung der Kettenbrüche um Näherungswerthe in kleineren Zahlen zu finden für Brüche, die in großen Zahlen gegeben und reducirt sind.

3) Einen echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Man dividire Zähler und Nenner des Bruchs durch den Zähler. Den Nenner forme man dabei in eine Summe zweier Summanden um, von denen der eine eine ganze Zahl, der andere ein echter Bruch ist. Diesen echten Bruch behandle man wie den gegebenen Bruch u. s. f. Dadurch geht der verlangte Kettenbruch hervor. Z. B.:

$$\frac{418}{1541} = \frac{1}{3 + \frac{287}{418}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{131}{287}}}$$

$$= \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{25}{131}}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{6}{25}}}}}$$

$$= \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{6}}}}}}$$

Der eben durchgeführten Rechnung läßt sich eine bequemere Gestalt geben. Zur Bildung des Kettenbruchs bedarf es blos seiner Quotienten. Nun ist der erste Quotient hervorgegangen, indem man mit dem Zähler des gegebenen Bruchs in den Nenner dividirte, der zweite Quotient, indem mit dem gebliebenen Rest in den vorigen Divisor dividirt wurde, der dritte, indem mit dem zuletzt gebliebenen Rest dividirt wurde in den letzten Divisor u. s. f., so daß die Quotienten durch dieselbe Rechnung hervorgehen, welche man ausführt, um ohne Zerfällen den größten gemeinschaftlichen Theiler zum Zähler und Nenner zu finden. Um daher den Bruch $\frac{418}{1541}$ bequemer in einen Kettenbruch zu verwandeln, stelle man folgende Rechnung an:

418	1541	3
	1254	
287	418	1
	287	
131	287	2
	262	
25	131	5
	125	
6	25	4
	24	
1	6	6
	6	
	0	

und bilde aus den gefundenen Quotienten 3, 1, 2, 5, 4, 6 den Kettenbruch.

4) Wenn ein echter reducirter Bruch $\frac{a}{b}$ größere Zahlen zum Zähler und Nenner hat, und es darauf ankommt, Brüche in kleineren Zahlen zu finden, welche so wenig als möglich von dem Bruch $\frac{a}{b}$ verschieden sind, so werden diese Brüche in den Partialbrüchen des Kettenbruchs erhalten, in welchen $\frac{a}{b}$ sich verwandeln läßt. Diese Partialbrüche heißen die *Näherungswerthe* des Bruchs $\frac{a}{b}$.

Jeder unechte Bruch $\frac{p}{q}$ liefert, wenn man Zähler und Nenner vertauscht, einen echten Bruch $\frac{q}{p}$. Werden für diesen die Näherungswerthe berechnet, und in jedem derselben wiederum Zähler und Nenner verwechselt, so ergeben sich die *Näherungswerthe* des unechten Bruchs $\frac{p}{q}$. Hier aber fällt der erste Näherungswerth zu klein aus, der zweite zu groß, u. s. w.

Beispiele.

1) Die Näherungswerthe für $\frac{1801}{6245}$ zu finden. Man ermittele zunächst die Quotienten; dazu führt folgende Rechnung:

```
1801|6245|3
    |5403|
    ----------
     842|1801|2
        |1684|
        ----------
          117|842|7
             |819|
             --------
               23|117|5
                 |115|
                 -------
                    2|23|11
                     |22|
                     -----
                       1|2|2
                        |2|
                        ---
                         0
```

und bilde das Schema

	1	0
	0	1
3	1	3
2	2	7
7	15	52
5	77	267
11	862	2989
2	1801	6245

(Man thut wohl, die Tabelle fortzusetzen, bis der Zähler und der Nenner des gegebenen Bruchs erscheinen. Man versichert sich dadurch von der Richtigkeit der Rechnung.)

Hieraus sind die Näherungswerthe

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{7},\ \frac{15}{52},\ \frac{77}{267},\ \frac{862}{2989}.$$

Der erste, dritte und fünfte von diesen Brüchen sind größer als $\frac{1801}{6245}$, der zweite und vierte kleiner. Die Abweichung des ersten Näherungswerthes beträgt nach §. 11 weniger als $\frac{1}{21}$, die des

zweiten weniger als $\frac{1}{364}$, die des dritten ist geringer als $\frac{1}{13884}$, die des vierten geringer als $\frac{1}{798063}$, die des fünften geringer als $\frac{1}{18666305}$.

2) Die Näherungswerthe für $\frac{75983}{13984}$ zu berechnen. Man suche zunächst die Quotienten zu $\frac{13984}{75983}$.

```
13984|75983|5
     |69920|
     ----------
      6063|13984|2
          |12126|
          ----------
           1858|6063|3
               |5574|
               ---------
                 489|1858|3
                    |1467|
                    ---------
                     391|489|1
                        |391|
                        --------
                          98|391|3
                            |294|
                            --------
                              97|98|1
                                |97|
                                ------
                                 1|97|97
                                  |97|
                                  ----
                                    0
```

bilde

	1	0
	0	1
5	1	5
2	2	11
3	7	38
3	23	125
1	30	163
3	113	614
1	143	777
97	13984	75983

und hieraus sind die Näherungswerthe

$$5, \frac{11}{2}, \frac{38}{7}, \frac{125}{23}, \frac{163}{30}, \frac{614}{113}, \frac{777}{143}.$$

3) Bezeichnet p die Peripherie, d den Durchmesser eines Kreises, so ist bekanntlich $p = \pi d$. Es verhält sich daher $p : d = 3{,}141592 \ldots : 1 = 3141592 : 1000000$ annähernd. Es sollen für den Quotienten $\frac{3141592}{1000000}$ die Näherungswerthe berechnet werden.

```
1000000|3141592|3
       |3000000|
        141592|1000000|7
              | 991144|
                  8856|141592|15
                      |  8856|
                        53032|
                        44280|
                         8752|8856|1
                             |8752|
                               104|8752|84
                                  |832 |
                                    432|
                                    416|
                                     16|104|6
                                       | 96|
                                          8|16|2
                                           |16|
                                             0
```

	1	0
	0	1
3	1	3
7	7	22
15	106	333
1	113	355
84	9598	30153
6	57701	141273
2	125000	392699

daraus die Näherungswerthe

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{30153}{9598},\ \frac{181273}{57701}$$

und $\frac{392699}{125000}$ als den reducirten Bruch, welcher gleich dem gegebenen ist.

Das Verhältniß 22 : 7 ist um 0,00126 .... größer als π. Es ist für den praktischen Gebrauch sehr bequem in allen Fällen, welche eine solche Abweichung gestatten.

4) Beispiele.

	Geg. Br.	Näherungswerthe.
a)	$\frac{113}{7011}$	$\frac{1}{62},\ \frac{22}{1365},\ \frac{23}{1427},\ \frac{45}{2792}.$
b)	$\frac{1000}{732}$	$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{11}{8},\ \frac{15}{11},\ \frac{41}{30},\ \frac{56}{41},\ \frac{97}{71}.$
c)	$\frac{907}{18564}$	$\frac{1}{20},\ \frac{2}{41},\ \frac{15}{307},\ \frac{77}{1576},\ \frac{169}{3459},\ \frac{246}{5035}.$
d)	$\frac{587}{1943}$	$\frac{1}{3},\ \frac{3}{10},\ \frac{13}{43},\ \frac{29}{96},\ \frac{100}{331},\ \frac{129}{427},\ \frac{229}{758}.$
e)	$\frac{80937}{5743}$	$14,\ \frac{141}{10},\ \frac{155}{11},\ \frac{451}{32},\ \frac{606}{43},\ \frac{2269}{161},\ \frac{7413}{526},\ \frac{24508}{1739}.$
f)	$\frac{13957}{59476}$	$\frac{1}{4},\ \frac{3}{13},\ \frac{4}{17},\ \frac{19}{81},\ \frac{23}{98},\ \frac{65}{277},\ \frac{88}{375},\ \frac{1033}{4402},\ \frac{2154}{9179}.$

5) Nicht blos Brüche, sondern auch andere Ausdrücke lassen sich in Kettenbrüche verwandeln, oder mit Hilfe derselben wiedergeben. Das Verfahren, welches dabei zu beobachten ist, wird natürlich mit den Ausdrücken sich ändern. Im Allgemeinen kann Folgendes angegeben werden: Man verwandele den Ausdruck Q, welchen man als Kettenbruch wiederzugeben beabsichtigt, in eine Summe von der Form $a + \frac{1}{x}$, deren erster Summand a eine ganze Zahl oder Null ist, und in welcher x größer ist als 1;

den Ausdruck x verwandele man in eine Summe von der Form $b + \frac{1}{x'}$, in welcher b eine ganze Zahl, x' einen Ausdruck vorstellt, der größer ist als 1; x' behandele man in derselben Weise u. s. f., und substituire zuletzt die Werthe von x, x' u. s. f.; das liefert

$$Q = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d \ldots}}}$$

Ist a nicht Null, so ist Q durch die Summe einer ganzen Zahl und eines Kettenbruchs ausgedrückt. Die Näherungswerthe, welche für Q hervorgehen, indem man die Partialbrüche des Kettenbruchs zu a addirt, lassen sich sofort in der Gestalt unechter Brüche dadurch erzielen, daß man in dem Schema die zweite Kolumne nicht mit 1 und 0, sondern mit 1 und a beginnt, nämlich:

	1	0
	a	1
b	ab + 1	b
c	abc + c + a	bc + 1
d	.	.
.	.	.
.	.	.

Die Näherungswerthe sind

$$\frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \frac{abc+a+c}{bc+1}, \ldots$$

Es werde z. B. $\sqrt{21}$ in einen Kettenbruch verwandelt. Es liegt $\sqrt{21}$ zwischen 4 und 5, daher setze man

$$\sqrt{21} = 4 + \frac{1}{x}.$$

Der Bruch $\frac{1}{x}$ ist echt, deshalb x größer als 1. Man entwickele x aus der vorstehenden Gleichung; das liefert

$$x = \frac{1}{\sqrt{21} - 4} = \frac{\sqrt{21} + 4}{5}.$$

(21 - 16)

Da $\sqrt{21}$ zwischen 4 und 5 liegt, ist der Zähler des letzten Ausdrucks größer als 8 und kleiner als 9, und der Werth des ganzen Ausdrucks größer als 1 und kleiner als 2. Man setze daher

$$x = \frac{\sqrt{21} + 4}{5} = 1 + \frac{1}{x^{I}}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\sqrt{21} + 4}{5} = 1 + \frac{1}{x^{I}}$$

werde x^{I} entwickelt; es ergiebt sich

$$x^{I} = \frac{5}{\sqrt{21} - 1} = \frac{\sqrt{21} + 1}{4} = 1 + \frac{1}{x^{II}}$$

weil nämlich $\frac{\sqrt{21} + 1}{4}$ größer als 1 und kleiner als 2 ist.

Aus der Gleichung

$$\frac{\sqrt{21} + 1}{4} = 1 + \frac{1}{x^{II}}$$

werde wiederum x^{II} entwickelt; man erhält

$$x^{II} = \frac{4}{\sqrt{21} - 3} = \frac{\sqrt{21} + 3}{3} = 2 + \frac{1}{x^{III}}.$$

Aus

$$\frac{\sqrt{21} + 3}{3} = 2 + \frac{1}{x^{III}}$$

folgt

$$x^{III} = \frac{3}{\sqrt{21} - 3} = \frac{\sqrt{21} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{x^{IV}}.$$

Aus

$$\frac{\sqrt{21} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{x^{IV}}$$

findet man

$$x^{IV} = \frac{4}{\sqrt{21} - 1} = \frac{\sqrt{21} + 1}{5} = 1 + \frac{1}{x^{V}}.$$

Aus

$$\frac{\sqrt{21} + 1}{5} = 1 + \frac{1}{x^{V}}$$

entsteht

$$x^{V} = \frac{5}{\sqrt{21} - 4} = \sqrt{21} + 4 = 8 + \frac{1}{x^{VI}}.$$

Aus $\sqrt{21} + 4 = 8 + \frac{1}{x^{VI}}$ folgt $x^{VI} = \frac{1}{\sqrt{21} - 4}$.

Der letzte Werth ist einerlei mit dem Werthe von x. Von hier an wiederholen sich also ohne Ende die Operationen, welche bisher ausgeführt wurden. Man hat daher

$$\sqrt{21} = 4 + \frac{1}{x},$$

$$x = 1 + \frac{1}{x^{I}},$$

$$x^{I} = 1 + \frac{1}{x^{II}},$$

$$x^{II} = 2 + \frac{1}{x^{III}},$$

$$x^{III} = 1 + \frac{1}{x^{IV}},$$

$$x^{IV} = 1 + \frac{1}{x^{V}},$$

$$x^{V} = 8 + \frac{1}{x^{VI}},$$

$$x^{VI} = x\ ,\ x^{VII} = x^{II} \text{ u. s. f.}$$

und wenn man diese Werthe substituirt

$$\sqrt{21} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 +}}}}}}}}}}}}}$$

u. s. f. ohne Ende.

Der erhaltene Kettenbruch ist periodisch und unendlich. Er liefert für $\sqrt{21}$ die Näherungswerthe:

$$4,\ 5,\ 4\tfrac{1}{2},\ 4\tfrac{3}{5},\ 4\tfrac{4}{7},\ 4\tfrac{7}{12},\ 4\tfrac{60}{103} \text{ u. s. f.}$$

Eben so wird gefunden

$$\sqrt{85} = 9 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{18 + \ldots}}}}}}}}}}$$

ohne Ende.

und daraus ergeben sich für $\sqrt{85}$ die Näherungswerthe

$$9,\ \frac{37}{4},\ \frac{46}{5},\ \frac{83}{9},\ \frac{378}{41},\ \frac{6887}{747},\ \frac{27926}{3029} \text{ u. s. f.}$$

6) Beispiele.

	Geg. Wurz.	Näherungswerthe.
a)	$\sqrt{28}$	$5,\ \frac{16}{3},\ \frac{37}{7},\ \frac{127}{24},\ \frac{1307}{247} \ldots$
b)	$\sqrt{31}$	$5,\ 6,\ \frac{11}{2},\ \frac{39}{7},\ \frac{206}{37},\ \frac{657}{118},\ \frac{863}{155},\ \frac{1520}{273},\ \frac{16063}{2885} \ldots$
c)	$\sqrt{44}$	$6,\ 7,\ \frac{13}{2},\ \frac{20}{3},\ \frac{53}{8},\ \frac{73}{11},\ \frac{126}{19},\ \frac{199}{30},\ \frac{2514}{379} \ldots$
d)	$\sqrt{52}$	$7,\ \frac{29}{4},\ \frac{36}{5},\ \frac{101}{14},\ \frac{137}{19},\ \frac{649}{90},\ \frac{9223}{1279} \ldots$

7) Den Werth des unendlichen Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\text{ ohne Ende}}}}}$$

anzugeben.

Man setze

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\text{ ohne Ende,}}}}}$$

so folgt

$$x=\frac{1}{a+x},$$

weil nämlich der zweite Summand des ersten Nenners

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\text{ ohne Ende,}}}}$$

also wiederum x ist. Aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich

$$x^2+ax=1$$

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Und dies ist der Werth des gegebenen unendlichen Kettenbruchs. Die Wurzel muß positiv genommen werden, weil sonst der Ausdruck negativ werden würde, während der Kettenbruch offenbar einen positiven Werth hat.

8) Welchen Werth hat der unendliche periodische Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\text{ ohne Ende.}}}}}}}$$

Er hat den Werth

$$-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{b}{a}}.$$

9) Welchen Werth hat der unendliche periodische Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots}}}}}}$$

Er ist gleich

$$-\frac{abc+a+c-b-\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

Zweites Kapitel.

Von den diophantischen Gleichungen.

§. 16.

Ist A = B eine algebraische Gleichung, welche zwei Unbekannte x und y enthält, so lassen sich für x und y unendlich viele zusammengehörige Werthe angeben, welche die Gleichung zu einer identischen oder analytischen machen.

Aus der Gleichung A = B denke man einen der Unbekannten, etwa x, entwickelt. Der für x entstehende Ausdruck enthält den Unbekannten y. Wird dem y irgend ein bestimmter Werth beigelegt, so gewinnt der Ausdruck für x, somit x selbst, einen bestimmten Werth. Für diesen Werth von y und diesen Werth von x wird die Gleichung A = B identisch oder analytisch. Solcher zusammengehörigen Werthe für x und y lassen sich aber unendlich viele angeben, weil für y jeder beliebige Werth gesetzt werden kann.

§. 17.

Ist A = B eine algebraische Gleichung, welche mehr als zwei Unbekannte x, y, z .... enthält, so lassen sich für diese Unbekannten unendlich viele zusammengehörige Werthe angeben, welche die Gleichung zu einer identischen oder analytischen machen.

Denn wird aus der Gleichung A = B einer der Unbekannten, etwa x, entwickelt, so entsteht für x ein Ausdruck, welcher die übrigen Unbekannten y, z .... enthält; wird nun für y irgend ein bestimmter Werth gesetzt, eben so für z u. s. w., so erhält auch x einen bestimmten Werth, und diese zusammengehörigen Werthe der Unbekannten machen die Gleichung A = B identisch oder analytisch; da man aber für y, z .... unendlich viele Werthe setzen kann, so erhellet die Behauptung.

§. 18.

Wenn n algebraische Gleichungen mit n + p Unbekannten gegeben sind, so lassen sich immer unendlich viele zusammengehörigen Werthe für diese n + p Unbekannten angeben, welche die n algebraischen Gleichungen zu identischen oder zu analytischen machen.

Man lege p von den Unbekannten beliebige Werthe bei, und entwickele dann die übrigen n Unbekannten. Dadurch erhält man zusammengehörige Werthe, welche den gegebenen Gleichungen genügen; und dies Verfahren läßt sich unendlich oft wiederholen.

§. 19.

Die unendlich vielen Werthe, welche einer algebraischen Gleichung genügen, die mehr als einen Unbekannten enthält, oder welche n Gleichungen entsprechen, die mit n + p Unbekannten gegeben sind, können beschränkt werden durch Bedingungen, welche die Werthe gleichzeitig erfüllen sollen. Diese Bedingungen lassen sich mannigfach stellen; daß die Werthe ganze Zahlen sein sollen, ist eine der gewöhnlichsten.

§. 20.

Eine Gleichung heißt **unbestimmt** oder **diophantisch**, wenn sie zwei oder mehr Unbekannte enthält, und wenn für diese alle zusammengehörigen Werthe anzugeben sind, welche der Gleichung genügen, gleichviel ob die Anzahl jener Werthe durch Bedingungen

beschränkt ist, oder nicht. Eben so heißen n Gleichungen unbestimmt oder diophantisch, wenn sich mehr als n Unbekannte in ihnen finden, und wenn alle zusammengehörigen Werthe dieser Unbekannten herzuleiten sind, welche den Gleichungen entsprechen, gleichgiltig, ob Bedingungen die Anzahl jener Werthe beschränken, oder nicht.

Aufgaben, welche zu diophantischen Gleichungen führen, heißen unbestimmte oder diophantische Aufgaben.

Die Lehre von der Auflösung der diophantischen Gleichungen heißt die unbestimmte Analysis.

§. 21.

Sind a und b relative Primzahlen und ist die ganze Zahl h kleiner als b, so ist ha nicht theilbar durch b.

Denn wäre ha theilbar durch b, so müßte b ein Theiler zu h sein (Zahlenlehre §. 161), was doch nicht ist.

§. 22.

1) Sind a und b relative Primzahlen, und wird jedes der Produkte

$$1a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\ \ldots.\ (b-1)a$$

durch b dividirt, so sind von den sich ergebenden Resten nicht zwei einander gleich.

Irgend zwei der Produkte seien ha und h'a, es seien q und q' die dazu gehörigen Quotienten, r und r' die Reste. Dann ist

$$ha = bq + r$$
$$h'a = bq' + r'.$$

Wäre nun $r = r'$ so würde folgen

$$(h - h')a = b(q - q')$$

und es müßte b ein Theiler zu $h - h'$ sein. Das aber ist nicht möglich, weil

$$h - h' < h < b.$$

Deshalb sind r und r' verschieden.

2) Daher sind die sämmtlichen Reste von einander verschieden. Und da überhaupt bei der Division mit b nur die Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots.\ b-1$$

als Reste möglich sind, so ergeben sich oben in irgend einer

Ordnung diese b — 1 verschiedenen Reste, welche die Division mit b überhaupt zuläßt.

§. 23.

Sind a, b, c positive oder negative ganze Zahlen, dabei a und b relative Primzahlen, so kann der Gleichung

$$ax + by = c$$

stets durch Werthe für x und y genügt werden, die positive oder negative ganze Zahlen sind.

Ist a nicht positiv, so kann es, unbeschadet der Allgemeinheit, durch Multiplication der Gleichung mit — 1 positiv gemacht werden. Wir setzen demnach a positiv und betrachten zuvörderst die Gleichung

$$ax \mp by = + c,$$

b und c an sich absolut gedacht.

Aus der Gleichung folgt

$$\frac{ax - c}{b} = \pm y.$$

Es ist entweder c theilbar durch b oder nicht. Ist c theilbar durch b, so darf statt x jede durch b theilbare Zahl, positiv oder negativ gesetzt werden, und jedesmal liefert ax — c, durch b dividirt, eine positive oder negative ganze Zahl für y, die mit der für x gesetzten Zahl, der Gleichung entspricht.

Es sei andererseits c nicht theilbar durch b, und gewähre durch b dividirt, den nächst kleineren Quotienten q und den Rest r. Nach dem vorigen Paragraphen besteht jedesmal eine, und nur eine Zahl h, kleiner als b, dergestalt, daß ha durch b dividirt, denselben Rest r liefert. Der nächst kleinere Quotient zu ha : b sei q'. Dann ist

$$ah = bq' + r$$
$$c = bq + r$$
$$ah - c = b(q' - q)$$

oder, $q' - q = \pm k$ gesetzt,

$$\alpha) \quad ah \mp bk = + c$$

und es erhellet, daß zunächst die ganzen Zahlen h und k der Gleichung entsprechen. Bestehen noch andere ganze Zahlen x' und y' welche der Gleichung genügen, so folgt, indem man die

Gleichung α von der

$$ax' \mp by' = + c$$

subtrahirt

$$a(x' - h) = \pm b(y' - k)$$

d. h. es muß, da b und a relative Primzahlen sind, b ein Theiler zu $x' - h$ sein. Dazu ist nur erforderlich, daß, unter n jede beliebige positive oder negative ganze Zahl verstanden,

$$x' - h = nb$$

oder

$$x' = nb + h$$

gewonnen werde. Ueberhaupt also ist

$$x = bn + h$$

zu setzen, unter n Null und jede positive oder negative ganze Zahl verstanden. Wir setzen $n - 1$ statt n, welches zulässig ist, da n jede ganze Zahl vorstellt; dadurch entsteht

$$x = (n - 1) b + h$$

oder

$$x = bn - (b - h)$$

und es ist gleichgültig, welcher der beiden Formen

$$x = bn + h$$
$$x = bn - (b - h)$$

man sich bediene; ist indeß $h \gtrless b - h$, so wähle man diejenige, welche den kleineren dieser Werthe enthält.

Ziehen wir andererseits die Form

$$ax \mp by = - c$$

in Betracht, so läßt sich ähnlich schließen wie zuvor; statt der Produktenreihe

$$1 \cdot a,\ 2 \cdot a \ldots . (b - 1) a$$

ist aber die

$$(-1) a,\ (-2) a,\ (-3) a \ldots . - (b - 1) a$$

zu wählen, und h negativ. Für x ergiebt sich die Form

$$x = bn - h$$

oder $n + 1$ statt n setzend

$$x = bn + (b - h).$$

Beispiele.

1) $3x - 8y = 19$.

$c : b$, hier $19 : 8$ läßt den Rest $r = 3$. Unter den Produkten

$$1 \cdot a,\ 2 \cdot a \ldots\ldots (b-1)a$$

hier also

$$1 \cdot 3,\ 2 \cdot 3 \ldots\ldots 7 \cdot 3$$

ist es das erste $1 \cdot 3$, welches durch 8 dividirt denselben Rest $r = 3$ läßt. Daher ist $h = 1$ und

$$x = 8n + 1.$$

Dieser Werth, substituirt in der vorgelegten Gleichung, liefert

$$y = 3n - 2.$$

Setzt man statt n Null und die positiven ganzen Zahlen, so entstehen für x die Werthe

$$1,\ 9,\ 17,\ 25,\ 33 \ldots\ldots$$

dazu gehörend für y

$$-2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10 \ldots\ldots$$

und setzt man für n die negativen ganzen Zahlen, so ergeben sich für x

$$-7,\ -15,\ -23 \ldots\ldots$$

dazu für y

$$-5,\ -8,\ -11 \ldots\ldots$$

und je zwei zusammengehörige Werthe, wie z. B. 1 und -2, oder 17 und 4, oder -7 und -5, beziehlich statt x und y gesetzt, entsprechen der Gleichung.

2) $5x - 12y = 28$.

$28 : 12$ läßt den Rest 4, und unter den Produkten

$$1 \cdot 5,\ 2 \cdot 5 \ldots\ldots 11 \cdot 5$$

läßt $8.5 : 12$ denselben Rest 4, also ist $h = 8$, und

$$x = 12n + 8$$

oder besser, $n - 1$ statt n setzend,

$$x = 12n - 4$$

dann weiter

$$y = 5n - 4$$

und diese Formen liefern für x

$$\ldots\ldots -16,\ -4,\ 8,\ 20,\ 32 \ldots\ldots$$

dazu gehörend für y

$$\ldots\ldots -9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11 \ldots\ldots$$

3) $5x + 9y = - 37.$

Hier ist

$$h = 2$$
$$x = 9n - 2$$
$$y = -(5n + 3).$$

4) $5x - 9y = - 37.$

$$h = - 2$$
$$x = 9n - 2$$
$$y = 5n + 3.$$

§. 24.

Die Auflösung, welche wir im vorigen Paragraphen entwickelt haben, läßt sich vermittelst der Kettenbrüche besser gestalten.

Der Bruch $\frac{b}{a}$ liefere, in einen Kettenbruch verwandelt, den Bruch $\frac{y^{\mathrm{I}}}{x^{\mathrm{I}}}$ als ihm zuletzt (oder zunächst) vorangehenden Partialbruch. Dann ist entweder

$$\alpha)\ ax^{\mathrm{I}} - by^{\mathrm{I}} = + 1$$

oder

$$\beta)\ ax^{\mathrm{I}} - by^{\mathrm{I}} = - 1.$$

Es ist $x^{\mathrm{I}} < b$, und fällt in Bezug auf die erfüllte Gleichung α) oder β) mit unserem Werth h zusammen: denn unter den Werthen, welche kleiner sind als b, nämlich von 1 bis b — 1, besteht nur einer für h. In Bezug auf eine der Gleichungen

$$\gamma)\ ax - by = \pm 1$$

ist demnach

$$1)\ x = bn + x^{\mathrm{I}}$$

und aus

$$a(bn + x^{\mathrm{I}}) - by = \pm 1$$
$$= ax^{\mathrm{I}} - by^{\mathrm{I}}$$

folgt

$$abn - by = - by^{\mathrm{I}}$$

also

$$2)\ y = an + y^{\mathrm{I}}.$$

Die Werthe 1) und 2) substituiren wir in γ); und es wird entweder

$$\delta)\ a(bn + x^{I}) - b(an + y^{I}) = + 1$$

oder

$$\varepsilon)\ a(bn + x^{I}) - b(an + y^{I}) = - 1$$

erfüllt werden. Lösen wir die Klammern, so hebt sich abn und es wird sichtbar, daß die Erfüllung ihren Grund in dem Umstande hat, daß entweder

$$\phi)\ ax^{I} - by^{I} = + 1$$

oder

$$\lambda)\ ax^{I} - by^{I} = - 1.$$

Sollte nun nicht + 1 oder − 1 sich ergeben, sondern ± c (d. h. soll ax − by gleich ± c sein), so hätte man nur nöthig das sich erfüllende ϕ) oder λ) beziehlich mit ± c oder ∓ c zu multipliciren; und denkt man diese Multiplication an x^{I} und y^{I} vollzogen, so erhellet, daß die Gleichung

$$ax - by = \pm c$$

erfüllt wird durch

$$x = bn + cx^{I}$$

und

$$y = an + cy^{I}$$

während in diesen Ausdrücken c, je nach den Umständen, positiv oder negativ zu nehmen ist.

Die Gleichung

$$ax + by = \pm c$$

zu lösen, setze man $y = - y^{I}$.

Beispiele.

1) $5x - 9x = - 37.$

$\frac{b}{a}$ ist gleich $\frac{9}{5}$ und es findet sich als nächst vorangehender Partialbruch $\frac{y^{I}}{x^{I}} = \frac{2}{1}$. Nun ist

$$5 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = + 1$$

also

$$x = 9n + (-37)2 = 9n - 74$$
$$y = 5n + (-37)1 = 5n - 37$$

oder indem man, um möglichst zu vereinfachen, $n + 8$ statt n setzt

$$x = 9n - 2$$
$$y = 5n + 3.$$

2) $5x + 9y = 37.$

Man setze $y = -y'$ und hat

$$5x - 9y' = 37$$

dann, wie zuvor, $\frac{y^{\mathrm{I}}}{x^{\mathrm{I}}} = \frac{2}{1}$, weiter

$$5 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = +1$$

demnach

$$x = 9n + 37 \cdot 2 = 9n + 74$$
$$y' = 5n + 37 \cdot 1 = 5n + 37$$

oder $n - 8$ statt n setzend

$$x = 9n + 2$$
$$y' = 5n - 3$$

und $$y = -y' = -5n + 3.$$

3) $8x - 3y = 19.$

Man findet $$\frac{y^{\mathrm{I}}}{x^{\mathrm{I}}} = \frac{1}{3}.$$

Dann ist

$$8 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -1$$
$$x = 3n - 19 = 3n + 2$$
$$y = 8n - 57 = 8n - 1.$$

4) $25x - 4y = -36.$

Man findet $$\frac{y^{\mathrm{I}}}{x^{\mathrm{I}}} = \frac{1}{6}$$

$$25 \cdot 1 - 4 \cdot 6 = +1$$
$$x = 4n - 36$$
$$y = 25n - 216$$

oder $n + 9$ statt n setzend

$$x = 4n$$
$$y = 25n + 9.$$

Man sieht hier den Gang der Auflösung dadurch nicht gestört, daß c theilbar ist durch b. Einfacher kommt man zur Lösung wenn man sofort $4n$ statt x setzt und y entwickelt.

Wir haben zu Anfange des §. 23 a und b als relative Primzahlen vorausgesetzt. Hätten a und b einen gemeinschaftlichen Theiler, natürlich ohne daß er in c steckte, so könnte der Gleichung

$$ax + by = c$$

nicht genügt werden durch Werthe von x und y, die ganze Zahlen sind. Denn es würde, durch den gemeinschaftlichen Theiler dividirt, die Gleichung zur rechten Seite einen Bruch erhalten, und dem könnte die zur Linken sich ergebende Summe nicht gleich werden durch ganze Zahlen, gesetzt statt x und y.

§. 25.

Wir schreiten fort zu der Gleichung

$$ax + by + cz = d$$

in welcher a, b, c, d ganze Zahlen vorstellen, um ihr zu genügen durch Werthe von x, y, z, die ganze Zahlen sind.

Es folgt

$$ax + by = d - cz.$$

Der Ausdruck d — cz ist eine ganze Zahl, welche ganze Zahl für z mag gesetzt werden. Sind daher a und b relative Primzahlen, so ist sofort nach Anleitung des vorigen Paragraphen

$$x = bn + (d - cz)x^{\mathrm{I}}$$

$$y = an + (d - cz)y^{\mathrm{I}}.$$

Statt z und n sind nun Null und beliebige ganze Zahlen zu setzen. d — cz, welches die Stelle von c im vorigen Paragraphen vertritt, ist, wie dort, positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Umstände es bedingen.

Wenn a, b und d einen gemeinschaftlichen Theiler t haben, der zugleich der größte Theiler zu a und b ist, so setze man

$$z = tz'$$

dividire die Gleichung

$$ax + by = d - ctz'$$

durch t und verfahre wie zuvor.

Beispiele.

1) $2x - 9y + 11z = 15.$

Es ergiebt sich

$$2x - 9y = 15 - 11z$$

$$\frac{y^{I}}{x^{I}} = \frac{1}{4}$$

$$2 \cdot 4 - 9 \cdot 1 = -1$$

$$x = 9n - (15 - 11z) \cdot 4$$

$$y = 2n - (15 - 11z) \cdot 1.$$

da hier mit $-c$ zu multipliciren ist (stets mit dem Entgegengesetzten von c). Um zu vereinfachen setzen wir $n + 7$ statt n, das liefert

$$x = 9n + 3 + 44z$$

$$y = 2n - 1 + 11z$$

$z = 0,\ n = 0$ liefert für x, y, z beziehlich	3,	-1,	0
$z = 0,\ n = 1$ liefert	12,	1,	0
$z = 1,\ n = 0$ liefert	47,	10,	1
$z = 1,\ n = 1$ liefert	56,	12,	1
$z = 2,\ n = 0$ liefert	91,	21,	2

u. s. w., u. s. w.

2) $15x + 21y + 35z = 207.$

15, 21 und 207 haben den Theiler 3 und er ist größter Theiler zu 15 und 21. Wir setzen deshalb $z = 3z'$ ferner $y = -y'$ und erhalten

$$5x - 7y' = 69 - 35z'$$

$$\frac{y^{I}}{x^{I}} = \frac{3}{2}$$

$$5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = +1$$

$$x = 7n + (69 - 35z')3$$

$$y' = 5n + (69 - 35z')2$$

oder

$$x = 7n + 4 - 105z'$$

$$y = -5n + 7 + 70z'$$

$$z = 3z'.$$

Die Erörterungen dieses Paragraphen lassen sich leicht auf Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten anwenden.

§. 26.

Es sind die Gleichungen

$$ax + by + cz = d$$
$$a'x + b'y + c'z = d'$$

gegeben, in welchen die Coefficienten ganze Zahlen vorstellen, und es sollen die Werthe von x, y, z ermittelt werden, welche ganze Zahlen sind und den Gleichungen genügen.

Es werde z eliminirt. Die sich ergebende Gleichung hat die Form

$$a''x + b''y = c''.$$

Aus ihr werde erhalten

$$1)\ x = b''n + c''x^{\mathrm{I}}$$
$$2)\ y = a''n + c''y^{\mathrm{II}}.$$

Diese Werthe in einer der ursprünglichen Gleichungen substituirt, gewähren eine Gleichung von der Form

$$a'''z + b'''n = c'''.$$

Ist a''' ein Theiler zu b''' und c''', so gewinnt man durch Division der Gleichung mit a''' sofort die Form von z, während x und y in 1) und 2) vorliegen. Ist a''' nicht Theiler zu b''' und c''', so bestimme man aus der Gleichung

$$3)\ z = b'''n' + c'''z^{\mathrm{I}}$$
$$n = a'''n' + c'''n^{\mathrm{I}}$$

und substituire in 1) und 2) den Werth von n; dadurch werden die Werthe von x und y in n' erhalten und z liegt in 3) vor.

Beispiele.

$$1)\ 3x + 5y + 7z = 560$$
$$9x + 25y + 49z = 2920.$$

Man eliminire x und es entsteht

$$5y + 14z = 620$$

5 ist Theiler zu 620, deshalb ist

$$z = 5n$$

und das giebt sofort

$$y = 124 - 14n.$$

Diese Werthe substituire man in der ersten Gleichung. Es entsteht

$$3x - 35n = -60$$

3 ist Theiler zu 60, also ist

$$n = 3n'$$

und das giebt

$$x = 35n' - 20$$

und weiter 3n' für n in den Werthen für y und z setzend

$$y = 15n'$$
$$z = 124 - 42n'$$

oder, wenn man die Marke als überflüssig unterdrückt

$$x = 35n - 20$$
$$y = 15n$$
$$z = 124 - 42n.$$

2) $3x + 5y + 7z = 307$
$5x + 7y + 9z = 503.$

Man eliminire x; es entsteht

$$2y + 4z = 13.$$

Die Coefficienten von y und z sind nicht relative Primzahlen. Durch ganze Zahlen kann also dieser Gleichung nicht genügt werden, und auch nicht den gegebenen Gleichungen.

3) $x + 2y + 3z = 25$
$5x + y - 2z = 13.$

Es entsteht

$$17x + 7y = 89$$
$$\frac{y^{\text{I}}}{x^{\text{I}}} = \frac{2}{5}$$
$$17 \cdot 2 - 7 \cdot 5 = -1$$
$$x = 7n - 89 \cdot 2 = 7n - 3$$
$$y = -y' = -17n + 5 \cdot 89 = -17n + 20$$

und diese Werthe in einer der gegebenen Gleichungen substituirt liefern sofort

$$z = 9n - 4.$$

Aehnlich, wenn p Gleichungen mit p + q Unbekannten vorliegen.

§. 27.

Dem technischen Zweck dieses Buches entspricht es nicht, die berührten Gegenstände weiter und gründlich zu verfolgen; nur einige Andeutungen, die zuweilen sich nützen lassen, mögen noch Platz finden.

§. 28.

Aufgabe. Alle zusammengehörigen ganzen Zahlen zu ermitteln, welche für x und y gesetzt, einer Gleichung von der Form

$$ax^2 + bxy + cx + dy + f = 0$$

entsprechen, unter den Coefficienten ganze Zahlen verstanden.

Auflösung. Man entwickele y; es entsteht

$$y = -\frac{ax^2 + cx + f}{bx + d}.$$

Bezeichnet n eine ganze Zahl, welche für x gesetzt, den Quotienten $-\frac{ax^2 + cx + f}{bx + d}$ in eine ganze Zahl q übergehen läßt, so sind n und q zwei ganze Zahlen, welche beziehlich für x und y gesetzt, der gegebenen Gleichung entsprechen. Es kommt daher nur darauf an, alle ganzen Zahlen aufzufinden, welche für x gesetzt, diesen Quotienten zu einer ganzen Zahl machen. Man dividire mit dem Divisor in den Dividend, während man jedes Glied der sich ergebenden Summe durch das Glied bx bestimmt; dadurch entsteht

$$-\frac{ax^2 + cx + f}{bx + d} = -\frac{a}{b}x - \frac{bc - ad}{b^2} + \frac{bcd - ad^2 - b^2f}{b^2(bx + d)}$$

$$= \frac{-abx - bc + ad + \frac{bcd - ad^2 - b^2f}{bx + d}}{b^2}.$$

Nun erhellet, daß alle ganzen Zahlen, welche, für x gesetzt, den Quotienten $-\frac{ax^2 + cx + f}{bx + d}$ zu einer ganzen Zahl machen, enthalten sind unter denjenigen ganzen Zahlen, welche, für x gesetzt, den Quotienten $\frac{bcd - ad^2 - b^2f}{bx + d}$ in eine ganze Zahl

übergehen lassen. Die verlangten Werthe von x wird man daher finden, wenn man zunächst alle ganzen Zahlen ermittelt, welche für x gesetzt, den Quotienten $\frac{bcd - ad^2 - b^2f}{bx + d}$ zu einer ganzen Zahl machen, und unter diesen wiederum diejenigen aussucht, für welche der Quotient $-\frac{ax^2 + cx + f}{bx + d}$ zu einer ganzen Zahl wird. Der Quotient $\frac{bcd - ad^2 - b^2f}{bx + d}$ bezeichnet eine ganze Zahl, sobald der Divisor ein Theiler zum Dividend ist. Man suche daher alle Theiler $t, t', t'' \ldots$ des Dividenden $bcd - ad^2 - b^2f$, setze den Divisor $bx + d$ gleich t und gleich $-t$, gleich t' und gleich $-t'$ u. s. f., und entwickele aus jeder von den Gleichungen, welche hierdurch erhalten werden, den Unbekannten x. Für x können sich ganze und gebrochene Zahlen ergeben. Die gebrochenen entsprechen der Aufgabe nicht. Unter den ganzen sind, wie schon erwähnt, diejenigen auszusuchen, welche den Quotienten $-\frac{ax^2 + cx + f}{bx + d}$ in eine ganze Zahl übergehen lassen; und die ganzen Zahlen, in welche dieser Quotient übergeht, sind die verlangten Werthe von y, zu denen einzeln die Werthe von x gehören, welche sie hervorbrachten.

Beispiel.

Alle zusammengehörigen ganzen Zahlen zu finden, welche statt x und y gesetzt, der Gleichung

$$5x^2 + 3xy - 35y + 7 = 0$$

genügen.

Man entwickele y, und es entsteht

$$y = -\frac{5x^2 + 7}{3x - 35}$$

oder wenn man dividirt

$$y = -\frac{5x}{3} - \frac{175}{9} - \frac{6188}{9(3x - 35)}$$

$$= \frac{1}{9}\left(-15x - 175 - \frac{6188}{3x - 35}\right).$$

Jetzt sind alle Theiler zu 6188 aufzusuchen. Diese zu finden, ermittele man zunächst die einfachen Faktoren, und es ist

$$6188 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17.$$

Die übrigen Theiler zu 6188 werden erhalten, wenn man alle möglichen Produkte aus je zweien, je dreien, je vieren der einfachen Theiler entwickelt. Und es ergeben sich die nicht einfachen Theiler

$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 7 \cdot 13 = 182$
$2 \cdot 7 = 14$	$2 \cdot 7 \cdot 17 = 238$
$2 \cdot 13 = 26$	$2 \cdot 13 \cdot 17 = 442$
$2 \cdot 17 = 34$	$7 \cdot 13 \cdot 17 = 1547$
$7 \cdot 13 = 91$	$2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13 = 364$
$7 \cdot 17 = 119$	$2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 17 = 476$
$13 \cdot 17 = 221$	$2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 17 = 884$
$2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$	$2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 = 3094$
$2 \cdot 2 \cdot 13 = 52$	$2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 = 6188$
$2 . 2 \cdot 17 = 68$	

Den Divisor $3x - 35$ setze man gleich einem jeden von den Faktoren zu 6188, sowohl während der Faktor positiv, als während er negativ genommen ist. Aus jeder der entstehenden Gleichungen entwickele man x; ergiebt sich für x eine ganze Zahl, so setze man dieselbe statt x in dem Quotienten

$$-\frac{5x^2 + 7}{3x - 35}$$

und geht auch dieser in eine ganze Zahl über, so sind diese ganze Zahl und jene für x gesetzte zwei zusammengehörige Zahlen, welche beziehlich für y und x gesetzt, der gegebenen Gleichung entsprechen.

Man setze also

$$3x - 35 = 1$$

daraus folgt

$$x = 12$$

und substituirt man 12 statt x in dem Quotienten $-\frac{5x^2 + 7}{3x - 35}$, welcher y ausdrückt, so entsteht

$$y = -727.$$

Es sind demnach $x = 12$ und $y = -727$ ein Paar zusammengehöriger Werthe, wie sie verlangt wurden.

Man setze ferner

$$3x - 35 = -1$$

daraus ist $$x = \frac{34}{3}.$$

Dieser Werth ist unbrauchbar.

Aus $$3x - 35 = 2$$

folgt $$x = \frac{37}{3}$$

welches ebenfalls unbrauchbar ist.

Aus $$3x - 35 = -2$$

entsteht $$x = 11.$$

Für $x = 11$ ist $y = -\frac{5x^2 + 7}{3x - 35} = 306.$

Und es sind $x = 11$ und $y = 306$ wiederum zwei verlangte Werthe.

Aus $$3x - 35 = 7$$

ergiebt sich $$x = 14$$

und dazu kommt $$y = -141.$$

Aus $$3x - 35 = -7$$

folgt $$x = \frac{28}{3}$$

welches unbrauchbar ist.

$3x - 35 = 13$ liefert $x = 16$, $y = -99$.

$3x - 35 = -13$ liefert keine brauchbaren Werthe.

$3x - 35 = 17$ liefert unbrauchbare Werthe.

$3x - 35 = -17$ giebt $x = 6$, $y = 11$.

$3x - 35 = 4$ giebt $x = 13$, $y = -213$.

$3x - 35 = -4$ ist unbrauchbar.

$3x - 35 = 14$ ebenfalls.

$3x - 35 = -14$ giebt $x = 7$, $y = 18$.

$3x - 35 = 26$ ist unbrauchbar.

$3x - 35 = -26$ giebt $x = 3$, $y = 2$.

U. s. f. U. s. f.

§. 29.

Aufgaben. 1) Die zusammengehörigen ganzen oder gebrochenen Zahlen anzugeben, welche statt x und y gesetzt, einer Gleichung von der Form

$$a^2x^2 + bx + c = y^2$$

deren Coefficienten ganze oder gebrochene Zahlen sind, entsprechen.

Auflösung. Man setze

$$y = ax + h$$

und substituire diesen Werth in die gegebene Gleichung; das liefert

$$a^2x^2 + bx + c = a^2x^2 + 2ahx + h^2$$

oder $$bx + c = 2ahx + h^2.$$

Hieraus folgt $$x = \frac{h^2 - c}{b - 2ah}.$$

Und wenn man in dem letztern Ausdruck statt h irgend eine ganze oder gebrochene Zahl setzt, so liefert er jedesmal einen verlangten Werth von x, und der dazu gehörige von y ist dann $ax + h$.

Z. B. $$4x^2 + 3x - 12 = y^2$$

hier ist $a = 2$, $b = 3$, $c = -12$, also

$$x = \frac{h^2 + 12}{3 - 4h}$$

und $$y = 2x + h.$$

Setzt man h gleich Null, so ist $x = 4$ und $y = 8$; setzt man $h = -1$, so ist $x = \frac{13}{7}$ und $y = \frac{19}{7}$ u. s. w.

2) Die zusammengehörigen ganzen oder gebrochenen Zahlen anzugeben, welche statt x und y gesetzt, einer Gleichung von der Form

$$ax^2 + bx + c^2 = y^2$$

deren Coefficienten ganze oder gebrochene Zahlen sind, entsprechen.

Auflösung. Man setze

$$y = c + hx$$

und substituire diesen Werth in die gegebene Gleichung. Es entsteht

$$ax^2 + bx + c^2 = c^2 + 2chx + h^2x^2$$

oder $$ax + b = 2ch + h^2x.$$

Hieraus folgt $$x = \frac{2ch - b}{a - h^2}.$$
Und dieser Ausdruck giebt verlangte Werthe von x, wenn man statt h beliebige ganze oder gebrochene Zahlen setzt, während die Werthe von y dann in $c + hx$ erhalten werden.

3) Die zusammengehörigen ganzen oder gebrochenen Zahlen anzugeben, welche statt x und y gesetzt, einer Gleichung von der Form
$$ax^2 + bx + c = y^2$$
genügen, vorausgesetzt, daß die Summe $ax^2 + bx + c$ in ein Produkt $(nx + q)(rx + v)$ zerlegt werden könne, in welchem die Ausdrücke n, q, r, v ganze oder gebrochene Zahlen sind.

Auflösung. Die Gleichung $ax^2 + bx + c = y^2$ ist wegen der Voraussetzung, daß $ax^2 + bx + c = (nx + q)(rx + v)$, gleichbedeutend mit der
$$(nx + q)(rx + v) = y^2.$$
Man setze
$$y = h(nx + q)$$
und substituire diesen Ausdruck in der vorigen Gleichung. Das liefert
$$(nx + q)(rx + v) = h^2(nx + q)^2$$
oder $$rx + v = h^2nx + h^2q.$$
Hieraus folgt $$x = \frac{h^2q - v}{r - h^2n}.$$
Dieser Ausdruck giebt die Werthe von x, wenn man statt h beliebige ganze oder gebrochene Zahlen setzt, und das zu jedem x gehörige y wird erhalten in $h(nx + q)$.

Z. B. $$6x^2 + 23x + 20 = y^2.$$
Die Summe $6x^2 + 23x + 20$ in Faktoren zu zerlegen, setze man
$$6x^2 + 23x + 20 = 6\left(x^2 + \frac{23}{6}x + \frac{20}{6}\right)$$
und zerlege die Summe $x^2 + \frac{23}{6}x + \frac{20}{6}$ in Faktoren. Man findet $$x^2 + \frac{23}{6}x + \frac{20}{6} = \left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)$$

also ist

$$6x^2 + 23x + 20 = 6\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = (2x + 5)(3x + 4).$$

Statt der gegebenen Gleichung darf man daher setzen

$$(2x + 5)(3x + 4) = y^2.$$

Nach der obern Auflösung ist

$$x = \frac{5h^2 - 4}{3 - 2h^2}$$

und dabei $$y = h(2x + 5).$$

Setzt man nun $h = 1$, so ergiebt sich $x = 1$ und $y = 7$; setzt man $h = 2$, so wird $x = -\frac{16}{5}$ und $y = -\frac{14}{5}$ u. s. f.

Es ist übrigens nicht jedesmal möglich, rationale Werthe für x und y anzugeben, welche einer Gleichung von der Form

$$ax^2 + bx + c = y^2$$

genügen.

§. 30.

Wenn für eine Gleichung, welche die Form

$$ax^2 + bx + c = y^2$$

hat, ein Paar zusammengehörige Werthe n und q von x und y ermittelt sind, lassen sich beliebig viele andere zusammengehörige Werthe folgendermaßen finden:

Man setze jeden der übrigen Werthe von x gleich $n + z$, jeden der übrigen Werthe von y gleich $q + hz$, und substituire diese Ausdrücke in der gegebenen Gleichung. Es entsteht

$$a(n + z)^2 + b(n + z) + c = (q + hz)^2$$

oder

$$an^2 + 2anz + az^2 + bn + bz + c = q^2 + 2hqz + h^2z^2.$$

Wegen der Voraussetzung, daß n und q zusammengehörige Werthe der gegebenen Gleichung sind, ist

$$an^2 + bn + c = q^2.$$

Diese Gleichung werde von der vorigen subtrahirt; das liefert

$$2anz + az^2 + bz = 2hqz + h^2z^2$$

oder durch z dividirt

$$2an + az + b = 2hq + h^2z.$$

Hieraus folgt $z = \frac{2hq - 2an - b}{a - h^2}$.

Nun ist aber $x = n + z$

oder für z den Werth gesetzt

$$x = \frac{2hq - an - h^2n - b}{a - h^2}$$

und $y = q + hz$

oder $y = \frac{aq + h^2q - 2ahn - bh}{a - h^2}$.

§. 31.

Aufgabe. Die zusammengehörigen ganzen oder gebrochenen Zahlen anzugeben, welche für x und y gesetzt, einer Gleichung von der Form

$$ax^2 + bx + c = dy^2 + fy$$

genügen, unter der Voraussetzung, daß die Coefficienten dieser Gleichung ganze oder gebrochene Zahlen sind.

Auflösung. Man entwickele einen der Unbekannten aus der Gleichung, etwa y; und es entsteht

$$y = \frac{-f \pm \sqrt{4adx^2 + 4bdx + 4cd + f^2}}{2d}.$$

Der Ausdruck für y ist rational, d. h. bezeichnet eine ganze oder eine gebrochene Zahl, sobald die Wurzel, welche er enthält, rational ist, d. h. die Summe, welche ihren Radicanden bildet, das Quadrat irgend einer ganzen oder gebrochenen Zahl z ausmacht. Man ermittele daher nach §. 29 die ganzen und gebrochenen Zahlen, welche für x und z gesetzt, der Gleichung

$$4adx^2 + 4bdx + 4cd + f^2 = z^2$$

entsprechen und man erhält die verlangten Werthe von x; die dazu gehörenden von y sind dann gleich $\frac{-f \pm z}{2d}$.

§. 32.

Aufgabe. Die ganzen Zahlen anzugeben, welche statt x, y und z gesetzt, der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

genügen.

Auflösung. Es ist $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$. Man setze $a=p^2$, $b=q^2$, und man hat

$$(p^2-q^2)^2+(2pq)^2=(p^2+q^2)^2.$$

Wird daher
$$x=p^2-q^2$$
$$y=2pq$$
$$z=p^2+q^2$$
genommen, unter p und q ganze Zahlen verstanden, so erhält man für x, y und z ganze Zahlen, welche der gegebenen Gleichung entsprechen.

Für $p=2$ und $q=1$ entsteht z. B. $x=3$, $y=4$, $z=5$; für $p=3$ und $q=2$ entsteht $x=5$, $y=12$, $z=13$ u. s. f.

Sind übrigens c, d, g drei Zahlen, so daß $c^2+d^2=g^2$, so ist, unter n irgend eine Zahl verstanden, auch $(nc)^2+(nd)^2=(ng)^2$, denn aus $c^2+d^2=g^2$ folgt $n^2c^2+n^2d^2=n^2g^2$.

Aehnlich löst sich die Aufgabe, für x, y, z ganze Zahlen anzugeben, welche der Gleichung
$$x^2-y^2=z^2$$
entsprechen.

Uebungen und Praktisches.

§. 33.

1) Die Zahl 100 in zwei Theile zu zerlegen, von denen der eine durch 7, der andere durch 11 theilbar ist.

Die Theile sind 56 und 44.

2) Die Zahl 100 in zwei Theile zu theilen, von welchen der eine durch 5 dividirt 2 zum Rest läßt, der andere durch 7 dividirt den Rest 4 liefert.

Die Theile sind 82 und 18, oder 47 und 53, oder 12 und 88.

3) Welche Zahlen sind durch 9 theilbar und lassen durch 14 dividirt 8 zum Rest?

Die Zahlen 36, 162, 288 u. s. w.; überhaupt alle Zahlen von der Form $126h + 36$, oder von der Form $126h - 90$. Beide Formen liefern dieselben Zahlen. Die letzte Form entsteht aus der ersten, wenn man $h - 1$ statt h setzt, die erste aus der letzten, wenn $h + 1$ statt h gesetzt wird. Das Setzen von $h \pm 1$ statt h ist zulässig, weil $h \pm 1$ immer eine ganze Zahl ist, so lange h eine ganze Zahl vorstellt. Man könnte noch andere Formen bilden, welche dieselben Zahlen liefern, dadurch, daß man $h \pm p$ statt h setzt, unter p eine ganze Zahl verstanden. Man wird aber der einfachsten Form den Vorzug geben, und das ist diejenige, in welcher der Ausdruck, der nicht mit h multiplicirt ist, nicht die Hälfte des Coefficienten von h übersteigt. In dem vorliegenden Beispiel ist $126h + 36$ die einfachste Form.

4) Welche Zahlen lassen durch 39 dividirt 16, und durch 56 dividirt 27 zum Rest?

Alle Zahlen von der Form $2184h - 1037$, als z. B. 1147, 3331, 5515, 7699 u. s. f.

5) Den Bruch $\frac{230}{77}$ als Summe zweier Brüche auszudrücken, von welchen der eine 7, der andere 11 zum Nenner hat.

Es ist $\frac{230}{77} = \frac{5}{7} + \frac{25}{11} = \frac{12}{7} + \frac{14}{11} = \frac{19}{7} + \frac{3}{11}$.

6) Welche Zahlen lassen durch 3, 7 und 10 dividirt beziehlich die Reste 2, 3 und 9?

Alle Zahlen von der Form $59 + 210h$. Z. B. 59, 269, 479, 689 u. s. f.

7) Man soll alle durch 7 theilbaren Zahlen angeben, welche durch 5, 6 und 8 dividirt, beziehlich 3, 1 und 5 zum Rest lassen.

Die Zahlen sind 133, 973, 1813, 2653 u. s. w., nämlich alle von der Form $133 + 840h$.

8) Jemand hat dreierlei Silber, nämlich 14löthiges, 11löthiges und 9löthiges; er bedarf 30 Mark 12löthigen Silbers; wie

können aus jenen Silbersorten diese 30 Mark 12löthigen Silbers gemischt werden?

Es sind 10, 12, 14, 16 oder 18 Mark vom 14löthigen Silber zu legiren, beziehlich mit 20, 15, 10, 5 oder 0 Mark vom 11löthigen und beziehlich mit 0, 3, 6, 9 oder 12 Mark vom 9löthigen.

9) Die Summe zweier Zahlen addirt zu ihrem Produkt giebt 79, welche Zahlen sind das?

0 und 79, oder 1 und 39, oder 3 und 19, oder 4 und 15, oder 7 und 9.

10) Die Summe zweier Zahlen soll gleich sein dem Produkt derselben; was für Zahlen sind das?

h und $\frac{h}{h-1}$. Z. B. 2 und 2, 3 und $\frac{3}{2}$, 4 und $\frac{4}{3}$ u. s. f.; $\frac{1}{2}$ und -1, $\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{2}$ u. s. f., u. s. f.

11) Die Summe zweier Zahlen verhält sich zu dem Produkt der Zahlen wie n : q; was für Zahlen sind das?

h und $\frac{qh}{nh-q}$.

12) Für welche Werthe von x und y wird die Summe $a^2x^2 + cy^2$ zu einem Quadrat?

Für $x = (c-1)h$ und $y = 2ah$; auch für $x = ch^2 - h_1{}^2$ und $y = 2ahh_1$. Die letztern Ausdrücke sind allgemeiner.

Man setze $a^2x^2 + cy^2 = (ax+n)^2 = a^2x^2 + 2anx + n^2$

und es folgt $y^2 = \frac{2ax+n}{c}n$.

Damit der letzte Ausdruck ein Quadrat werde, setze man

$$\frac{2ax+n}{c} = n$$

daraus ist $x = \frac{(c-1)n}{2a}$

oder, wenn man lieber $n = 2ah$ setzt,

$$x = (c-1)h$$

und dann $y = 2ah$.

Die allgemeinern Ausdrücke zu erhalten, schlage man zunächst denselben Weg ein, setze dann aber

$$\frac{2ax + n}{c} = \frac{h^2}{h_1{}^2} n.$$

Hieraus folgt $x = \frac{ch^2 - h_1{}^2}{2ah_1{}^2} n$

und wenn man lieber $n = 2ah_1{}^2$ setzt

$$x = ch^2 - h_1{}^2.$$

Es ist aber $y^2 = \frac{2ax + n}{c} . n$

oder $y^2 = \frac{h^2}{h_1{}^2} n^2$

also $y = \frac{h}{h_1} n$

und wird für n der obere Werth, nämlich $2ah_1{}^2$ gesetzt, so folgt $y = 2ahh_1$.

13) Für welche Werthe von x und y wird $a^2x^2 + bxy + cy^2$ zu einem Quadrat?

Für $x = h^2 - c$ und $y = b - 2ah$; auch für $x = h^2 - ch_1{}^2$ und $y = bh_1{}^2 - 2ahh_1$.

Man setze

$$a^2x^2 + bxy + cy^2 = (ax + hy)^2$$
$$= a^2x^2 + 2ahxy + h^2y^2$$

so folgt $bx + cy = 2ahx + h^2y$

$$x = \frac{(h^2 - c)y}{b - 2ah}.$$

Jetzt setze man $y = b - 2ah$

dann ist $x = h^2 - c$.

Will man die allgemeineren Ausdrücke bilden, so setze man $h = \frac{p}{q}$; dann folgt

$$x = \frac{\left(\frac{p^2}{q^2} - c\right)y}{b - 2a\frac{p}{q}}$$

oder Zähler und Nenner mit q^2 multiplicirt

$$x = \frac{(p^2 - cq^2)y}{bq^2 - 2apq}.$$

Hier setze man $y = bq^2 - 2apq$

dann ist $x = p^2 - cq^2$

und wenn man noch h statt p und h_1 statt q schreibt, so entstehn die obern Ausdrücke.

14) Welche Reste können bleiben, wenn man eine ganze Zahl, die ein Quadrat ist, durch 3, 4, 5 u. s. w. dividirt?

Die Division durch 3 geht entweder auf, oder es bleibt 1 als Rest. Die Division durch 4 geht ebenfalls entweder auf, oder läßt 1 als Rest. Bei der Division durch 5 können nur 0, 1, 4 sich als Reste ergeben. Die Reste für 6 sind 0, 1, 3, 4; die für 7 sind 0, 1, 2, 4; die für 8 sind 0, 1, 4; u. s. f.

Jede ganze Zahl ist entweder durch 3 theilbar, oder sie läßt durch 3 dividirt den Rest 1, oder den Rest 2. Jede ganze Zahl hat demnach eine der drei Formen

$$3h,\ 3h + 1,\ 3h + 2.$$

Werden alle ganzen Zahlen quadrirt, so entstehen alle Quadrate, die ganze Zahlen sind. Jede ganze Zahl, die ein Quadrat ist, muß daher von einer derjenigen drei Formen sein, welche hervorgehen, wenn man die vorstehenden drei Formen quadrirt. Die Quadrate der vorstehenden drei Formen sind

$$9h^2,\ 9h^2 + 6h + 1,\ 9h^2 + 12h + 4.$$

Hat nun eine ganze Quadratzahl die erste Form, so ist sie durch 3 theilbar, ist sie von einer der beiden anderen Formen, so läßt sie durch 3 dividirt 1 zum Rest. Denn es ist ja

$$9h^2 = 3 \cdot 3h^2$$
$$9h^2 + 6h + 1 = 3(3h^2 + 2h) + 1$$
$$9h^2 + 12h + 4 = 3(3h^2 + 4h + 1) + 1.$$

Hieraus erhellet, daß eine ganze Quadratzahl entweder durch 3 theilbar ist oder durch 3 dividirt den Rest 1 läßt, aber niemals durch 3 dividirt 2 zum Rest liefert. Ferner ersieht

sich, daß eine Quadratzahl, welche durch 3 theilbar ist, auch 9 zum Theiler hat.

Wir wollen noch darthun, daß ein Quadrat, welches eine ganze Zahl ist, durch 5 dividirt, einen der Reste 0, 1, 4 lassen muß. Das Verfahren für Untersuchungen ähnlicher Art wird dann leicht zu abstrahiren sein.

Jede ganze Zahl läßt, durch 5 dividirt, einen der Reste 0, 1, 2, 3, 4, hat daher eine der Formen

$$5h, \quad 5h+1, \quad 5h+2, \quad 5h+3, \quad 5h+4.$$

Wenn wir diese Formen quadriren, quadriren wir alle ganzen Zahlen, erhalten also alle Quadrate, welche ganze Zahlen sind, und deshalb muß eine ganze Quadratzahl jedesmal von einer der nachstehenden Formen sein

$$25h^2$$
$$25h^2+10h+1$$
$$25h^2+20h+4$$
$$25h^2+30h+9$$
$$25h^2+40h+16.$$

Diese Formen geben durch 5 dividirt der Reihe nach die Reste 0, 1, 4, 4, 1. Also liefert eine ganze Quadratzahl durch 5 dividirt keine anderen Reste als 0, 1 oder 4.

15) Welche Reste können sich ergeben, wenn eine ganze Zahl, die ein Kubus ist, durch 7, 8, 9 dividirt wird?

Bei der Division durch 7 die Reste 0, 1, 6; bei der durch 8 die Reste 0, 1, 3, 5, 7; bei 9 die Reste 0, 1, 8.

Drittes Kapitel.

Von den Binomial-Coefficienten.

§. 34.

Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n$, dessen Faktoren die n ersten Zahlen der Zahlenreihe sind, heißt die Fakultät von n, und wird bezeichnet durch

$$n!$$

Das Zeichen n! wird gelesen: n Fakultät

Es ist

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ u. s. f.}$$

Statt 1 setzt man zuweilen 1!, der Analogie gemäß.

Der Faktor 1 ist überflüssig. Man behält ihn indeß, weil n! mit ihm n Faktoren hat, außerdem wegen der allgemeinern Bedeutung der Fakultät. Eine Fakultät im weitern Sinne ist nämlich ein Produkt von der Form

$$a \cdot (a + d)(a + 2d)(a + 3d) \ldots .$$

Die oben erklärte Fakultät entsteht aus dieser, wenn sowohl a als d gleich 1 ist. Wir bedürfen der Fakultät nur in der zuerst gegebenen beschränkten Bedeutung.

§. 35.

Unter dem nten Binomial-Coefficienten aus einer Zahl a verstehen wir den Quotienten, welcher zum Dividend ein Produkt von n Faktoren hat, von denen der erste a, jeder folgende aber gleich dem vorhergehenden weniger 1 ist, und dessen Nenner in der Fakultät von n besteht. Die Zahl a ist beliebig, die Zahl n nothwendig eine positive ganze Zahl.

Der nte Binomial-Coefficient aus der Zahl a wird bezeichnet durch

$$a_n.$$

Das Zeichen a_n wird gelesen: a mit dem Zeiger n, a Zeiger n, oder a tief n. Der Ausdruck a heißt schlechthin die Zahl, der Ausdruck n der Zeiger.

Es ist z. B.

$$12_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495.$$

$$8_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)_3 = \frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-2\right)}{3!}$$

$$= \frac{3\cdot 1\cdot -1}{3!\,2^3} = -\frac{1}{16}.$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)_5 = \frac{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-3\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-4\right)}{5!}$$

$$= \frac{3\cdot(-1)\cdot(-5)\cdot(-9)\cdot(-13)}{5!\,4^5} = \frac{117}{8192}.$$

$$a_2 = \frac{a\cdot(a-1)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{3!}$$

$$a_4 = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)}{4!}$$

$$a_n = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)\ldots.(a-[n-1])}{n!}.$$

Man ist übereingekommen, Differenzen, welche als Faktoren des Dividenden oder des Divisors eines Binomial=Coefficienten vorkommen, nicht in Klammern zu schließen. Z. B.

$$a_n = \frac{a\cdot a-1\cdot a-2\cdot a-3\ldots\ldots a-(n-1)}{n!}.$$

Da der erste Faktor des Dividenden von a_n gleich a ist, der zweite gleich $a-1$, der dritte gleich $a-2$, u. s. f., so ist der siebente gleich $a-6$, der zehnte gleich $a-9$, allgemein der nte Faktor gleich $a-(n-1)$ oder gleich $a-n+1$. Dies möge man für die Folge bemerken. So ist z. B. der $(x+y)$te Faktor des Dividenden von a_n gleich $a-(x+y-1)$ der $(a+1)$ste Faktor gleich $a-(a+1-1)=0$ u. dergl. m.

Der Analogie gemäß ist $a_1 = \frac{a}{1} = a$.

§. 36.

Es ist $a_a = 1$.

Denn es ist

$$a_a = \frac{a \cdot a - 1 \cdot a - 2 \ldots . a - (a - 2) \cdot a - (a - 1)}{a!}$$

$$= \frac{a \cdot a - 1 \cdot a - 2 \ldots \ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots \ldots \ldots \ldots a - 1 \cdot a}.$$

Der Binomial-Coefficient a_a kann nur vorkommen, während a eine positive ganze Zahl ist.

Das Zeichen a_n wird in den folgenden Kapiteln häufig auch in anderer Bedeutung gebraucht werden.

§. 37.

Ein Binomial-Coefficient aus einer positiven ganzen Zahl a ist gleich Null, sobald der Zeiger n größer ist, als die Zahl a.

Da n größer als a ist, und dabei eine ganze Zahl, so kann n nicht kleiner sein als $a + 1$. Der Dividend von a_n hat also wenigstens $a + 1$ Faktoren. Der $(a + 1)$ste Faktor ist $a - (a + 1 - 1)$, und das ist 0. Deshalb ist der Dividend von a_n gleich 0, somit a_n selbst.

So ist z. B. $3_5 = 0$.

Denn es ist

$$3_5 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot - 1}{5!} = 0.$$

§. 38.

Es ist a_n niemals gleich Null, wenn a eine gebrochene oder eine negative Zahl vorstellt.

Ein Binomial-Coefficient ist nur dann gleich Null, wenn sein Dividend einen Faktor enthält, welcher Null ist. Der erste der Faktoren des Dividends von a_n ist a, jeder von den übrigen hat die Form $a - z$, unter z eine positive ganze Zahl verstanden. Der Ausdruck $a - z$ ist aber niemals Null, so lange a eine gebrochene oder eine negative Zahl ist, und z eine ganze positive.

§. 39.

Zwei Binomial-Coefficienten aus derselben Zahl sind einander gleich, wenn die Summe ihrer Zeiger gleich ist der Zahl.

Es ist

$$1) \quad \frac{(p + q)!}{p!\, q!} = (p + q)_p.$$

Man denke die Faktoren von $(p+q)!$ in folgender Ordnung

$$(p+q)(p+q-1)(p+q-2)\ldots\ldots 2\cdot 1$$

und hebe den links stehenden Quotienten durch $q!$. Im Zähler, der $p+q$ Faktoren enthält, bleiben alsdann p Faktoren, von welchen der erste $p+q$, und jeder folgende um 1 kleiner als der ihm vorangehende ist; im Nenner bleibt $p!$. Der links stehende Quotient geht demnach über in $(p+q)_p$.

Andererseits ist

$$2)\quad \frac{(p+q)!}{p!\,q!} = (p+q)_q.$$

welches erhellet, wenn man den links stehenden Quotienten durch $p!$ hebt.

Aus 1) und 2) folgt

$$(p+q)_p = (p+q)_q$$

und das ist das Gesetz.

Wir setzen $\qquad p+q=a$

so ist $\qquad q=a-p$

und substituiren in der gewonnenen Formel; es entsteht

$$a_p = a_{a-p}$$

oder, wenn man statt des Buchstaben p lieber n sieht

$$a_n = a_{a-n}$$

und diese Formel spricht dasselbe Gesetz aus.

Der Satz erheischt natürlich daß a eine positive ganze Zahl sei. Er wird mit Vortheil angewendet, sobald der Zeiger größer ist als die Hälfte der Zahl. Z. B.

$$12_8 = 12_4$$
$$5_3 = 5_2$$
$$10_7 = 10_3$$
$$9_8 = 9_1.$$

§. 40.

Es ist, unter a und b beliebige Zahlen verstanden,

$$(a+b)_n = a_n + a_{n-1}b + a_{n-2}b_2 + a_{n-3}b_3 + \ldots$$
$$+ a_3 b_{n-3} + a_2 b_{n-2} + ab_{n-1} + b_n.$$

Zuvörderst werde bemerkt, daß $(a+b)_{q+1}$ im Zähler wie im Nenner einen Faktor mehr hat, als $(a+b)_q$. Dieser Faktor

ist der $(q+1)$ste, also im Zähler $a+b-q$, im Nenner $q+1$. Demnach ist

$$(a+b)_q \cdot \frac{a+b-q}{q+1} = (a+b)_{q+1}.$$

Angenommen nun, es sei

$$(a+b)_q = a_q + a_{q-1}\,b + a_{q-2}\,b_2 + a_{q-3}\,b_3 + \ldots + b_q$$

so ist nach dem Vorbemerkten

$$(a+b)_{q+1} = (a_q + a_{q-1}\,b + \ldots + b_q) \cdot \frac{a+b-q}{q+1}.$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b-q}{q+1} &= \frac{a-q}{q+1} + \frac{b}{1} \cdot \frac{1}{q+1} \\
&= \frac{a-q+1}{q} \cdot \frac{q}{q+1} + \frac{b-1}{2} \cdot \frac{2}{q+1} \\
&= \frac{a-q+2}{q-1} \cdot \frac{q-1}{q+1} + \frac{b-2}{3} \cdot \frac{3}{q+1} \\
&= \frac{a-q+3}{q-2} \cdot \frac{q-2}{q+1} + \frac{b-3}{4} \cdot \frac{4}{q+1} \\
&\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&= \frac{a-1}{2} \cdot \frac{2}{q+1} + \frac{b-q+1}{q} \cdot \frac{q}{q+1} \\
&= \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{q+1} + \frac{b-q}{q+1}.
\end{aligned}$$

Mit diesen Ausdrücken der Reihe nach multiplicire man die oben eingeklammerten Glieder beziehlich der Reihe nach und es entsteht, das Vorbemerkte beachtend,

$$
\begin{aligned}
(a+b)_{q+1} = {} & a_{q+1} + a_q b \cdot \frac{1}{q+1} \\
& + a_q b \cdot \frac{q}{q+1} + a_{q-1} b_2 \cdot \frac{2}{q+1} \\
& + a_{q-1} b_2 \cdot \frac{q-1}{q+1} + a_{q-2} b_3 \cdot \frac{3}{q+1} \\
& + a_{q-2} b_3 \cdot \frac{q-2}{q+1} + \ldots \\
& + ab_q \cdot \frac{q}{q+1} \\
& + ab_q \cdot \frac{1}{q+1} + b_{q+1}
\end{aligned}
$$

also wenn man addirt:

$$(a+b)_{q+1} = a_{q+1} + a_q b + a_{q-1} b_2 + a_{q-2} b_3 + \ldots + ab_q + b_{q+1}.$$

Was wir oben im Wege der Annahme für $(a+b)_q$ gesetzt hatten entspricht dem aufgestellten, zu beweisenden Gesetz. Das hier erlangte Ergebniß für $(a+b)_{q+1}$ entspricht gleichfalls dem Gesetz. Wäre nun richtig, was wir für $(a+b)_q$ gesetzt haben, so wäre auch richtig, was sich für $(a+b)_{q+1}$ ergeben hat; d. h. gilt das Gesetz für irgend einen Zeiger, so gilt es für den folgenden um 1 größeren, dann, weil es für diesen gilt, wiederum für den folgenden u. s. f. Es ist aber

$$(a+b)_1 = a + b = a_1 + b_1.$$

Dies enspricht dem Gesetz; also gilt es für den Zeiger 1, und dann weiter für alle größeren.

§. 41.

Es ist, unter a eine beliebige Zahl verstanden,

$$a_n + a_{n-1} = (a+1)_n.$$

In der Formel liegt:

1) Die Summe zweier Binomial-Coefficienten, welche einerlei Zahlen haben, und deren Zeiger um 1 verschieden sind, ist gleich dem Binomial-Coefficienten, dessen Zahl um 1 größer ist, als die Zahl jener Binomial-Coefficienten, und dessen Zeiger der größere von den Zeigern jener ist.

2) Jeder Binomial-Coefficient läßt sich wiedergeben durch die Summe zweier Binomial-Coefficienten, von welchen jeder die um 1 verminderte Zahl des ersten zur Zahl, und der eine den Zeiger des ersten, der andere den um 1 verminderten Zeiger des ersten hat.

Das Gesetz entspringt sofort aus dem vorigen Paragraphen, wenn man dort 1 statt b setzt und beachtet, daß nach §. 37 $b_n = 0$ ist, wenn b eine ganze Zahl vorstellt und n größer ist als b.

Setzt man oben $n+1$ statt n, so erhält die Formel die gleichbedeutende Gestalt

$$a_{n+1} + a_n = (a+1)_{n+1}.$$

Beispiele.

$$6_3 + 6_2 = 7_3$$

$$\left(\frac{3}{8}\right)_9 + \left(\frac{3}{8}\right)_8 = \left(\frac{11}{8}\right)_9$$

$$(-5)_3 + (-5)_2 = (-4)_3$$

$$12_5 = 11_5 + 11_4$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_6 + \left(-\frac{1}{2}\right)_5 = \left(\frac{1}{2}\right)_6.$$

§. 42.

Es ist $a_0 = 1$, für jeden Werth von a.

Nach dem vorstehenden Paragraphen ist $a_1 + a_{1-1} = (a+1)_1$ oder $a + a_0 = a + 1$, folglich $a_0 = 1$.

§. 43.

Es ist, unter a eine beliebige Zahl verstanden,

$$(a+1)_{n+1} = a_n + (a-1)_n + (a-2)_n + (a-3)_n + \ldots + (a-q)_n + (a-q)_{n+1}.$$

Die Anzahl der rechts stehenden Glieder ist $q + 2$, und es darf q beliebig groß genommen werden.

Nach §. 41 ist

$$(a+1)_{n+1} = a_n + a_{n+1}$$
$$a_{n+1} = (a-1)_n + (a-1)_{n+1}$$
$$(a-1)_{n+1} = (a-2)_n + (a-2)_{n+1}$$
$$(a-2)_{n+1} = (a-3)_n + (a-3)_{n+1}$$

u. s. f., und wenn man in der ersten Gleichung statt a_{n+1} den Werth aus der zweiten Gleichung setzt, dann wieder für $(a-1)_{n+1}$, den Werth aus der dritten Gleichung substituirt u. s. f., entsteht nach einander

$$(a+1)_{n+1} = a_n + (a-1)_n + (a-1)_{n+1}$$
$$(a+1)_{n+1} = a_n + (a-1)_n + (a-2)_n + (a-2)_{n+1}$$
$$(a+1)_{n+1} = a_n + (a-1)_n + (a-2)_n + (a-3)_n + (a-3)_{n+1}$$

u. s. f., u. s. f.

$$(a+1)_{n+1} = a_n + (a-1)_n + \ldots + (a-q)_n + (a-q)_{n+1}$$

und es erhellet, daß die Anzahl der rechts stehenden Glieder $q + 2$ ist, und daß man q beliebig groß nehmen darf.

Es ist $(-1)_n + (-2)_n + (-3)_n + \ldots (-a)_n = (-a)_{n+1}$
woraus folgt, wenn man oben $a = 0$ setzt, $q = a$.

§. 44.

Es ist unter a eine ganze Zahl verstanden,

$$n_n + (n+1)_n + (n+2)_n + \dots + (a-2)_n + (a-1)_n + a_n = (a+1)_{n+1}.$$

Nach dem vorigen Paragraph ist für jede Zahl a

$$(a+1)_{n+1} = a_n + (a-1)_n + \dots + (a-q)_n + (a-q)_{n+1}.$$

Man nehme hierin a als eine ganze Zahl an, und setze $q = a - n$, so wird $(a-q)_n = [a-(a-n)]_n = n_n$ und $(a-q)_{n+1} = n_{n+1} = 0$, und es entsteht der Satz.

So ist z. B.

1) $3_3 + 4_3 + 5_3 = 6_4$
2) $3_3 + 4_3 + 5_3 + 6_3 = 7_4$
3) $3_3 + 4_3 + 5_3 + 6_3 + 7_3 = 8_4$
4) $2_2 + 3_2 + 4_2 + 5_2 + 6_2 + 7_2 + 8_2 + 9_2 = 10_3$
5) $1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = 1_1 + 2_1 + 3_1 + \dots + (n-1)_1 = n_2.$

§. 45.

Ist a eine ganze Zahl, so ist a_n eine ganze Zahl; oder Null, nach §. 37, wenn a positiv und $n > a$ ist.

Es sei zuerst a positiv.

Von irgend zwei auf einander folgenden Zahlen der Zahlenreihe ist jedesmal die eine durch 2 theilbar; deshalb ist a_2 eine ganze Zahl.

Die Summanden der Summe

$$2_2 + 3_2 + \dots + (a-1)_2$$

sind nach dem Vorigen ganze Zahlen, somit bezeichnet die Summe selbst eine ganze Zahl. Die Summe ist aber nach §. 44 gleich a_3, folglich ist a_3 eine ganze Zahl.

Jetzt ist einleuchtend, daß die Summe

$$3_3 + 4_3 + \dots + (a-1)_3$$

ganze Zahlen zu Summanden hat, also selbst eine ganze Zahl vorstellt. Die Summe ist gleich a_4, also ist auch a_4 eine ganze Zahl.

Ist aber a_4 eine ganze Zahl, so folgt, wie oben, daß a_5

eine ganze Zahl bezeichnet, u. s. f., u. s. f., daß a_n eine ganze Zahl ist.

Eben so erhellet das Gesetz, wenn a negativ ist.

Uebungen und Praktisches.

§. 46.

1) Was verstehen wir unter der Fakultät von n, und wie wird sie bezeichnet? Was ist ein Binomial-Coefficient, und wie wird er bezeichnet? Was ist a_a? Wann ist a_n gleich Null? Ist jeder Binomial-Coefficient gleich Null, wenn der Zeiger größer ist, als die Zahl? Wann sind zwei Binomial-Coefficienten aus derselben positiven ganzen Zahl einander gleich? Was ist a_0? Was darf man statt $a_n + a_{n-1}$ setzen? Was ist $1_n + 2_n + 3_n + \dots + x_n$? Wie drückt sich $(a + b)_n$ durch die Binomial-Coefficienten aus a und b aus?

2) Die ganzen Zahlen, welche a_n liefert, während a eine ganze Zahl ist, und für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 .... a — 1, a gesetzt werden, kommen in der Folge zur Anwendung, und am häufigsten, während a eine von den ersteren Zahlen der Zahlenreihe vorstellt. Deshalb berechne man folgende Tabelle:

Zahl.	Zeiger. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Binomial-Coefficient.

Zahl.	Zeiger. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	ꝛc.	Binomial-Coefficient.
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	ꝛc.	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	ꝛc.	
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	ꝛc.	
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	ꝛc.	
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	ꝛc.	
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	ꝛc.	

3) Man berechne ferner

$$(-2)_2 = 3 \quad (-3)_2 = 6 \quad (-4)_2 = 10 \quad (-5)_2 = 15$$
$$(-2)_3 = -4 \quad (-3)_3 = -10 \quad (-4)_3 = -20 \quad (-5)_3 = -35$$
$$(-2)_4 = 5 \quad (-3)_4 = 15 \quad (-4)_4 = 35 \quad (-5)_4 = 70$$
$$(-2)_5 = -6 \quad (-3)_5 = -21 \quad (-4)_5 = -56 \quad (-5)_5 = -126$$
$$(-2)_6 = 7 \quad (-3)_6 = 28 \quad (-4)_6 = 84 \quad (-5)_6 = 210$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w. u. s. w.

$$\left(\frac{1}{2}\right)_2 = -\frac{1}{2\cdot4} = -\frac{1}{8} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)_2 = -\frac{1}{9}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)_3 = \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6} = \frac{1}{16} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)_3 = \frac{5}{81}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)_4 = -\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8} = -\frac{5}{128} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)_4 = -\frac{10}{243}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)_5 = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10} = \frac{7}{256} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)_5 = \frac{22}{729}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)_6 = -\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12} = -\frac{21}{1024} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)_6 = -\frac{154}{6561}$$

u. s. w. u. s. w.

$$\left(\frac{1}{4}\right)_2 = -\frac{3}{32} \qquad \left(\frac{1}{5}\right)_2 = -\frac{2}{25}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)_3 = \frac{7}{128} \qquad \left(\frac{1}{5}\right)_3 = \frac{6}{125}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)_4 = -\frac{77}{2048} \qquad \left(\frac{1}{5}\right)_4 = -\frac{21}{625}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)_5 = \frac{231}{8192}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)_6 = -\frac{1463}{65536}$$

u. s. w.

$$\left(\frac{1}{5}\right)_5 = \frac{399}{15625}$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)_6 = -\frac{1596}{78125}$$

u. s. w.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)_3 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{5}{16}$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)_4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{35}{128}$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)_5 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = -\frac{63}{256}$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)_6 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{231}{1024}$$

u. s. w.

$$\left(-\frac{1}{3}\right)_2 = \frac{2}{9}$$
$$\left(-\frac{1}{3}\right)_3 = -\frac{14}{81}$$
$$\left(-\frac{1}{3}\right)_4 = \frac{35}{243}$$
$$\left(-\frac{1}{3}\right)_5 = -\frac{91}{729}$$
$$\left(-\frac{1}{3}\right)_6 = \frac{728}{6561}$$

u. s. w.

$$\left(-\frac{1}{4}\right)_2 = \frac{5}{32}$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right)_3 = -\frac{15}{128}$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right)_4 = \frac{195}{2048}$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right)_5 = -\frac{663}{8192}$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right)_6 = \frac{4641}{65536}$$

u. s. w.

$$\left(-\frac{1}{5}\right)_2 = \frac{3}{25}$$
$$\left(-\frac{1}{5}\right)_3 = -\frac{11}{125}$$
$$\left(-\frac{1}{5}\right)_4 = \frac{44}{625}$$
$$\left(-\frac{1}{5}\right)_5 = -\frac{924}{15625}$$
$$\left(-\frac{1}{5}\right)_6 = \frac{4004}{78125}$$

u. s. w.

4) $$(-a)_2 = \frac{-a \cdot -(a+1)}{2!} = \frac{a \cdot a+1}{2!} = (a+1)_2$$
$$(-a)_3 = -(a+2)_3$$
$$(-a)_4 = (a+3)_4$$
$$(-a)_5 = -(a+4)_5$$
$$(-a)_6 = (a+5)_6$$
$$(-a)_{2n} = (a+2n-1)_{2n}$$
$$(-a)_{2n+1} = -(a+2n)_{2n+1}.$$

Das Gesetz, welches in den beiden letzten Formeln liegt, läßt sich wiedergeben durch

$$(-a)_n = (-1)^n (a + n - 1)_n$$

5) $$\left(\frac{p}{q}\right)_n = \frac{p\cdot(p-q)\cdot(p-2q)\cdot(p-3q)\ldots(p-[n-1]q)}{n!\cdot q^n}$$

$$\left(-\frac{p}{q}\right)_n = \pm\frac{p\cdot(p+q)\cdot(p+2q)\cdot(p+3q)\ldots(p+[n-1]q)}{n!\,q^n}$$

und hier gilt +, wenn n eine gerade, —, wenn n eine ungerade Zahl ist. Dasselbe wird ausgedrückt, wenn man setzt

$$\left(-\frac{p}{q}\right)_n = (-1)^n\cdot\frac{p\cdot(p+q)\ldots\ldots(p+[n-1]q)}{n!\,q^n}$$

Viertes Kapitel.

Von den Progressionen.

§. 47.

Jede Reihe von Zahlen, welche sich unter die Form

$$a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad a+4d \ldots .$$

bringen läßt, heißt eine *arithmetische Reihe* oder eine *arithmetische Progression*, auch eine *arithmetische Reihe der ersten Ordnung*, eine *einfache* arithmetische Progression. Die Buchstaben a und d stellen beliebige Zahlen vor. Die Reihe heißt *zunehmend* oder *steigend*, wenn d eine positive, *abnehmend* oder *fallend*, wenn d eine negative Zahl ist. Die Ausdrücke a, a + d, a + 2d, a + 3d .... heißen die *Glieder* der Reihe, und beziehlich das erste, zweite, dritte, vierte u. s. w. Glied; der Ausdruck d wird die *Differenz* der Reihe genannt. Die Differenz d ergiebt sich jedesmal, wenn man irgend ein Glied von dem nächstfolgenden subtrahirt.

Die sämmtlichen Glieder einer arithmetischen Progression, sind bestimmt, sobald das erste Glied der Reihe gegeben ist und die Differenz.

Eine vorgelegte Reihe ist eine arithmetische Progression, wenn die Subtraction eines jeden Gliedes von dem nächstfolgenden überall dieselbe Differenz liefert.

Die Reihen

2	7	12	17	22	27....	
—8	—5	—2	1	4	7	10....
22	13	4	—5	—14	—23....	

sind z. B. arithmetische Reihen. Die Differenz der ersten ist 5, die der zweiten 3, die der dritten ist —9.

§. 48.

Das erste Glied einer arithmetischen Progression sei a, die Differenz d, das nte Glied sei durch q, die Summe der ersten n Glieder durch s bezeichnet: dann ist

$$\text{I.} \quad q = a + (n - 1)d$$

$$\text{II.} \quad s = na + n_2 d.$$

Die erste Formel ergiebt sich sofort aus der Ansicht der Reihe. Alsdann ist

$$s = a + a + d + a + 2d + a + 3d + \ldots. + a + (n - 1)d$$
$$= na + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)]d$$
$$= na + n_2 d$$

weil nach §. 44 Beispiel 5) die eingeklammerte Summe gleich n_2 ist.

Es ist

$$na + n_2 d = na + \frac{n \cdot n - 1}{2} d$$
$$= \frac{[2a + (n - 1)d]n}{2}$$
$$= \frac{[a + a + (n - 1)d]n}{2}$$
$$= \frac{(a + q)n}{2}.$$

Daher hat man auch

$$s = \frac{[2a + (n - 1)d]n}{2}$$

$$s = \frac{(a + q)n}{2}$$

zwei Formen, die man, ihres öfteren Gebrauchs wegen merken möge. Die erstere ist nur eine Umgestaltung von II.

Die letzte Formel läßt sich leicht geradezu ableiten. Es ist nämlich

$$s = a + a + d + a + 2d + \dots + q - 2d + q - d + q$$
$$s = q + q - d + q - 2d + \dots + a + 2d + a + d + a$$

also, wenn man addirt,

$$2s = (a + q)n$$
$$s = \frac{(a + q)n}{2}.$$

Beispiele.

1) Das 60ste Glied der Reihe 2, 7, 12, 17 .... anzugeben. Es ist $a = 2$, $d = 5$, $n = 60$, also $q = 2 + 59 \cdot 5 = 297$.

2) Die Summe der ersten 20 Glieder der Reihe -8, -5, -2, 1 .... zu bestimmen. Hier ist $a = -8$, $d = 3$, $n = 20$, also

$$s = \frac{[2 \cdot (-8) + 19 \cdot 3]20}{2} = 410.$$

3) Die Summe der ersten 100 Zahlen der Zahlenreihe zu berechnen. Hier ist $a = 1$, $q = 100$, $n = 100$, daher

$$s = \frac{(1 + 100)100}{2} = 5050.$$

§. 49.

Die beiden Formeln im vorigen Paragraphen können als algebraische Gleichungen betrachtet werden, welche zwischen den Ausdrücken a, d, n, q, s Statt finden. Zwei Gleichungen bestimmen zwei Unbekannte; wenn daher von den fünf Ausdrücken a, d, n, q, s drei gegeben sind, lassen sich die beiden anderen finden. Und wenn man je drei von den fünf Ausdrücken a, d, n, q, s als gegeben nimmt, und jedesmal die beiden anderen entwickelt, ergeben sich die Resultate, welche die folgende Tabelle enthält. Sie lösen alle Aufgaben, welche bei diesen Reihen sich stellen lassen.

	Gegeben	Gesucht	Formel
1)	a, d, n	q	$q = a + (n - 1)d$
2)	a, d, s		$q = \frac{-d \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8ds}}{2}$
3)	a, n, s		$q = \frac{2s - an}{n}$
4)	d, n, s		$q = \frac{n(n - 1)d + 2s}{2n}$
5)	a, d, n	s	$s = \frac{[2a + (n - 1)d]n}{2}$
6)	a, d, q		$s = \frac{(q + a)(q - a + d)}{2d}$
7)	a, n, q		$s = \frac{(a + q)n}{2}$
8)	d, n, q		$s = \frac{[2q - (n - 1)d]n}{2}$
9)	a, n, q	d	$d = \frac{q - a}{n - 1}$
10)	a, n, s		$d = \frac{2(s - an)}{n(n - 1)}$
11)	a, q, s		$d = \frac{(q + a)(q - a)}{2s - (q + a)}$
12)	n, q, s		$d = \frac{2(nq - s)}{n(n - 1)}$
13)	a, d, q	n	$n = \frac{d - a + q}{d}$
14)	a, d, s		$n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{(d - 2a)^2 + 8ds}}{2d}$
15)	a, q, s		$n = \frac{2s}{a + q}$
16)	d, q, s		$n = \frac{d + 2q \pm \sqrt{(d + 2q)^2 - 8ds}}{2d}$

	Gegeben	Gesucht	Formel
17)	d, n, q	a	$a = q - (n - 1)d$
18)	d, n, s		$a = \frac{2s - n(n - 1)d}{2n}$
19)	d, q, s		$a = \frac{d \pm \sqrt{(d + 2q)^2 - 8ds}}{2}$
20)	n, q, s		$a = \frac{2s - nq}{n}$

§. 50.

Unter der **Stellenzahl** des nten Gliedes irgend einer Reihe versteht man die Zahl n. So ist 1 die Stellenzahl des ersten Gliedes, 2 die Stellenzahl des zweiten Gliedes u. s. f.

Der Begriff der arithmetischen Progression läßt sich dahin erweitern, daß man Glieder erhält, welche negativen ganzen, und positiven oder negativen gebrochenen Stellenzahlen angehören.

Bei einer arithmetischen Progression

$$a \quad a + d \quad a + 2d \quad a + 3d \ldots.$$

deren Stellenzahlen

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots.$$

sind, nimmt, von der Linken zur Rechten gehend, jedes Glied um d zu, während die zugehörige Stellenzahl um 1 wächst, von der Rechten zur Linken gehend, nehmen deshalb die Glieder um d, die Stellenzahlen um 1 ab. Man führe die Progression links weiter, indem man jedes neue Glied gleich dem vorangehenden weniger d, jede neue Stellenzahl gleich der vorangehenden weniger 1 nimmt. Dadurch geht folgende Progression

$$\ldots. a - 3d \quad a - 2d \quad a - d \quad a \quad a + d \quad a + 2d \quad a + 3d \ldots.$$

mit den Stellenzahlen

$$\ldots. \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots.$$

hervor, und sie hat Glieder, welche negativen ganzen Stellenzahlen angehören.

Die Formel $q = a + (n - 1)d$ behält Giltigkeit für arithmetische Progressionen mit Gliedern, deren Stellenzahlen negative

ganze Zahlen sind. Es erhellet nämlich ohne Weiteres, daß das $(-n)$te Glied gleich ist $a+(-n-1)d$. So ist z. B. das -2te Glied gleich $a+(-2-1)d = a-3d$.

Das nte Glied und das $(n+1)$ste unserer arithmetischen Reihe sind

$$a+(n-1)d \qquad a+nd$$

ihre Stellenzahlen $\qquad n \qquad n+1$

Die Differenz d theile man in p gleiche Theile, und schalte zwischen diesen beiden Gliedern neue Glieder ein, deren erstes gleich sei dem nten Gliede $a+(n-1)d$ vermehrt um $\frac{1}{p}d$, deren zweites gleich sei dem ersten vermehrt um $\frac{1}{p}d$ u. s. f. Dadurch entsteht:

$$a+(n-1)d \quad a+(n-1)d+\frac{1}{p}d \quad a+(n-1)d+\frac{2}{p}d$$

$$a+(n-1)d+\frac{3}{p}d+\ldots a+(n-1)d+\frac{p-1}{p}d \quad a+nd$$

oder

$$a+(n-1)d \quad a+\left(n+\frac{1}{p}-1\right)d \quad a+\left(n+\frac{2}{p}-1\right)d \ldots.$$

$$a+\left(n+\frac{p-1}{p}-1\right)d \quad a+nd.$$

Den eingeschalteten Gliedern gebe man die Stellenzahlen

$$n+\frac{1}{p} \quad n+\frac{2}{p} \ldots. n+\frac{p-1}{p}$$

und man hat Glieder, welche gebrochenen Stellenzahlen entsprechen. Solches Einschalten kann auch zwischen dem $(-n)$ten und $-(n+1)$sten Gliede Statt finden. Es erhellet leicht, daß die Formel $q = a+(n-1)d$ auch für Glieder mit gebrochenen Stellenzahlen gilt. Wenn die Differenz der eingeschalteten Glieder $\frac{1}{p}d$ beträgt, ist die Anzahl der eingeschalteten Glieder $p-1$; soll man daher x Glieder einschalten, so muß die Differenz der-

selben gleich $\frac{1}{x+1}d$ genommen werden. Und soll man das Glied bilden, dessen Stellenzahl $r + \frac{v}{h}$ ist, so schalte man zwischen dem rten und $(r+1)$sten Gliede $h - 1$ Glieder ein: das vte derselben ist das verlangte. Das Glied wird übrigens unmittelbar nach der Formel $q = a + (n-1)d$ erhalten, wenn man $r + \frac{v}{h}$ für n setzt; überhaupt sind die neuen Glieder nach dieser Formel gebildet.

Für einschalten ist der Ausdruck interpoliren im Gebrauch, und man nennt die eingeschalteten Glieder interpolirte Glieder.

Es sei z. B. gegeben die arithmetische Reihe

3 15 27 39 51 ....

man soll zwischen dem zweiten und dritten Gliede 5 Glieder interpoliren. Die Differenz der gegebenen arithmetischen Reihe ist 12; die Differenz der interpolirten Glieder ist $\frac{1}{6}12$ zu nehmen; und diese Glieder sind 17 19 21 23 25.

Es sei ferner die arithmetische Reihe

9 16 23 30 37 ....

gegeben, man soll das Glied bestimmen, dessen Stellenzahl $16\frac{2}{3}$ ist. Das verlangte Glied ist gleich $9 + (16\frac{2}{3} - 1)7$ oder $118\frac{2}{3}$.

§. 51.

Unter der ersten Differenzen-Reihe irgend einer gegebenen Reihe a, b, c, d .... wird die Reihe der Reste verstanden, welche hervorgehen, wenn man das erste Glied a vom zweiten b, das zweite b vom dritten c u. s. f. subtrahirt. Die erste Differenzen-Reihe der ersten Differenzen-Reihe heißt die zweite Differenzen-Reihe der gegebenen Reihe a, b, c, d ....; die erste Differenzen-Reihe der zweiten Differenzen-Reihe wird die dritte Differenzen-Reihe der gegebenen Reihe genannt, u. s. f. Z. B.

Gegebene Reihe	4	6	9	16	32	66	133	250
1ste Differenzen-Reihe	2	3	7	16	34	67	117	
2te Differenzen-Reihe	1	4	9	18	33	50		
3te Differenzen-Reihe	3	5	9	15	17			
u. s. w.	u. s. w.							

§. 52.

Eine Reihe heißt eine arithmetische Reihe von der nten Ordnung oder vom nten Grade, wenn die Glieder ihrer nten Differenzen-Reihe sämmtlich einander gleich, aber nicht 0 sind; sie wird dabei eine höhere arithmetische Reihe genannt, wenn n größer ist als 1.

Mit der arithmetischen Reihe der ersten Ordnung haben wir uns bereits beschäftigt.

Die Reihe

7 10 15 22 31 42

z. B. ist von der zweiten Ordnung, denn ihre Differenzen-Reihen sind

3 5 7 9 11

2 2 2 2

Die Reihe

1 5 11 20 33 51 75

ist von der dritten Ordnung; ihre Differenzen-Reihen sind

4 6 9 13 18 24

2 3 4 5 6

1 1 1 1

Ist eine höhere arithmetische Progression von der nten Ordnung, so ist ihre erste Differenzen-Reihe eine arithmetische Progression von der (n — 1)sten Ordnung, ihre zweite Differenzen-Reihe von der (n — 2)ten Ordnung u. s. f., ihre qte Differenzen-Reihe eine arithmetische Progression von der (n — q)ten Ordnung.

Das erste, zweite, dritte u. s. w. nte Glied einer höheren arithmetischen Reihe bezeichnen wir im Allgemeinen durch

$$a \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \ldots\ldots a_n$$

die Glieder der ersten Differenzen-Reihe durch

$$b \quad b_2 \quad b_3 \ldots\ldots$$

die dritte Differenzen-Reihe durch

$$c \quad c_2 \quad c_3 \ldots\ldots$$

u. s. f. Eine arithmetische Reihe höherer Ordnung mit ihren Differenzen-Reihen stellen wir hiernach folgendermaßen dar

$$\begin{array}{c} a \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \ldots\ldots a_n \\ b \quad b_2 \quad b_3 \ldots\ldots b_{n-1} \\ c \quad c_2 \ldots\ldots c_{n-2} \end{array}$$

u. s. f.

Die Ziffern sind hier nur Stellenzahlen, nicht Zeiger. Kommen in der Folge Binomial-Coefficienten vor, so werden wir das ausdrücklich bemerken, wenn es nicht von selbst in die Augen springt. Ueberhaupt sind in diesen und den späteren Gegenständen die Bezeichnungen nicht immer allgemein übliche, noch frei von Mehrdeutigkeit, so daß Vorsicht nothwendig wird.

§. 53.

Das nte Glied einer arithmetischen Reihe von irgend einer Ordnung ist gleich der Summe des ersten Gliedes der Reihe selbst und der ersten n — 1 Glieder ihrer ersten Differenzen-Reihe.

Es ist

$$\begin{array}{lcl} a_2 - a & = & b \\ a_3 - a_2 & = & b_2 \\ a_4 - a_3 & = & b_3 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_n - a_{n-1} & = & b_{n-1}. \end{array}$$

Man addire diese Gleichungen, und es entsteht

$$a_n - a = b + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1}$$

oder

$$a_n = a + b + b_2 + b_3 + \ldots b_{n-1}$$

und das ist der Satz.

§. 54.

Es ist

$$\text{I} \quad a_n = a + b(n-1) + c(n-1)_2 + d(n-1)_3 + \ldots$$

und, unter S_n die Summe der ersten n Glieder verstanden,

$$\text{II } S_n = an + bn_2 + cn_3 + dn_4 + \dots$$

Die Ausdrücke $(n-1)_2$, $(n-1)_3$, ... n_2, n_3, ... stellen Binomial-Coefficienten vor.

Die Summen zur Rechten brechen ab, entweder indem die Differenzen-Reihen aufhören, oder indem die Zeiger in den Binomial-Coefficienten größer werden als die Zahl (§. 37).

Wir erweisen die Formeln zunächst für Reihen der zweiten Ordnung. Die Reihe ist dann

$$\begin{array}{ccccc} a & a_2 & a_3 & a_4 \dots\dots & a_n \\ & b & b_2 & b_3 \dots\dots & b_{n-1} \\ & & c & c \dots\dots & c \end{array}$$

Die Glieder der zweiten Differenzen-Reihe sind einander gleich, und die erste Differenzen-Reihe ist eine einfache arithmetische Progression.

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$a_n = a + b + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1}$$

während nach §. 48 II

$$b + b_2 + \dots + b_{n-1} = (n-1)b + (n-1)_2 c$$

demnach entsteht

$$1)\ a_n = a + b(n-1) + c(n-1)_2$$

und das ist die Formel I für den gegenwärtigen Fall.

Nach der eben erwiesenen Formel 1) ist nun

$$\begin{aligned} a &= a \\ a_2 &= a + b\cdot 1 \\ a_3 &= a + b\cdot 2 + c\cdot 2_2 \\ a_4 &= a + b\cdot 3 + c\cdot 3_2 \\ a_5 &= a + b\cdot 4 + c\cdot 4_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_n &= a + b(n-1) + c(n-1)_2. \end{aligned}$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert:

$$S_n = an + b[1+2+3+\dots(n-1)] + c[2_2 + 3_2 + 4_2 + \dots + (n-1)_2]$$

oder, wenn wir §. 44 anwenden

$$2)\ S_n = an + bn_2 + cn_3$$

und das ist die Formel II im vorliegenden Fall.

Nunmehr kann die Richtigkeit der Formeln für Reihen der dritten Ordnung erwiesen werden.

Nach dem vorigen Paragraph ist

$$a_n = a + b + b_2 + \ldots . + b_{n-1}.$$

Die erste Differenzen-Reihe ist jetzt von der zweiten Ordnung, daher nach 2)

$$b + b_2 + \ldots . + b_{n-1} = b(n-1) + c(n-1)_2 + d(n-1)_3$$

also

$$3)\ a_n = a + b(n-1) + c(n-1)_2 + d(n-1)_3$$

und das ist die Formel I für Reihen der dritten Ordnung.

Nach 3) ist nun für unsere Reihe dritter Ordnung

$$\begin{aligned}
a &= a \\
a_2 &= a + b\cdot 1 \\
a_3 &= a + b\cdot 2 + c\cdot 2_2 \\
a_4 &= a + b\cdot 3 + c\cdot 3_2 + d\cdot 3_3 \\
a_5 &= a + b\cdot 4 + c\cdot 4_2 + d\cdot 4_3 \\
a_6 &= a + b\cdot 5 + c\cdot 5_2 + d\cdot 5_3 \\
\cdot\ & \quad \cdot \\
\cdot\ & \quad \cdot \\
\cdot\ & \quad \cdot \\
\cdot\ & \quad \cdot \\
a_n &= a + b(n-1) + c(n-1)_2 + d(n-1)_3
\end{aligned}$$

also, wenn man addirt und §. 44 anwendet,

$$4)\ S_n = an + bn_2 + cn_3 + dn_4$$

und das ist die Formel II für Reihen der dritten Ordnung.

Hiernach könnte in derselben Weise die Richtigkeit der Formeln für Reihen der vierten Ordnung dargethan werden, alsdann für Reihen der fünften Ordnung u. s. w. Wir fahren aber nicht in dieser Weise fort, sondern zeigen, daß, wenn die Formeln für arithmetische Reihen irgend einer, etwa der qten Ordnung giltig sind, sie auch für arithmetische Reihen der nächst höheren, (q + 1)sten Ordnung gelten.

Zu dem Ende nehmen wir eine arithmetische Reihe der $(q+1)$sten Ordnung an. Es ist nach dem vorigen Paragraph

$$a_n = a + b + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1}.$$

Die erste Differenzen-Reihe ist von der $q$ten Ordnung; gilt nun die Formel II für Reihen der $q$ten Ordnung, so ist

$$b + b_2 + \ldots + b_{n-1} = b(n-1) + c(n-1)_2 + \ldots$$

also

$$a_n = a + b(n-1) + c(n-1)_2 + \ldots$$

und das ist die Formel I.

Für eine Reihe der $(q+1)$sten Ordnung ist nach der eben erhaltenen Formel

$$\begin{aligned}
a &= a \\
a_2 &= a + b\cdot 1 \\
a_3 &= a + b\cdot 2 + c\cdot 2_2 \\
a_4 &= a + b\cdot 3 + c\cdot 3_2 + d\cdot 3_3 \\
a_5 &= a + b\cdot 4 + c\cdot 4_2 + d\cdot 4_3 + e\cdot 4_4 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
a_n &= a + b(n-1) + c(n-1)_2 + d(n-1)_3 + \ldots
\end{aligned}$$

und wenn wir addiren und §. 44 anwenden, entsteht

$$S_n = an + bn_2 + cn_3 + \ldots$$

d. h. die Formel II.

Gelten also unsere Formeln (oder vielmehr gilt nur die zweite) für arithmetische Reihen irgend einer Ordnung, etwa der $q$ten, so gelten sie auch für Reihen der nächst höheren $(q+1)$sten Ordnung. Wir haben bereits dargethan, daß die Formeln für arithmetische Reihen der dritten Ordnung giltig sind, daher gelten sie auch für arithmetische Reihen der vierten Ordnung, deshalb wieder für arithmetische Reihen der fünften Ordnung u. s. f. für arithmetische Reihen jeder höheren Ordnung.

In aller Kürze den Beweis zu führen zeigt man bloß, daß wenn die Formeln für Reihen irgend einer Ordnung giltig sind, sie auch für Reihen der nächst höheren Ordnung gelten, und weil sie nach §. 48 für Reihen der ersten Ordnung gelten, so gelten

sie dann für Reihen jeder Ordnung. Beweise solcher Art nennt man Beweise durch Induction.

Beispiel.

Man soll das 20ste Glied und die Summe der ersten 20 Glieder der Reihe

$$3 \quad 15 \quad 35 \quad 63 \quad 99 \quad 143 \quad 195 \ldots.$$

angeben.

Die Differenzen-Reihen sind

$$12 \quad 20 \quad 28 \quad 36 \quad 44 \quad 52$$
$$8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8$$

Das 20ste Glied ist nach I. gleich

$$3 + 12 \cdot 19 + 8 \cdot 19_2 = 1599.$$

Die Summe der ersten 20 Glieder nach II gleich

$$3 \cdot 20 + 12 \cdot 20_2 + 8 \cdot 20_3 = 11460.$$

§. 55.

Jede Reihe von Zahlen, welche sich unter die Form

$$a \quad ac \quad ac^2 \quad ac^3 \quad ac^4 \ldots.$$

bringen läßt, heißt eine geometrische Progression oder eine geometrische Reihe. Die Buchstaben a und c stellen beliebige Zahlen vor. Die Reihe heißt zunehmend, steigend, wenn c in absoluter Hinsicht größer als 1 ist, abnehmend, oder fallend, wenn c in absoluter Hinsicht kleiner ist als 1. Die Ausdrücke a, ac, ac^2, ..., heißen die Glieder der Reihe, und beziehlich das erste, zweite, dritte u. s. w. Glied. Der Ausdruck c wird der Quotient, auch der Exponent der Reihe genannt. Der Quotient c ergiebt sich jedesmal, wenn man mit irgend einem Gliede in das nächst folgende dividirt.

Alle Glieder einer geometrischen Progression sind bestimmt, sobald das erste Glied gegeben ist und der Quotient.

Eine vorgelegte Reihe ist eine geometrische Progression, wenn die Division eines jeden Gliedes in das nächst folgende überall denselben Quotienten liefert.

So sind z. B. die Reihen

$$3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad 48 \quad 96 \ldots.$$
$$1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{8} \quad \tfrac{1}{16} \quad \tfrac{1}{32} \ldots.$$
$$9 \quad -3 \quad 1 \quad -\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{9} \quad -\tfrac{1}{27} \ldots.$$

geometrische Progressionen: Der Quotient der ersten Reihe ist 2, der Quotient der zweiten ist $\frac{1}{2}$, der dritten ist $-\frac{1}{3}$.

§. 56.

Das erste Glied einer geometrischen Progression sei a, der Quotient c, das nte Glied sei durch q, die Summe der ersten n Glieder durch s bezeichnet. Alsdann ist

$$\text{I.} \quad q = ac^{n-1}$$

$$\text{II.} \quad s = \frac{(c^n - 1)a}{c - 1}$$

Die Richtigkeit der ersten Formel erhellet aus der Ansicht der Reihe. Die zweite zu erweisen setze man

$$s = a + ac + ac^2 + ac^3 + \ldots. + ac^{n-1}$$

multiplicire diese Gleichung mit c, welches liefert

$$cs = ac + ac^2 + ac^3 + ac^4 + \ldots. + ac^n$$

und subtrahire die vorstehende Gleichung von der letzten; das giebt

$$(c-1)s = ac^n - a$$

oder
$$s = \frac{(c^n - 1)a}{c - 1}.$$

Es ist

$$s = \frac{(c^n - 1)a}{c - 1} = \frac{c \cdot ac^{n-1} - a}{c - 1}$$

oder
$$s = \frac{cq - a}{c - 1}$$

eine Formel die sich öfter gebrauchen läßt, und die auch leicht, wie II., geradezu kann hergeleitet werden.

Beispiele.

1) Das neunte Glied der Reihe 3, 6, 12, 24 .... zu bestimmen. Es ist hier $a = 3$, $c = 2$, $n = 9$, also nach **I.** $q = 3 \cdot 2^8 = 768$.

2) Die Summe der ersten 6 Glieder der Reihe 9, —3, 1, $-\frac{1}{3}$.... zu bestimmen. Hier ist $a = 9$, $c = -\frac{1}{3}$, $n = 6$, also nach II. $s = \frac{[(-\frac{1}{3})^6 - 1]9}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{182}{27}$.

§. 57.

Die beiden Formeln im vorigen Paragraphen bilden zwei algebraische Gleichungen, welche zwischen den Ausdrücken a, c, n, q, s Statt finden. Sind daher von den fünf Ausdrücken a, c, n, q, s drei gegeben, so sind die beiden anderen bestimmt, und können vermittelst der Gleichungen gefunden werden. Alle Aufgaben, welche sich hier bilden lassen, werden gelöst, wenn man je drei der fünf Ausdrücke a, c, n, q, s als bekannt annimmt, und jedesmal die beiden anderen entwickelt. Die folgende Tabelle enthält die Resultate dieser Rechnungen.

	Gegeben	Gesucht	Formel
1)	a, c, n	q	$q = ac^{n-1}$
2)	a, c, s	q	$q = \frac{a + (c-1)s}{c}$
3)	a, n, s	q	$q(s-q)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$
4)	c, n, s	q	$q = \frac{(c-1)c^{n-1}s}{c^n - 1}$
5)	a, c, n	s	$s = \frac{(c^n - 1)a}{c - 1}$
6)	a, c, q	s	$s = \frac{cq - a}{c - 1}$
7)	a, n, q	s	$s = \frac{q^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{q^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
8)	c, n, q	s	$s = \frac{(c^n - 1)q}{(c-1)c^{n-1}}$

	Gegeben	Gesucht	Formel
9)	c, n, q	a	$a = \frac{q}{c^{n-1}}$
10)	c, n, s		$a = \frac{(c-1)s}{c^n - 1}$
11)	c, q, s		$a = cq - (c-1)s$
12)	n, q, s		$a(s-a)^{n-1} - q(s-q)^{n-1} = 0$
13)	a, n, q	c	$c = \sqrt[n-1]{\frac{q}{a}}$
14)	a, n, s		$c^n - \frac{s}{a}c + \frac{s-a}{a} = 0$
15)	a, q, s		$c = \frac{s-a}{s-q}$
16)	n, q, s		$c^n - \frac{s}{s-q}c^{n-1} + \frac{q}{s-q} = 0$
17)	a, c, q	n	$n = \frac{\mathrm{Log}\,q - \mathrm{Log}\,a}{\mathrm{Log}\,c} + 1$
18)	a, c, s		$n = \frac{\mathrm{Log}\,[a+(c-1)s] - \mathrm{Log}\,a}{\mathrm{Log}\,c}$
19)	a, q, s		$n = \frac{\mathrm{Log}\,q - \mathrm{Log}\,a}{\mathrm{Log}(s-a) - \mathrm{Log}(s-q)} + 1$
20)	c, q, s		$n = \frac{\mathrm{Log}\,q - \mathrm{Log}\,[cq-(c-1)s]}{\mathrm{Log}\,c} + 1$

Die Gleichungen unter 3) 12) 14) 16) sind im Allgemeinen nicht auflösbar.

§. 58.

Der Begriff der geometrischen Progression kann erweitert werden dahin, daß sie Glieder erhält, welche negativen ganzen, und positiven oder negativen gebrochenen Stellenzahlen angehören.

Die geometrische Progression

$$a \quad ac \quad ac^2 \quad ac^3 \ldots\ldots$$

deren Stellenzahlen

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots\ldots$$

sind, gewinnt Glieder, welche negativen Stellenzahlen entsprechen, wenn sie links folgendermaßen fortgesetzt wird

$$\ldots\ldots \frac{a}{c^3} \quad \frac{a}{c^2} \quad \frac{a}{c} \quad a \quad ac \quad ac^2 \quad ac^3 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots\ldots$$

und es erhellet, daß die Formel $q = c^{n-1}$ für ein negatives n giltig bleibt; es ist z. B. das -2te Glied gleich $ac^{-2-1} = ac^{-3} = \frac{a}{c^3}$.

Und schaltet man zwischen dem nten und $(n+1)$sten Gliede in nachstehender Weise Glieder ein:

$$\underset{n}{ac^{n-1}} \quad ac^{n-1}\sqrt[p]{c} \quad ac^{n-1}\sqrt[p]{c^2} \quad ac^{n-1}\sqrt[p]{c^3} \ldots\ldots ac^{n-1}\sqrt[p]{c^{p-1}} \quad \underset{n+1}{ac^n}$$

wofür gesetzt werden kann

$$\underset{n}{ac^{n-1}} \quad ac^{n-1}c^{\frac{1}{p}} \quad ac^{n-1}c^{\frac{2}{p}} \quad ac^{n-1}c^{\frac{3}{p}} \ldots\ldots ac^{n-1}c^{\frac{p-1}{p}} \quad \underset{n+1}{ac^n}$$

oder

$$\underset{n}{ac^{n-1}} \quad ac^{n+\frac{1}{p}-1} \quad ac^{n+\frac{2}{p}-1} \quad ac^{n+\frac{3}{p}-1} \ldots\ldots ac^{n+\frac{p-1}{p}-1} \quad \underset{n+1}{ac^n}$$

und giebt den eingeschalteten Gliedern der Reihe nach die Stellenzahlen $n + \frac{1}{p}$, $n + \frac{2}{p} \ldots\ldots$, so hat die Progression Glieder erhalten, welche gebrochenen Stellenzahlen angehören. Auch für solche bleibt die Formel $q = ac^{n-1}$ giltig. Die Anzahl der interpolirten Glieder ist $p - 1$, wenn der Quotient derselben $\sqrt[p]{c}$ ist; soll man daher x Glieder einschalten, so muß ihr Quotient gleich $\sqrt[x+1]{c}$ genommen werden. Das Glied zu bilden, dessen Stellenzahl $r + \frac{v}{h}$ ist, schalte man $h - 1$ Glieder zwischen dem

rten und $(r+1)$sten Gliede der Reihe ein: das vte von den interpolirten Gliedern ist das verlangte; es wird unmittelbar durch die Formel $q = ac^{n-1}$ erhalten, wenn man $n = r + \frac{v}{h}$ setzt. Ueberhaupt sind die neuen Glieder der Formel gemäß gebildet.

Uebungen und Praktisches.

§. 59.

1) Was ist eine einfache arithmetische Progression, was sind ihre Glieder, was ist ihre Differenz? Wann heißt eine solche Progression steigend, fallend? Wodurch ist eine arithmetische Progression bestimmt? Woran läßt sich erkennen, daß eine vorgelegte Reihe eine einfache arithmetische Progression sei?

2) Wie drückt sich das nte Glied q einer arithmetischen Reihe aus, deren erstes Glied a und deren Differenz d ist? Wie drückt sich die Summe s der ersten n Glieder aus? Wie viele von den fünf Ausdrücken a, d, n, q, s müssen wenigstens gegeben sein, damit man die anderen finden könne, und wodurch werden sie gefunden?

3) Was versteht man unter der Stellenzahl eines Gliedes irgend einer Reihe? Wenn das erste Glied einer arithmetischen Reihe a, die Differenz d ist, wem ist das 0te, das $(-n)$te Glied der Reihe gleich? Kann jedes Glied einer arithmetischen Reihe als das erste gelten? Was heißt interpoliren? Wie werden zwischen dem nten und $(n+1)$sten Gliede einer arithmetischen Reihe, deren erstes Glied a und deren Differenz d ist, p Glieder interpolirt, und wem ist das rte von diesen Gliedern gleich?

4) Was ist eine Differenzen-Reihe? Was ist eine arithmetische Reihe der nten Ordnung? Wie drückt sich das nte Glied einer höheren arithmetischen Reihe durch das erste Glied der Reihe selbst und durch die ersten Glieder ihrer Differenzen-Reihen aus? Wie wird die Summe der ersten n Glieder einer höheren arithmetischen Reihe ausgedrückt?

5) Was ist eine geometrische Progression? Was ist ihr Quotient? Wann heißt eine geometrische Progression fallend, wann steigend? Woran wird erkannt, daß eine vorgelegte Reihe eine geometrische sei?

6) Wenn a das erste Glied, c der Quotient einer geometrischen Reihe ist, wie drückt sich das nte Glied q, wie die Summe s der ersten n Glieder aus? Wie viele der Ausdrücke a, c, n, q, s müssen gegeben sein, damit man die übrigen finden könne, und wie werden sie gefunden?

7) Das erste Glied einer geometrischen Reihe sei a, der Quotient c; wem ist das 0te, das $(-n)$te Glied gleich, wem das Glied zur Stellenzahl $\pm\left(n+\frac{v}{h}\right)$?

Aufgaben über einfache arithmetische Progressionen.

8) Das erste Glied einer einfachen arithmetischen Reihe sei 5, die Differenz sei 3; man soll das 50ste Glied und die Summe der ersten 50 Glieder berechnen?

Das 50ste Glied ist 152, die Summe der ersten 50 Glieder 3925.

9) Welches ist die Differenz einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 1 und deren 22stes Glied 15 ist.

$\frac{2}{3}$.

10) Welche Stellenzahl hat das Glied 107 in der Reihe 7 12 17 ....?

21.

11) Das erste Glied einer arithmetischen Reihe sei 3, die Differenz 5; welches ist das Glied zur Stellenzahl $119\frac{7}{10}$?

$596\frac{1}{2}$.

12) Das erste Glied sei 5, das Glied zur Stellenzahl $7\frac{3}{4}$ sei 113; welches ist die Differenz?

16.

13) Das erste Glied sei 7, die Differenz 3; von wie vielen der ersten Glieder ist 282 die Summe?

Von den ersten 12 Gliedern.

14) Das erste Glied sei 7, die Differenz 3; von wie vielen der ersten Glieder ist die Summe gleich 100.

Es ergiebt sich für n eine gebrochene Zahl, welche größer als 6 ist. Diese gebrochene Zahl ist nicht brauchbar, weil die Formel $s = [2a + (n-1)d]\frac{n}{2}$ nur gilt, wenn n eine ganze Zahl vorstellt. Es erhellet aber, daß 100 nicht die Summe einer Anzahl der ersten Glieder ist, und daß die Summe der ersten 6 Glieder weniger, die der ersten 7 mehr ausmacht als 100.

15) 3500 Thlr. stehen zu 4 Procent; das Kapital wird zu Anfange eines jeden Jahres um 300 Thlr. vermehrt; wie viel betragen die Zinsen von 24 Jahren?

6672 Thlr.

16) Ein Kapital steht zu 5 Procent, das Kapital wird jährlich um 500 Thlr. vermehrt; während 15 Jahren betragen die Zinsen 6000 Thlr. Welches ist das ursprüngliche Kapital?

4500 Thlr.

17) Welches ist die Summe der ersten n Zahlen der Zahlenreihe?

$\frac{(n+1)n}{2}$ oder $(n+1)_2$.

18) Welches ist die Summe der ersten n geraden Zahlen?

$(n+1)n$.

19) Welches ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen?

n^2.

20) Welches ist die Summe der ersten n durch t theilbaren Zahlen?

$\frac{(n+1)nt}{2}$ oder $(n+1)_2 t$.

Aufgaben über höhere arithmetische Progressionen.

21) Die Summe der Quadrate der ersten n Zahlen der Zahlenreihe zu bestimmen.

Sie ist $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Die Reihe, welche die Quadrate der ersteren Zahlen bilden ist

1 4 9 16 25 36 ....

Die Differenzen-Reihen sind

3 5 7 9 11 ....

2 2 2 2 ....

Ob die Quadrate der späteren Zahlen der hier begonnenen Reihe zugehören ist zweifelhaft. Sie werden ihr zugehören, wenn n^2 das nte Glied derselben ist. Wir bilden deshalb das nte Glied, und es ist gleich

$$\begin{aligned} & 1 + 3(n-1) + 2(n-1)_2 \\ & = 1 + (n-1) + 2(n-1)_1 + 2(n-1)_2 \\ & = n + 2n_2 \quad (\S.\ 41.) \\ & = n + n(n-1) = n(1 + n - 1) = n^2. \end{aligned}$$

Die Summe der ersten n Glieder ist nun

$$\begin{aligned} & n + 3n_2 + 2n_3 \\ & = n + n_2 + 2(n_2 + n_3) \\ & = (n+1)_2 + 2(n+1)_3 \\ & = (n+1)_2 \left[1 + \frac{2(n-1)}{3}\right] \\ & = (n+1)_2 \frac{2n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

22) Die Summe der dritten Potenzen der ersten n natürlichen Zahlen zu berechnen.

Sie ist $[(n+1)_2]^2$.

Die dritten Potenzen der ersteren Zahlen bilden die Reihe

1 8 27 64 125 ....

7 19 37 61 ....

12 18 24 ....

6 6

Das nte Glied der begonnenen Reihe ist

$$\begin{aligned} & 1 + 7(n-1) + 12(n-1)_2 + 6(n-1)_3 \\ & = 1 + n - 1 + 6[(n-1)_1 + (n-1)_2] + 6[(n-1)_2 \\ & \qquad + (n-1)_3] \\ & = n + 6n_2 + 6n_3 \end{aligned}$$

$$= n + 6(n+1)_3 = n + (n+1)n(n-1)$$
$$= n[1 + n^2 - 1] = n^3.$$

Die dritten Potenzen aller späteren Zahlen gehören demnach der begonnenen Reihe an. Die Summe der ersten n Glieder ist

$$n + 7n_2 + 12n_3 + 6n_4$$
$$= n_1 + n_2 + 6(n_2 + n_3) + 6(n_3 + n_4)$$
$$= (n+1)_2 + 6(n+1)_3 + 6(n+1)_4$$
$$= (n+1)_2 + 6(n+2)_4$$
$$= (n+1)_2 \left[1 + \frac{(n+2)(n-1)}{2}\right]$$
$$= (n+1)_2 (n+1)_2 = [(n+1)_2]^2.$$

23) Die Summe der Quadrate der ersten n ungeraden Zahlen zu bestimmen.

Sie ist $(2n+1)_3$.

24) Die Summe der Quadrate der ersten n geraden Zahlen zu finden.

Sie ist $(2n+2)_3$.

25) Welches ist die Summe der dritten Potenzen der ersten n ungeraden Zahlen?

$n^2(2n^2 - 1)$.

26) Welches ist die Summe der dritten Potenzen der ersten n geraden Zahlen?

$8[(n+1)_2]^2$.

27) Die Reihen

1	2	3	4	5	6 ....
1	3	6	10	15	21 ....
1	4	10	20	35	56 ....
1	5	15	35	70	126 ....
1	6	21	56	126	252 ....
1	7	28	84	210	462 ....
.	.	.	.	.	. ....
.	.	.	.	.	. ....

heißen figurirte Reihen, oder die Reihen der figurirten Zahlen. Jede folgende Reihe ist aus der ihr vorangehenden gebildet: das nte Glied jeder folgenden Reihe ist nämlich gleich

der Summe der ersten n Glieder der vorangehenden Reihe. — Wem ist das nte Glied der qten Reihe gleich, und wem die Summe der ersten n Glieder der qten Reihe?

$(n+q-1)_q$. $(n+q)_{q+1}$.

28) Die Reihen, welche aus

$$1 \quad h \quad 3h-3 \quad 6h-8 \quad 10h-15 \quad 15h-24 \ldots.$$

hervorgehen, wenn man statt h ganze Zahlen setzt, werden ebenfalls figurirte Reihen genannt, auch die Reihen der vieleckigen Zahlen. — Wem ist das nte Glied und wem die Summe der ersten n Glieder der oberen allgemeinen Reihe gleich?

$$\frac{h(n-1)-2(n-2)}{2}n. \quad n+n_2(h-1)+n_3(h-2).$$

29) Kanonenkugeln werden zu Haufen von prismatischer Form aufgeschichtet. Oben befinde sich eine Reihe von m Kugeln; die zweite Schicht enthält dann zwei Reihen, jede von $m+1$ Kugeln, die dritte besteht aus drei Reihen, jede von $m+2$ Kugeln u. s. f. Wie viele Kugeln befinden sich in der nten Schicht, und wie viele enthalten die ersten n Schichten?

$$n(m+n-1). \quad \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}.$$

Man findet zunächst für die Summe

$$nm+n_2(m+2)+n_3\cdot 2.$$

Dies ist gleich

$$nm+n_2m+2n_2+2n_3$$
$$=m(n+1)_2+2(n+1)_3$$
$$=\frac{3m(n+1)n+2(n+1)n(n-1)}{6}=\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}.$$

30) Kanonenkugeln seien zu einem Haufen von der Form einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet. Oben befindet sich dann eine Kugel, diese ruht auf einer Schicht von drei Kugeln, die dritte Schicht enthält sechs Kugeln u. s. f. Wie viele Kugeln befinden sich in der nten Schicht, und wie viele enthalten die ersten n Schichten?

$(n+1)_2$. $(n+2)_3$.

31) Kanonenkugeln seien zu einem Haufen von der Form einer vierseitigen Pyramide aufgeschichtet. Von oben herab enthalten die auf einander folgenden Schichten beziehlich 1, 4, 9.... Kugeln. Wie viele Kugeln befinden sich in der nten Schicht? und wie viele enthalten die ersten n Schichten?

n^2. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Aufgaben über geometrische Progressionen.

32) Das erste Glied einer geometrischen Reihe sei 1, der Quotient 2; welches ist das 7te Glied, und die Summe der ersten 7 Glieder.

64. 127.

33) Der Quotient einer geometrischen Reihe sei 3, das 10te Glied sei 78732, welches ist das erste Glied?

4.

34) Welches ist die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$a \quad \frac{a}{x} \quad \frac{a}{x^2} \quad \frac{a}{x^3} \quad \frac{a}{x^4} \; \ldots .$$

Sie ist $\frac{(x^n - 1)a}{(x-1)x^{n-1}}$.

35) Welches ist die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$a \quad b \quad \frac{b^2}{a} \quad \frac{b^3}{a^2} \quad \frac{b^4}{a^3} \; \ldots .$$

Sie ist $\frac{a^n - b^n}{(a-b)a^{n-2}}$.

36) Welches ist die Summe der ersten n Glieder der geometrischen Reihe

$$a \quad -b \quad \frac{(-b)^2}{a} \quad \frac{(-b)^3}{a^2} \quad \frac{(-b)^4}{a^3} \; \ldots .$$

erstens wenn n eine gerade Zahl, und zweitens wenn n eine ungerade Zahl vorstellt.

$\frac{a^n - b^n}{(a+b)a^{n-2}}$. $\frac{a^n + b^n}{(a+b)a^{n-2}}$.

37) Welches ist die Summe der ersten 2n, und die der ersten 2n + 1 Glieder des Ausdrucks

$$1 - x^2 + x^5 - x^7 + x^{10} - x^{12} + x^{15} - x^{17} + \ldots.$$

$$\frac{(x^{5n}-1)(1-x^2)}{x^5-1}. \quad \frac{(x^{5n}-1)(1-x^2)}{x^5-1} + x^{5n}.$$

Der gegebene Ausdruck läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$(1-x^2)+(1-x^2)x^5+(1-x^2)x^{10}+(1-x^2)x^{15}+\ldots.$$

Die Glieder dieses Ausdrucks bilden eine geometrische Reihe, deren erstes Glied $1 - x^2$ und deren Quotient x^5 ist. Die Summe der ersten 2n Glieder des gegebenen Ausdrucks ist einerlei mit der Summe der ersten n Glieder dieser Reihe. Die Summe der ersten 2n + 1 Glieder des gegebenen Ausdrucks wird erhalten, wenn man zu der Summe der ersten 2n Glieder das (n + 1)ste Glied der Reihe $1 + x^5 + x^{10}\ldots.$ addirt, welche die positiven Glieder des gegebenen Ausdrucks bilden.

38) Die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$a \quad (a+d)c \quad (a+2d)c^2 \quad (a+3d)c^3 \ldots.$$

zu bestimmen. Das nte Glied der Reihe ist $[a+(n-1)d]c^{n-1}$.

Man setze

$$s = a + (a+d)c + (a+2d)c^2 + \ldots. + [a+(n-1)d]c^{n-1}$$

multiplicire die Gleichung mit c, das liefert

$$cs = ac + (a+d)c^2 + (a+2d)c^3 + \ldots. + [a+(n-1)d]c^n$$

löse alle Klammern auf, mit Ausnahme derer des letzten Gliedes in der zweiten Gleichung, und subtrahire die erste Gleichung von der zweiten; dadurch entsteht

$$(c-1)s = [a+(n-1)d]c^n - a - (cd + c^2d + c^3d + \ldots. + c^{n-1}d)$$

$$= [a+(n-1)d]c^n - a - \frac{(c^{n-1}-1)cd}{c-1}$$

und hieraus folgt

$$s = \frac{[a+(n-1)d]c^n - a}{c-1} - \frac{(c^{n-1}-1)cd}{(c-1)^2}.$$

39) Die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$a \quad (2a+d)c \quad (3a+3d)c^2 \quad (4a+6d)c^3 \ldots.$$

deren ntes Glied $(na + n_2 d)c^{n-1}$ ist, zu bestimmen.

Man hat

$$s = a + (2a+d)c + (3a+3d)c^2 + \ldots + (na+n_2d)c^{n-1}.$$

Diese Gleichung werde mit c multiplicirt, das liefert

$$cs = ac + (2a+d)c^2 + (3a+3d)c^3 + \ldots + (na+n_2d)c^n$$

Man löse alle Klammern auf, mit Ausnahme der Klammer im letzten Gliede der zweiten Gleichung, und subtrahire die erste Gleichung von der zweiten; es entsteht

$$(c-1)s = (na+n_2d)c^n - [a+(a+d)c+(a+2d)c^2+\ldots + [a+(n-1)d]c^{n-1}].$$

Der Subtrahend rechts ist die Reihe in der vorigen Nummer. Daher hat man

$$(c-1)s = (na+n_2d)c^n - \frac{[a+(n-1)d]c^n - a}{c-1} + \frac{(c^{n-1}-1)cd}{(c-1)^2}$$

und daraus

$$s = \frac{(na+n_2d)c^n}{c-1} - \frac{[a+(n-1)d]c^n - a}{(c-1)^2} + \frac{(c^{n-1}-1)cd}{(c-1)^3}.$$

40) Ein Kapital a trage p Procent Zinseszinsen. Zu Anfange des zweiten Jahres wird zu dem, was erwachsen ist, ein Kapital b gefügt, eben so zu Anfange des dritten. Jedes Kapital b trage ebenfalls p Procent Zinseszinsen. Was wird am Ende des nten Jahres erwachsen sein?

$$\left(a + \frac{100b}{p}\right)\left(\frac{100+p}{100}\right)^n - \frac{(100+p)b}{p}.$$

Fünftes Kapitel.

Combinationslehre.

§. 60.

Jede Nebeneinanderstellung oder Folge von Dingen, Zeichen, bei welcher man blos die Folge (Ordnung) beachtet, nicht aber die Bedeutung, welche sonst damit verbunden ist oder werden kann, heißt eine Complexion oder Verbindung dieser Dinge,

Zeichen, und die Dinge, Zeichen, heißen die **Elemente** der Complexion.

So ist 132 eine Complexion der Elemente 1, 3, 2, wenn blos die Folge der Elemente beachtet und davon abgesehen wird, daß 132 die Zahl Ein Hundert zwei und dreißig oder auch das Produkt 1·3·2 vorstellen kann.

Eine Complexion ist **ohne Wiederholung**, wenn kein Element mehr als einmal in ihr auftritt, **mit Wiederholung** im entgegengesetzten Fall.

Irgend eine Complexion stellt sich entweder von selbst als die ursprüngliche heraus, oder wird als solche festgesetzt. Diese heißt der **Index** oder **Zeiger** aller übrigen Verbindungen. Eine Verbindung heißt **wohlgeordnet**, wenn in ihr kein Element, welches im Zeiger später erscheint, einem solchen vorangeht, das im Zeiger seine Stelle früher hat.

Akkorde, Melodieen können als Complexionen von Tönen gelten, deren natürlicher Index die Scala ihrer Tonart ist. — Für Buchstabenverbindungen betrachten wir das Alphabet als Index, für Ziffernverbindungen die Zahlenreihe; dann sind z. B. afgx, 1138 wohlgeordnete Complexionen.

Die Complexionen werden in Klassen getheilt, nach der Anzahl der Elemente, welche sie umfassen; und eine Complexion heißt von der nten Klasse, wenn sie n Elemente enthält. Der Analogie gemäß wird ein einzelnes Element auch eine Complexion der ersten Klasse genannt. — abc, aabbb sind beziehlich Complexionen der dritten und fünften Klasse.

§. 61.

Gegebene Elemente **permutiren** oder **versetzen** heißt, alle möglichen Verbindungen bilden, deren jede sämmtliche gegebenen Elemente umfaßt. Die durch das Permutiren von n Elementen hervorgegangenen Complexionen machen die nte **Permutationsklasse** jener n Elemente aus. Jede Complexion einer Permutationsklasse heißt eine **Versetzung** in Bezug auf jede andere Complexion derselben Permutationsklasse, auch eine Versetzung

schlechthin. Die nte Permutationsklasse aus n Elementen a, b, c .... wird bezeichnet durch

$$\overset{n}{P}(a, b, c \ldots).$$

Statt $\overset{n}{P}(aa \ldots bbb \ldots cc \ldots)$ pflegt man $\overset{n}{P}(a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \ldots)$ zu schreiben, wenn nämlich die Elemente a, b, c .... beziehlich α, β, γ .... mal im Zeiger vorkommen. So schreibt man z. B. $\overset{6}{P}(a^2b^3c)$ statt $\overset{6}{P}(aabbbc)$. Die hier vorkommenden Exponenten nennt man Wiederholungsexponenten. Sie dürfen mit Potenzexponenten nicht verwechselt werden.

§. 62.

Das Permutiren ist eine rein logische Operation. Die folgenden Beispiele geben dazu hinreichende Anleitung.

1) $\overset{2}{P}(ab)$	2) $\overset{3}{P}(abc)$	3) $\overset{4}{P}(abcd)$	
ab	abc	abcd	cabd
ba	acb	abdc	cadb
	bac	acbd	cbad
	bca	acdb	cbda
	cab	adbc	cdab
	cba	adcb	cdba
		bacd	dabc
		badc	dacb
		bcad	dbac
		bcda	dbca
		bdac	dcab
		bdca	dcba

4) $\overset{4}{P}(aabc)$	5) $\overset{5}{P}(a^2b^2c)$		6) $\overset{5}{P}(a^2b^3)$
aabc	aabbc	babca	aabbb
aacb	aabcb	bacab	ababb
abac	aacbb	bacba	abbab
abca	ababc	bbaac	abbba
acab	abacb	bbaca	baabb
acba	abbac	bbcaa	babab

baac	abbca	bcaab	babba
baca	abcab	bcaba	bbaab
bcaa	abcba	bcbaa	bbaba
caab	acabb	caabb	bbbaa
caba	acbab	cabab	
cbaa	acbba	cabba	
	baabc	cbaab	
	baacb	cbaba	
	babac	cbbaa	

§. 63.

Die Anzahl der Complexionen einer Permutationsklasse $\overset{n}{P}(abc\ldots.)$ wird bezeichnet durch

$$N\overset{n}{P}(abc\ldots.).$$

Auch bei den später vorkommenden Verbindungsarten soll das Klassenzeichen nebst einem vorgesetzten N die Anzahl der Complexionen der Klasse vorstellen.

§. 64.

Es ist

$$\text{I.}\quad N\overset{n}{P}(abc\ldots.) = n!$$

$$\text{II.}\quad N\overset{n}{P}(a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots..) = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots.}.$$

I. Zunächst werde gezeigt, daß, wenn q Elemente v Versetzungen gestatten, alsdann q + 1 Elemente (q + 1)v Versetzungen liefern. Zu dem Ende denke man q + 1 verschiedene Elemente a, b, c, d.... und ihre sämmtlichen Versetzungen. Die Anzahl derjenigen dieser Versetzungen, welche mit a beginnen, ist offenbar so groß, wie die Anzahl der Versetzungen, welche die übrigen q Elemente b, c, d.... zulassen. Gestatten also q Elemente v Versetzungen, so wird man v mit a beginnende Complexionen vorfinden. Eben so groß muß die Anzahl der mit b beginnenden Complexionen sein, und eben so viele Complexionen beginnen mit c, mit d u. s. f. Daher hat man so viel mal v

Versetzungen als Elemente vorliegen, also überhaupt $(q+1)v$ Versetzungen.

Nun gestattet ein Element eine Complexion, also liefern, nach dem eben erwiesenen Gesetz, zwei Elemente $2 \cdot 1$ Versetzungen, drei Elemente $3 \cdot 2 \cdot 1$ Versetzungen u. s. w. n Elemente, $n!$ Versetzungen. Das ist der erste Satz.

II. Man denke sämmtliche Versetzungen n verschiedener Elemente. Die Anzahl der Versetzungen ist $n!$. — Man wähle irgend eine dieser Verbindungen, in ihr α Elemente an beliebigen Stellen. Man versetze diese α Elemente, so oft es angeht, während die übrigen $n-\alpha$ Elemente an ihren Stellen bleiben. Dadurch ergeben sich $\alpha!$ Complexionen, in welchen die $n-\alpha$ Elemente einerlei Stellung haben, die α Elemente aber verschiedene Stellen einnehmen. Diese $\alpha!$ Complexionen finden sich nothwendig unter den ursprünglichen $n!$ Versetzungen vor; und sie fallen in eine Complexion zusammen, sobald man die α Elemente einander gleich setzt. — Man wähle weiter irgend eine jener $n!$ Verbindungen, welche nicht unter den eben gedachten $\alpha!$ Verbindungen befindlich ist, versetze in ihr dieselben α Elemente, so oft es angeht, und während die übrigen $n-\alpha$ Elemente an ihren Stellen bleiben, und es entstehen abermals $\alpha!$ Complexionen, in welchen nur die α Elemente ihre Stellen gewechselt haben, die übrigen einerlei Stellung einnehmen. Auch diese Complexionen müssen sich unter den ursprünglichen $n!$ Verbindungen vorfinden, und sie fallen in eine zusammen, sobald die α Elemente einander gleich werden u. s. f. — Es erhellet hieraus, daß die $n!$ Versetzungen sich in Partieen von je $\alpha!$ Versetzungen theilen, dergestalt, daß die Versetzungen je einer Partie in eine Versetzung übergehen, sobald jene α Elemente gleich werden. Die Anzahl dieser Partieen ist $\frac{n!}{\alpha!}$. Eben so groß ist also auch die Anzahl der Versetzungen, welche n Elemente zulassen, wenn unter ihnen α gleiche sich befinden. — Und läßt man in den $\frac{n!}{\alpha!}$ Verbindungen ferner β Elemente einander gleich wer-

den, so erhellet wie vorher, daß dann $\frac{n!}{\alpha!\beta!}$ die Anzahl der Verbindungen ist; und so ergiebt sich überhaupt der zweite Satz.

§. 65.

Gegebene Elemente mit Wiederholung variiren heißt, alle möglichen Verbindungen aus diesen Elementen entwickeln; gegebene Elemente ohne Wiederholung variiren heißt alle Verbindungen aus ihnen herstellen, welche keine Wiederholung enthalten.

Die aus n Elementen a, b, c .... entwickelten Complexionen, deren jede q Elemente umfaßt, machen die qte Variationsklasse jener n Elemente aus. Die qte Variationsklasse der n Elemente a, b, c .... mit Wiederholung bezeichnen wir durch

$$\overset{q}{V}{}^{\prime}(abc\ldots.)$$

ohne Wiederholung durch

$$\overset{q}{V}(abc\ldots.).$$

§. 66.

Aufgabe. Es sind n Elemente a, b, c .... gegeben; man soll die Variationen derselben entwickeln mit und ohne Wiederholung.

Auflösung. I. Mit Wiederholungen.

1) Man schreibe die gegebenen Elemente nieder, und betrachte jedes einzelne als eine Complexion, so hat man die erste Variationsklasse der gegebenen Elemente.

2) Jeder Complexion der ersten Variationsklasse setze man jedes Element vor. Die entstehenden Complexionen bilden die zweite Variationsklasse.

3) Jeder Complexion der zweiten Variationsklasse setze man jedes Element vor, und man hat die dritte Variationsklasse u. s. w., u. s. w.

II. Ohne Wiederholung. Man verfahre wie vorher, vermeide aber das Bilden von Complexionen, welche Wiederholungen enthalten würden.

Z. B.

1)

$\overset{1}{V}{}^{I}(abc)$	a,	b,	c
$\overset{2}{V}{}^{I}(abc)$	aa,	ab,	ac
	ba,	bb,	bc
	ca,	cb,	cc
$\overset{3}{V}{}^{I}(abc)$	aaa,	aab,	aac
	aba,	abb,	abc
	aca,	acb,	acc
	baa,	bab,	bac
	bba,	bbb,	bbc
	bca,	bcb,	bcc
	caa,	cab,	cac
	cba,	cbb,	cbc
	cca,	ccb,	ccc
$\overset{4}{V}{}^{I}(abc)$	aaaa,	aaab,	aaac
	aaba,	aabb,	aabc
		u. s. w.	

2)

$\overset{1}{V}(abc)$	a,	b,	c
$\overset{2}{V}(abc)$	ab,	ac	
	ba,	bc	
	ca,	cb	
$\overset{3}{V}(abc)$	abc,	acb	
	bac,	bca	
	cab,	cba	

Beim Variiren mit Wiederholungen schreiten die Variationsklassen ohne Ende fort, beim Variiren ohne Wiederholung ist die Anzahl der Variationsklassen gleich der Anzahl der Elemente, und die letzte Variationsklasse ist eine reine und vollständige Permutationsklasse.

§. 67.

Sind n Elemente a, b, c .... gegeben, so ist

I. $N\overset{q}{V}{}^{I}(abc\ldots) = n^q$.

II. $N\overset{q}{V}(abc\ldots) = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(q-1)]$

$$= \frac{n!}{(n-q)!} = q!\,n_q.$$

Der Beweis zu I. fällt in die Augen.

II. Die Anzahl der Complexionen der ersten Variationsklasse ist n. Die zweite Variationsklasse ohne Wiederholung entsteht, indem man jedes Element den n — 1 übrigen Elementen

vorsetzt. Daher enthält diese Klasse n(n — 1) Complexionen. Die dritte Variationsklasse ohne Wiederholungen geht hervor, wenn man jeder Verbindung der zweiten Klasse jedes einzelne der n — 2 Elemente vorsetzt, welche die Verbindung nicht schon enthält. Daher ist die Anzahl der Verbindungen der dritten Klasse n(n — 1)(n — 2) u. s. w., die Anzahl der Verbindungen der qten Klasse n(n — 1)(n — 2) .... [n — (q — 1)].

§. 68.

Wenn man von den Variationen gegebener Elemente mit oder ohne Wiederholung alle nicht wohlgeordneten Verbindungen streicht, so bilden die übrig bleibenden sämmtlichen wohlgeordneten Verbindungen die **Combinationen** der gegebenen Elemente mit oder ohne Wiederholungen. Die Combinationen zerfallen gleich den Variationen in Klassen. Die qte Klasse der Combinationen aus den n Elementen a, b, c .... mit Wiederholungen wird bezeichnet durch

$$\overset{q}{C'}(abc\ldots.)$$

ohne Wiederholung durch

$$\overset{q}{C}(abc\ldots.)$$

§. 69.

Die Entwickelung der Combinationsklassen aus gegebenen Elementen a, b, c .... erfolgt wie die der Variationsklassen, mit dem Unterschiede, daß man blos wohlgeordnete Verbindungen herstellt, die nicht wohlgeordneten vermeidet.

Z. B.

1)	$\overset{1}{C'}(abcd)$	a,	b,	c,	d
	$\overset{2}{C'}(abcd)$	aa,	ab,	ac,	ad
			bb,	bc,	bd
				cc,	cd
					dd

$\overset{3}{C'}(abcd)$		aaa,	aab,	aac,	aad
			abb,	abc,	abd
				acc,	acd
					add
			bbb,	bbc,	bbd
				bcc,	bcd
					bdd
				ccc,	ccd
					cdd
					ddd
$\overset{4}{C'}(abcd)$		aaaa,	aaab,	aaac,	aaad
			aabb,	aabc,	aabd
		u. s. w.	u. s. w.		u. s. w.
2) $\overset{1}{C}(abcde)$	a,	b,	c,	d,	e
$\overset{2}{C}(abcde)$		ab,	ac,	ad,	ae
			bc,	bd,	be
				cd,	ce
					de
$\overset{3}{C}(abcde)$			abc,	abd,	abe
				acd,	ace
					ade
				bcd,	bce
					bde
					cde
$\overset{4}{C}(abcde)$				abcd,	abce
					abde
					acde
					bcde
$\overset{5}{C}(abcde)$					abcde

Die Combinationsklassen mit Wiederholungen schreiten ohne Ende fort. Beim Combiniren ohne Wiederholungen ist die Anzahl der Klassen gleich der Anzahl der Elemente, und die letzte

Combinationsklasse besteht aus einer Complexion, welche die sämmtlichen gegebenen Elemente umfaßt.

§. 70.

Bei n Elementen a, b, c.... ist

$$\text{I.}\quad \overset{q}{NC'}(abc\ldots.) = (n+q-1)_q.$$

$$\text{II.}\quad \overset{q}{NC}(abc\ldots.) = n_q.$$

I. Die Anzahl der Complexionen erster Klasse ist n, oder n_1. Aus der Entwickelung der zweiten Combinationsklasse erhellet, daß die Anzahl ihrer Complexionen gleich ist

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots. + 1$$

oder gleich

$$n_1 + (n-1)_1 + (n-2)_1 + \ldots. + 1_1$$

welches nach §. 44 gleich ist $(n+1)_2$.

Wenn man genauer beachtet, wie die dritte Combinationsklasse aus der zweiten hervorgeht, wird erkannt, daß die Anzahl der Complexionen der dritten Combinationsklasse gleich ist

$$(n+1)_2 + n_2 + (n-1)_2 + (n-2)_2 + \ldots. + 2_2$$

und das ist $(n+2)_3$.

Und so folgt weiter, daß die Anzahl der Complexionen in der qten Combinationsklasse $(n+q-1)_q$ ist.

II. Aus der qten Combinationsklasse geht die qte Variationsklasse hervor, wenn man jede Complexion permutirt. Die Anzahl der Versetzungen von q Elementen ist q!. Folglich ist die Anzahl der Complexionen in der qten Variationsklasse das q!fache von der Anzahl der Complexionen in der qten Combinationsklasse. Ist also diese Anzahl x, so hat man nach §. 67 II.

$$q!x = q!n_q$$

und deshalb ist n_q die Anzahl der Complexionen in der qten Combinationsklasse.

§. 71.

Wenn man aus gegebenen Zahlen als Elementen alle Complexionen von q Elementen mit Wiederholungen bildet, die sich dergestalt bilden lassen, daß die Summe der Elemente in jeder

Complexion die Zahl s ausmacht, so hat man in diesen Complexionen die qte Variationsklasse jener Elemente zur Summe s und in den wohlgeordneten Complexionen die qte Combinationsklasse zur Summe s. Die qte Variationsklasse zur Summe s aus gegebenen Elementen bezeichnet man, indem man den Elementen als Zeiger das Zeichen $\overset{q}{{}^{s}V}$ vorsetzt, die qte Combinationsklasse zur Summe s, indem man den Zeiger $\overset{q}{{}^{s}C}$ vorsetzt.

§. 72.

Aufgabe. Die qte Variationsklasse zur Summe s aus den Elementen 0, 1, 2, 3 .... zu entwickeln.

Auflösung. Man schreibe q — 1 Nullen nieder und zuletzt die Zahl s, so hat man die erste Complexion. — Um aus irgend einer Complexion die nächst folgende zu bilden, unterscheide man, ob das letzte Element rechter Hand Null ist oder nicht. Ist das letzte Element nicht Null, so vermindere man dasselbe um 1 und vermehre dagegen das vorletzte um 1. Ist das letzte Element Null oder sind mehrere der letzten Elemente Null, so gehe man von der Rechten zur Linken bis zum ersten Element, welches nicht Null ist, erhöhe das links daneben stehende um 1, schreibe rechts von diesem überall Null bis auf die letzte Stelle, in welche man die Ergänzung zur Summe s setzt. Die letzte Verbindung ist die, welche links in der ersten Stelle die Zahl s, also in den übrigen Stellen Nullen enthält.

Aehnlich ergeben sich aus den Elementen 1, 2, 3 .... die Variationsklassen zu bestimmten Summen.

Beispiele.

1) Variationen zur Summe 3 aus den Elementen 0, 1, 2, 3....

1ste Klasse	2te Klasse	3te Klasse	
3	03	003	111
	12	012	120
	21	021	201
	30	030	210
		102	300

4te Klasse		5te Klasse	
0003	1002	00003	10002
0012	1011	00012	10011
0021	1020	00021	10020
0030	1101	00030	10101
0102	1110	00102	10110
0111	1200	00111	10200
0120	2001	00120	11001
0201	2010	00201	11010
0210	2100	00210	11100
0300	3000	00300	12000
		01002	20001
		01011	20010
		01020	20100
		01101	21000
		01110	30000
		01200	
		02001	
		02010	
		02100	
		03000	

Aus jeder späteren Variationsklasse lassen sich alle vorangehenden heraussondern. Z. B.

0003	005
0012	014
0021	023
0030	032
0102	041
0111	050
0120	104
0201	113
0210	122
0300	131
1002	140
1011	203

1020	212
1101	221
1110	230
1200	302
2001	311
2010	320
2100	401
3000	410
	500

2) Variationen zur Summe 5 aus den Elementen 1, 2 ....

1ste Klasse	2te Klasse	3te Klasse	
5	14	113	212
	23	122	221
	32	131	311
	41		

4te Klasse	5te Klasse
1112	11111
1121	
1211	
2111	

3) Variationen zur Summe 6 aus den Elementen 1, 2 ....

1ste Klasse	2te Klasse	3te Klasse	
6	15	114	222
	24	123	231
	33	132	312
	42	141	321
	51	213	411

4te Klasse		5te Klasse	6te Klasse
1113	1311	11112	111111
1122	2112	11121	
1131	2121	11211	
1212	2211	12111	
1221	3111	21111	

Aus den Elementen 0, 1 .... gehen die Variationsklassen zu bestimmten Summen ohne Ende fort, aus den Elementen 1, 2 .... aber giebt es zur Summe s nicht mehr als s Variationsklassen.

§. 73.

Die Anzahl der Complexionen in der qten Variationsklasse zur Summe s aus den Elementen 1, 2 .... ist

$$(s - 1)_{q-1}$$

aus den Elementen 0, 1 .... aber

$$(s + q - 1)_{q-1}.$$

Die Beweise ergeben sich ähnlich wie §. 70 I., wenn man die Klassen vergleicht und ihre Bildung genauer beachtet.

§. 74.

Aufgabe. Die qte Combinationsklasse zur Summe s aus den Elementen 0, 1, 2 .... zu entwickeln.

Auflösung. Man schreibe q — 1 Nullen nieder und zuletzt die Zahl s, so hat man die erste Complexion. — Um aus irgend einer Complexion die nächst folgende zu bilden, unterscheide man, ob das letzte Element um mehr als 1 größer ist als das vorangehende oder nicht. Ist das letzte Element um mehr als 1 größer als das vorangehende, so vermindere man dasselbe um 1 und vermehre dagegen das vorangehende um 1. Ist das letzte Element nicht um mehr als 1 größer als das vorletzte, so gehe man von der Rechten zur Linken bis zum nächsten Element, welches um mehr als 1 kleiner ist als das letzte Element, erhöhe jenes Element um 1, schreibe rechts von ihm überall das durch Erhöhung erhaltene Element bis auf die letzte Stelle, in welche die Ergänzung zur Summe s zu setzen ist, die aber nicht kleiner werden darf als das vorangehende Element. Die letzte Verbindung ist diejenige, welche kein Element enthält, das um mehr als 1 kleiner ist als das letzte.

Aehnlich ergeben sich aus den Elementen 1, 2 .... die Combinationsklassen zu bestimmten Summen.

Z. B.

1) ${}^{7}\overset{4}{C}(0,1\ldots.)$	2) ${}^{8}\overset{4}{C}(0,1\ldots.)$	3) ${}^{6}\overset{6}{C}(0,1\ldots.)$	4) ${}^{12}\overset{4}{C}(1,2\ldots.)$
0007	0008	000006	1119
0016	0017	000015	1128
0025	0026	000024	1137
0034	0035	000033	1146
0115	0044	000114	1155
0124	0116	000123	1227
0133	0125	000222	1236
0223	0134	001113	1245
1114	0224	001122	1335
1123	0233	011112	1344
1222	1115	111111	2226
	1124		2235
	1133		2244
	1223		2334
	2222		3333

Beim Combiniren zu bestimmten Summen folgt die Anzahl der Complexionen keinem einfachen Gesetz, und wir können der Bestimmung dieser Anzahl entbehren.

Uebungen und Praktisches.

§. 75.

1) Was versteht man unter einer Complexion, und unter den Elementen derselben? Was ist der Zeiger? Was heißt es, eine Complexion habe Wiederholungen, sei ohne Wiederholung, sei wohlgeordnet? Was heißt es, gegebene Elemente permutiren, und wie viele Versetzungen gestatten n verschiedene Elemente; wie viele n Elemente, unter denen α gleiche sich befinden? Was heißt es, gegebene Elemente variiren mit Wiederholungen, ohne Wiederholung? Was versteht man unter der qten Variationsklasse? Wie bildet man die Variationen gegebener Elemente, mit oder ohne Wiederholung? Wie viele Complexionen enthält die qte Variations=

klasse mit Wiederholungen aus n Elementen, wie viele die qte Variationsklasse ohne Wiederholungen aus n Elementen? Was sind die Combinationen gegebener Elemente und wie erhält man dieselben? Aus wie vielen Complexionen besteht die qte Combinationsklasse aus n Elementen mit Wiederholungen, ohne Wiederholung? Was sind Variationen, Combinationen zu bestimmten Summen und wie werden sie gebildet aus den Elementen 0, 1, 2 ...., oder aus den Elementen 1, 2 ....?

2) Wie groß ist die Anzahl aller Versetzungen der Elemente abcdef?

720.

3) Wie viele dieser Versetzungen beginnen mit a, wie viele mit ab, wie viele mit abc?

120, 24, 6.

4) Wie viele jener Complexionen haben a in der dritten Stelle, wie viele haben a in der dritten und b in der vierten; in wie vielen stehen die Elemente abc wohlgeordnet neben einander, und in wie vielen finden sich diese drei Elemente überhaupt neben einander?

120, 24; 24, 144.

5) Wie groß ist die Anzahl aller Versetzungen der Elemente abbccc? Wie viele dieser Versetzungen beginnen mit a, wie viele mit ab, wie viele mit abc?

60. 10, 4, 3.

6) Wie viele Complexionen enthält die vierte Variationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen abcd, und wie viele die vierte Variationsklasse ohne Wiederholungen?

256, 24.

7) Wie viele Complexionen giebt es in der vierten Variationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen abcde, welche das Element a enthalten, wie viele, welche die Elemente a und b enthalten?

369. 194.

Die nte Variationsklasse mit Wiederholungen aus v Elementen umschließt stets die nte Variationsklasse aus v — x

derselben Elemente. Die vierte Variationsklasse aus den Elementen abcde umschließt also die vierte aus bcde, und diese wiederum die vierte aus cde. — Die Anzahl aller Complexionen der vierten Variationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen abcde ist

$$5^4.$$

Werden von diesen die Complexionenen aus bcde, deren Anzahl 4^4 ist, und die kein a enthalten, zurückgenommen, so bleiben

$$5^4 - 4^4 = (25 + 16)(25 - 16)$$
$$= 369$$

Complexionen, und jede von ihnen enthält a. Man denke die Complexionen aus acde; sie enthalten kein b und ihre Anzahl ist 4^4. Unter ihnen befinden sich die aus cde, ohne a, deren Anzahl 3^4 ist, und die bereits oben mit denen aus bcde zurückgenommen wurden. Die Anzahl der a enthaltenden Complexionen aus acde ist daher

$$4^4 - 3^4 = (16 + 9) 16 - 9) = 175$$

und werden diese noch von den oberen 369 Complexionen zurückgezogen, so bleiben

$$194$$

Complexionen, welche a enthalten und zugleich b.

8) Und wenn man aus den Elementen abcdef die vierte Variationsklasse ohne Wiederholung bildet, wie viele Complexionen derselben finden sich, in welchen das Element a erscheint, wie viele, in welchen die Elemente a, b und c nicht vorkommen?

240, keine.

9) Wie viele Complexionen umfaßt die dritte Combinationsklasse ohne Wiederholungen aus den Elementen abcdef, wie viele die dritte Combinationsklasse mit Wiederholungen aus denselben Elementen?

20, 56.

10) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen befinden sich unter 90 Nummern? (Amben, Ternen u. s. w. sind Verbindungen aus zwei, drei u. s. w. Elementen ohne

Rücksicht auf die Folge, so daß z. B. abc, acb, bca u. s. w, dieselbe Terne ist.)

4005, 117480, 2555190, 43949268.

11) Wie oft lassen sich 12 Elemente in zwei Abtheilungen bringen, von welchen die eine drei, die andere die neun übrigen Elemente enthält?

220 Mal.

12) Auf wie viel Arten lassen sich aber 12 Elemente in drei Abtheilungen bringen, von welchen die eine 3, die zweite 4, die dritte 5 Elemente enthält?

Auf 27720 verschiedene Arten.

13) Und wenn 14 Elemente in vier Abtheilungen gebracht werden sollen zu 2, 3, 4 und 5 Elementen, in wie viel verschiedenen Weisen ist das möglich?

In 2522520 Weisen.

14) In wie viel verschiedenen Weisen können n Elemente in Abtheilungen gebracht werden, die einzeln a, b, c .... Elemente enthalten?

In $n_a \cdot (n - a)_b \cdot (n - a - b)_c$ .... Weisen.

15) Welches sind die sämmtlichen Theiler zu der Zahl 210?

1, 2, 3, 5, 7; 6, 10, 14, 15, 21, 35; 30, 42, 70, 105; 210.

16) Es ist eine Reihe von n Elementen a, b, c, d .... gegeben, und eine Reihe von n′ Elementen a′, b′, c′ ...., wie viele Complexionen zweier Elemente lassen sich bilden, von welchen das eine der einen, das andere der zweiten Reihe angehört?

nn'.

17) Und wären drei Reihen von Elementen gegeben, von n, n′ und n″ Elementen, wie viele Complexionen dreier Elemente ließen sich bilden, von welchen das eine der einen, das andere der zweiten, das dritte der dritten Reihe entnommen ist?

$nn'n''$.

18) Eine zusammengesetzte Zahl z, in ihre einfachen Faktoren zerlegt, liefere das Produkt $a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Wie findet man alle Theiler dieser Zahl, und wie groß ist die Anzahl derselben?

Die sämmtlichen Theiler werden erhalten in den Summanden des Produktes:

$$(1 + a + a^2 \ldots. + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots. + b^\beta)$$
$$(1 + c + \ldots. + c^\gamma)$$

und die Anzahl aller Theiler ist $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

Wegen des Faktors a^α hat nämlich die gegebene Zahl z jede der Zahlen

$$1, a, a^2 \ldots. a^\alpha$$

zum Theiler; wegen des Faktors b^β ist sie theilbar durch jede der Zahlen

$$1, b, b^2 \ldots. b^\beta$$

und wegen des Faktors c^γ durch jede der Zahlen

$$1, c, c^2 \ldots. c^\gamma.$$

Nun erhellet, daß, wenn man irgend eine Zahl der einen Reihe nimmt, irgend eine der zweiten und irgend eine der dritten, das Produkt solcher drei Zahlen ein Theiler zur gegebenen Zahl z ist; und daß man alle Theiler der Zahl z erhält in den sämmtlichen Produkten, welche sich solchergestalt bilden lassen. Daraus ergiebt sich die Anzahl der Theiler nach der vorigen Aufgabe. Und daß die Theiler selbst in den Summanden des oben angegebenen Produktes bestehen, folgt leicht aus der Regel der Multiplication.

19) Auf den Theilscheiben der kleineren englischen Drehbänke sind gewöhnlich die Theilungen 360, 144, 112, 221, 209 angebracht; welche Theilungen lassen sich vermittelst solcher Theilscheibe ausführen?

Durch die Theilung 360 kann man theilen in 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360 Theile.

Durch 144 in 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144 Theile.

Durch 112 in 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112 Theile.

Durch 221 in 13, 17, 221 Theile.

Durch 209 in 11, 19, 209 Theile.

Ueberhaupt also kann man folgende Theilungen ausführen: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 28, 30, 36, 40, 45, 48, 56, 60, 72, 90, 112, 120, 144, 180, 209, 221, 360.

20) Auf wie viele Weisen lassen sich die 52 Karten des vollen Spiels an die vier Whistspieler austheilen? Wenn die Karten vertheilt sind, auf wie viele Arten kann der erste Stich gemacht werden, der zweite, der dritte u. s. w.? Auf wie viel Arten läßt sich bei derselben Vertheilung der Karten das Spiel spielen? Wie groß ist endlich die Anzahl aller möglichen Whistspiele?

Die Karten können vertheilt werden in $52_{13} \cdot 39_{13} \cdot 26_{13}$ Weisen. Der erste, zweite, dritte u. s. w. Stich kann gemacht werden beziehlich auf 13^4, 12^4, 11^4 .... Arten. Bei derselben Vertheilung der Karten sind $(13!)^4$ Spiele möglich, und 52! ist die Anzahl aller möglichen Whistspiele.

21) Man soll alle Werthe von x, y und z angeben, welche Null oder positive ganze Zahlen sind und welche der diophantischen Gleichung

$$x + y + z = 4$$

genügen.

Die Werthe sind

x	4, 3, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0
y	0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 0, 1, 0
z	0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4

und sie werden gegeben durch die dritte Klasse der Variationen zur Summe 4 aus den Elementen 0, 1 ....

Und sollte man alle Werthe von n Unbekannten angeben, welche Null oder positive ganze Zahlen sind, und für welche die Summe der Unbekannten eine positive ganze Zahl s ist, so wird man alle jene Werthe erhalten vermittelst der nten Variationsklasse zur Summe s aus den Elementen 0, 1, 2 ....

22) Alle Werthe von x, y, z und t anzugeben, welche Null oder positive ganzen Zahlen sind, und welche der Gleichung

$$1 \cdot x + 2y + 3z + 4t = 8$$

entsprechen.

Aus den Elementen 1, 2, 3, 4 entwickele man alle Combinationsklassen zur Summe 8. Jede Complexion liefert eine Auflösung, indem man die Zahl, welche angiebt, wie oft das Element 1 in der Complexion erscheint als Werth von x, die, welche anzeigt, wie oft 2 erscheint als Werth von y u. s. w. nimmt. So findet sich

	x	y	z	t
44....	0,	0,	0,	2
134....	1,	0,	1,	1
224....	0,	2,	0,	1
233....	0,	1,	2,	0
1124....	2,	1,	0,	1
1133....	2,	0,	2,	0
1223....	1,	2,	1,	0
2222....	0,	4,	0,	0
11114....	4,	0,	0,	1
11123....	3,	1,	1,	0
11222....	2,	3,	0,	0
111113....	5,	0,	1,	0
111122....	4,	2,	0,	0
1111112....	6,	1,	0,	0
11111111....	8,	0,	0,	0

23) Alle Complexionen der qten Combinationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d .... m gehen aus dem Ausdruck

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots m^\mu$$

hervor, wenn man für die Wiederholungsexponenten nach und nach alle zusammengehörigen Werthe setzt, die Null oder positive ganze Zahlen sind und der Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu = q$$

entsprechen, dabei in den einzelnen Complexionen die Elemente ausläßt, deren Wiederholungsexponent den Werth Null erhält.

Beispiele.

a) Die vierte Combinationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen a und b ergiebt sich folgendermaßen

$\alpha + \beta = 4$		$a^\alpha b^\beta$
4	0	aaaa
3	1	aaab
2	2	aabb
1	3	abbb
0	4	bbbb

b) Dritte Combinationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c:

300	a^3
210	a^2b
120	ab^2
030	b^3
201	a^2c
111	abc
021	b^2c
102	ac^2
012	bc^2
003	c^3

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

24) Es sei n die Anzahl aller möglichen Fälle, welche in Bezug auf irgend Etwas mit gleicher Leichtigkeit Statt finden oder eintreten können. Unter diesen n Fällen seien q Fälle irgend einem Ereigniß, einem Umstande u. s. w. günstig, die übrigen nicht. Dann sagt man: die Wahrscheinlichkeit für das Ereigniß u. s. w. sei $\frac{q}{n}$. Unter der Wahrscheinlichkeit wird also verstanden das Verhältniß der Anzahl der günstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle.

Ist $q = n$, d. h. sind alle Fälle günstig, so muß das Ereigniß eintreten. Der Quotient $\frac{q}{n}$ wird alsdann 1 und repräsentirt Gewißheit.

Die Anzahl der ungünstigen Fälle ist $n - q$. Deshalb

heißt der Quotient $\frac{n-q}{n}$ die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, oder die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Es ist $\frac{q}{n} + \frac{n-q}{n} = 1$, d. h. die Summe der Wahrscheinlichkeit und der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit ist jedesmal 1. Deshalb wird aus der einen die andere erhalten, indem man jene von 1 subtrahirt.

25) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem gewöhnlichen Spielwürfel eine bestimmte seiner Zahlen, z. B. 5 zu werfen?

$\frac{1}{6}$.

Eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 muß geworfen werden. Es giebt also sechs Fälle, und einer ist günstig.

26) Ein Würfel soll zweimal geworfen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit auf jeden der beiden Würfe die Zahl 1 zu treffen; oder auf den ersten Wurf 1 zu treffen, auf den zweiten eine andere Zahl; oder auf den ersten Wurf nicht 1 und auf den zweiten 1; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit auf den einen Wurf (beliebig welchen) 1 zu werfen, auf den anderen nicht; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 1 überhaupt erscheinen werde; wie groß endlich die, auf keinen der beiden Würfe die Zahl 1 zu erhalten?

$\frac{1}{36}$; $\frac{5}{36}$; $\frac{5}{36}$; $\frac{10}{36}$; $\frac{11}{36}$; $\frac{25}{36}$.

Man bilde die zweite Klasse der Variationen mit Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 nämlich

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

betrachte das erste Element jeder Complexion als die Zahl des ersten Wurfs, das zweite als die des zweiten. Die Complexionen liefern alsdann alle möglichen Fälle der beiden Würfe; und es ergeben sich leicht die oberen Resultate durch den Augenschein oder durch Rechnung.

27) Ein Würfel soll sechsmal aufgeworfen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl 6 vorkomme; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Wurf 6 zu werfen und auf den letzten ebenfalls 6 zu werfen, einmal, während es gleichgiltig sein soll, ob unter den vier übrigen Würfen die Zahl 6 erscheine oder nicht, das andere Mal, während keiner der übrigen vier Würfe 6 sein darf; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 6 auf den ersten und auf den zweiten Wurf falle?

$\frac{31031}{46656}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{625}{46656}$; $\frac{1}{36}$.

Warum stimmen hier das zweite und das letzte Resultat mit dem ersten der vorigen Nummer überein?

28) In wie viel verschiedenen Weisen können zwei Würfel fallen, und wie erhält man die sämmtlichen Würfe.

Die Anzahl der Würfe ist 36, und sie werden erhalten, wenn man die zweite Klasse der Variationen mit Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bildet, das erste Element jeder Complexion als die Zahl betrachtet, welche der erste Würfel zeigt, und das zweite als die des anderen Würfels.

29) Die Anzahl der Augen, welche mit zwei Würfeln geworfen werden können, ist 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 oder 12. Welche Wahrscheinlichkeit findet für jede dieser Anzahlen Statt?

$\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{1}{36}$.

30) Wie viele Würfe gestatten drei Würfel, welche Zahlen können geworfen werden und wie groß ist ihre Wahrscheinlichkeit?

216. Es können geworfen werden die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 und ihre Wahrscheinlichkeit ist beziehlich $\frac{1}{216}$, $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{5}{108}$, $\frac{5}{72}$, $\frac{7}{72}$, $\frac{25}{216}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{25}{216}$, $\frac{7}{72}$, $\frac{5}{72}$, $\frac{5}{108}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{216}$.

31) Es werden drei Würfel aufgeworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle drei einerlei Zahl zeigen, oder daß zwei einerlei Zahl zeigen, der dritte eine andere; endlich daß jeder eine andere Zahl zeige?

$\frac{1}{36}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{9}$.

32) Unter einer Reihe von n Fällen seien q einem Ereigniß A günstig, unter einer zweiten Reihe von n′ Fällen q′ einem Ereigniß A′ (so daß also $\frac{q}{n}$ die Wahrscheinlichkeit von A, und $\frac{q'}{n'}$ die von A′ ist); wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten (Zusammentreffen) beider Ereignisse?

$\frac{q}{n} \cdot \frac{q'}{n'}$.

Jeder Fall der einen Reihe kann nämlich mit jedem Fall der anderen zusammentreffen, und in solcher Weise entstehen nn′ Fälle, unter welchen sich qq′ befinden, in denen A eintritt und zugleich A′.

Sowohl das Prinzip als das Resultat dieser Nummer pflegt man die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit zu nennen, dagegen dann die unter 24) erklärte Wahrscheinlichkeit die einfache oder absolute. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist nach dem obigen Resultat gleich dem Produkt aus den einfachen Wahrscheinlichkeiten.

Wenn einerseits eine Wahrscheinlichkeit $\frac{t}{n}$ für ein Ereigniß sich darbietet, andererseits für dasselbe Ereigniß eine Wahrscheinlichkeit $\frac{t'}{n'}$, so ist die gesammte Wahrscheinlichkeit $\frac{t}{n} + \frac{t'}{n'}$. Auch dies kann zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit genannt werden.

Alle Aufgaben der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit lassen sich durch einfache Wahrscheinlichkeit lösen. Das Prinzip der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit führt aber oft kürzer zum Ziel, zuweilen auch minder leicht.

Zur Anleitung wollen wir die Aufgabe unter 25) noch einmal lösen: die einfache Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel 1 zu werfen, ist $\frac{1}{6}$, die, nicht 1 zu werfen, $\frac{5}{6}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal hinter einander 1 zu werfen, $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$; die, auf den ersten Wurf 1 zu werfen, und auf den

zweiten eine andere Zahl, $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$, eben so die, zuerst nicht 1 zu werfen, und darauf 1; und die Wahrscheinlichkeit auf zwei Würfe nicht 1 zu werfen ist $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Würfen einmal 1 zu treffen, und einmal nicht, ist $\frac{5}{36} + \frac{5}{36}$, denn es sind jetzt sowohl die Fälle günstig, in welchen 1 zuerst geworfen wird, als die, in welchen es zuletzt erscheint. Die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Würfen überhaupt 1 zu werfen, ist endlich $\frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36}$, weil nun auch noch der Fall hinzutritt, daß zweimal 1 geworfen wird. Alle diese Resultate stimmen mit den frühern überein.

Zuweilen läßt sich eine einfache Wahrscheinlichkeit als eine zusammengesetzte betrachten und berechnen. Die Wahrscheinlichkeit z. B., aus einem vollständigen Spiel Karten Coeur Aß zu ziehen, ist einfach $\frac{1}{52}$. Das Blatt ist aber durch zwei Bedingungen bestimmt; daher kann man auch schließen: die Wahrscheinlichkeit, überhaupt Coeur zu ziehen, ist $\frac{1}{4}$, und die Wahrscheinlichkeit, aus den Coeurblättern das Aß zu ziehen, ist $\frac{1}{13}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, Coeur Aß zu treffen, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13}$.

33) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem vollständigen Spiel Karten in zwei Zügen König und Dame aus einerlei Farbe zu ziehen?

$\frac{2}{663}$.

An Königen und Damen befinden sich 8 Blätter im Spiel. Also ist die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Zug einen König oder eine Dame zu treffen, $\frac{8}{52}$. Die Wahrscheinlichkeit, auf den zweiten Zug beziehlich die Dame oder den König derselben Farbe zu ziehen, ist $\frac{1}{51}$. Daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{52} \cdot \frac{1}{51}$.

34) Unter 90 Nummern werden 5 gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den gezogenen Nummern wenigstens eine von zweien vorher bestimmten erscheinen werde?

$\frac{29}{267}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß unter 5 Zügen eine der vorher bestimmten Nummern befindlich sein werde, ist $\frac{5}{90}$ (ohne Wiederholung, also einfach); die Wahrscheinlichkeit, in den

vier übrigen Zügen die andere Nummer zu erhalten, ist $\frac{4}{89}$; die Wahrscheinlichkeit, in den vier übrigen Zügen die andere Nummer nicht zu erhalten, ist $\frac{85}{89}$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen beider Nummern $\frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} = \frac{2}{801}$; die Wahrscheinlichkeit, daß die eine Nummer gezogen werde, die andere nicht, ist $\frac{5}{90} \cdot \frac{85}{89} = \frac{1}{18} \cdot \frac{85}{89}$; und die, daß die andere gezogen werde, aber die erste nicht, ist ebenfalls $\frac{1}{18} \cdot \frac{85}{89}$. Alle diese Fälle sind dem Umstande günstig, daß wenigstens eine der beiden Nummern sich zeige, folglich ist die Wahrscheinlichkeit hierfür $\frac{2}{801} + \frac{2}{18} \cdot \frac{85}{89} = \frac{87}{801} = \frac{29}{267}$. Oder: Da jede gezogene Nummer ausfällt, treten Wiederholungen nicht ein. Die fünfte Combinationsklasse ohne Wiederholungen hat 90_5 Complexionen. Die Complexionen, welche die zwei vorher bestimmten Nummern nicht enthalten, sind aus den übrigen 88 Nummern gebildet, und ihre Anzahl ist 88_5. Die Anzahl der Complexionen, in welchen eine jener Nummern erscheint, ist demnach $90_5 - 88_5$ und die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{90_5 - 88_5}{90_5} = \frac{90 \cdot 89 - 85 \cdot 84}{90 \cdot 89}$$
$$= \frac{3 \cdot 89 - 17 \cdot 14}{3 \cdot 89}$$
$$= \frac{29}{267}.$$

35) Eine Münze werde zweimal aufgeworfen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal Bild zu werfen?

$\frac{3}{4}$.

36) Es werden vier Würfel aufgeworfen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Würfel gleiche Zahlen zeigen, während die übrigen andere und unter sich ungleiche Zahlen aufweisen? Wie groß ist unter derselben Bedingung die Wahrscheinlichkeit bei 6, bei 8 Würfeln?

$\frac{5}{9} \cdot \frac{25}{108}$, 0.

Die Würfel seien a, b, c, d. Die Wahrscheinlichkeit mit a und b 1 zu werfen ist $\frac{1}{36}$; die Wahrscheinlichkeit mit c nicht 1 zu werfen ist $\frac{5}{6}$; die Wahrscheinlichkeit mit d nicht

1 zu werfen, noch die mit c geworfene Zahl ist $\frac{4}{6}$. Daher die Wahrscheinlichkeit, mit a und b 1 zu werfen und mit c und d nicht 1 und verschiedene Zahlen, gleich

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6}.$$

Statt 1 kann jede der Zahlen von 2 bis 6 auch gelten; dies giebt 6 Fälle. Statt a und b können a und c, a und d u. s. w. dienen; giebt wiederum 6 Fälle. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit überhaupt

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot 6 \cdot 6 = \frac{5}{9}.$$

37) Unter drei Urnen soll eine gewählt, und daraus eine Kugel gezogen werden. Zwei von den Urnen enthalten keine Kugeln, die dritte enthält 6 blaue und 2 weiße; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?

$\frac{1}{12}$.

38) Von zwei Urnen soll eine gewählt, und daraus eine Kugel gezogen werden. Die eine Urne enthält 5 grüne und 2 weiße Kugeln, die andere 3 grüne und 8 weiße; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?

$\frac{39}{77}$.

39) Von drei Urnen soll eine gewählt, und daraus eine Kugel gezogen werden. Die eine Urne enthält 5 grüne und 3 weiße Kugeln, jede der beiden andern Urnen enthält 2 grüne und 9 weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?

$\frac{59}{88}$.

40) Ein Ereigniß A habe die Wahrscheinlichkeit a, ein Ereigniß A' die Wahrscheinlichkeit a'. Es soll nur eins dieser Ereignisse eintreten können, oder, wie es sich von selbst versteht, auch keines. Wenn nun überhaupt eins der Ereignisse eintreten sollte, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dies das Ereigniß A sein werde?

$\frac{a}{a + a'}$.

41) Es sei ein Ereigniß B eingetreten, das entweder durch einen Umstand A oder durch einen Umstand A′ herbeigeführt worden ist. Die Wahrscheinlichkeit für beide Umstände an sich sei gleich. Bei dem Umstande A sei die Wahrscheinlichkeit für das Ereigniß B gleich β, der Umstand A′ führe die Wahrscheinlichkeit β′ für das Ereigniß B mit sich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß B durch den Umstand A herbeigeführt worden sei?

$\frac{\beta}{\beta + \beta'}$.

42) Es sei ein Ereigniß B eingetreten, entweder durch einen Umstand A oder durch einen Umstand A′. Die einfachen Wahrscheinlichkeiten für die Umstände A und A′ seien beziehlich a und a′. Mit A sei für B die Wahrscheinlichkeit β verbunden, A′ bringe für B die Wahrscheinlichkeit β′ mit sich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß B vermittelst des Umstandes A eingetreten sei?

$\frac{a\beta}{a\beta + a'\beta'}$.

Die Nummern 40) 41) 42) umfassen die sogenannte relative Wahrscheinlichkeit.

43) In einer Urne befinden sich 18 weiße Kugeln, 5 rothe und 7 gelbe. Das Ziehen einer rothen Kugel bringe Gewinn, das einer gelben Verlust, mit dem Ziehen einer weißen sei weder Gewinn noch Verlust verbunden. Wie groß ist die relative Wahrscheinlichkeit des Gewinnes (natürlich in Bezug auf den Verlust)?

$\frac{5}{12}$.

44) Von zwei Urnen ist eine gewählt, und aus ihr eine weiße Kugel gezogen worden. Die eine Urne A hat 5 grüne und 2 weiße Kugeln enthalten, die andere Urne A′ 3 grüne und 8 weiße. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A die gewählte Urne gewesen ist?

$\frac{11}{39}$.

45) Von drei Urnen ist eine gewählt, und aus ihr eine weiße Kugel gezogen worden. Die eine Urne A enthält 5 grüne

und 3 weiße Kugeln, jede der beiden anderen Urnen enthält 2 grüne Kugeln und 9 weiße. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man die Urne A gewählt hatte?

$\frac{11}{39}$.

Bei Wetten, Spielen, welche rein der Zufall entscheidet, müssen sich, wenn keine der Parteien begünstigt sein soll, die Einsätze der Theilnehmer verhalten, wie die Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen. Spielen z. B. zwei Personen N und N′, sind a und a′ die Wahrscheinlichkeiten, welche sie für sich haben, E und E′ ihre Einsätze, so muß sich verhalten

$$E : E' = a : a'$$

oder es muß sein

$$aE' = a'E.$$

Der Einsatz des Einen ist der Gewinn, welcher dem Anderen zufallen kann. Daher läßt sich die letzte Gleichung, und mit ihr die Bedingung des unparteiischen Spiels, auch dahin aussprechen: die Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten in die zu erwartenden Gewinne müssen gleich sein.

Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses a, der Gewinn, welchen es herbeiführt, P ist, so nennt man das Produkt aP die mathematische Hoffnung. Die mathematischen Hoffnungen sind bei unparteiisch angelegten Spielen gleich.

Bei einem unparteiisch angelegten Spiel, das längere Zeit fortgesetzt wird, ist nicht zu erwarten, daß für einen der Theilnehmer beträchtlicher Gewinn oder Verlust erwachse. Muß einer der Theilnehmer begünstigt werden (wie z. B. der Inhaber einer Glücksbude), so geschieht dies leicht dadurch, daß man seinen Einsatz, oder, was dasselbe ist, den Gewinn der Gegner um gewisse Procente ermäßigt.

Man kann 5 gegen 1 wetten, daß mit einem gewöhnlichen Würfel auf den ersten Wurf nicht eine bestimmte Zahl, etwa 6 falle; 35 gegen 1, daß nicht zweimal hintereinander 6 geworfen werde. Man kann bei dem Beispiel unter 44) 28 gegen 11 setzen, daß A die gewählte Urne

war; bei dem Beispiel 45) 11 gegen 48, daß A gewählt wurde; und bei dem Spiel in 43) muß der Verlust, welchen die gelbe Kugel auferlegt, sich zu dem Gewinn, den die rothe bringt, wie 5 zu 7 verhalten. Und in allen diesen Fällen erscheint Niemand begünstigt.

Später werden wir noch einiges über Wahrscheinlichkeitsrechnung beibringen.

Sechstes Kapitel.

Der binomische und der polynomische Satz für positive ganze Exponenten.

§. 76.

Es ist

$$1)\ (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n_2a^{n-2}b^2 + n_3a^{n-3}b^3 + n_4a^{n-4}b^4 + \dots$$

während a und b beliebige Zahlen vorstellen, n zunächst eine positive ganze Zahl bedeutet.

Diese Formel bildet den binomischen Satz.

Um das Gesetz zu überblicken nach welchem die rechts stehenden Glieder fortschreiten, werde statt des ersten Gliedes a^n der gleichbedeutende Ausdruck $n_0a^nb^0$ geschrieben. Dann ist jedes Glied ein Produkt dreier Faktoren, welche aus n, a und b gebildet sind. n ist mit Zeigern versehen, die mit 0 beginnen und in jedem folgenden Gliede um 1 steigen. a ist mit Exponenten versehen; sie beginnen mit n und fallen um 1. b hat ebenfalls Exponenten; sie beginnen mit 0 und steigen. Die Zeiger von n und die Exponenten von b stimmen also in jedem Gliede überein, und die Summe der Exponenten eines jeden Gliedes ist n.

Da n eine positive ganze Zahl vorstellt, so bricht die Reihe zur Rechten mit dem (n + 1)sten Gliede, welches $n_na^0b^n$ ist, ab. Jedes folgende Glied ist Null, weil der Binomial-Coefficient,

welchen es als Faktor enthält, Null ist nach §. 37. Die Formel enthält also folgende Gestalt:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + n_{n-2}a^2 b^{n-2} + n_{n-1}ab^{n-1} + n_n a^0 b^n$$

oder, wenn wir §. 39 und §. 36 anwenden

$$2)\ (a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + n_2 a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Ist $a = 1$, so ist jede Potenz von $a = 1$, und die Formel gewinnt die einfachere Gestalt

$$3)\ (1 + b)^n = 1 + nb + n_2 b^2 + n_3 b^3 + n_4 b^4 + \ldots$$

Wir beweisen nunmehr das Gesetz unter der Voraussetzung, daß n eine positive ganze Zahl vorstellt.

Wir multipliciren $a + b$ mit $a + b$, und es entsteht

$$\begin{aligned}(a + b)^2 = {} & aa + ab \\ & + ba + bb.\end{aligned}$$

Jedem der Elemente a und b ist jedes der Elemente a und b vorgesetzt. Die Glieder der erhaltenen Summe stimmen mit den Complexionen der zweiten Variationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen a und b überein. — Wir multipliciren weiter mit $a + b$, und erhalten:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 = {} & aaa + aab \\ & + aba + abb \\ & + baa + bab \\ & + bba + bbb.\end{aligned}$$

Die Glieder dieser Summe sind die Complexionen der dritten Variationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen a und b. — Aus der Regel für die Multiplication einerseits, und andererseits aus der Vorschrift für das Bilden der Variationsklassen mit Wiederholungen erhellet jetzt, daß die Entwickelung für $(a + b)^n$ entsteht, wenn man die nte Variationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen a und b bildet, jede Complexion als ein Produkt betrachtet, und die Produkte addirt.

Die nte Variationsklasse mit Wiederholungen geht aus der nten Combinationsklasse mit Wiederholungen hervor, wenn man derselben alle Versetzungen jeder einzelnen ihrer Complexionen hinzufügt. — Als Produkte betrachtet haben alle Versetzungen der-

selben Complexion einerlei Werth. Wird demnach irgend eine Complexion als Produkt betrachtet und mit der Permutationszahl ihrer Elemente multiplicirt, so ist das hierdurch entstehende Produkt gleich der Summe, die erhalten wird, wenn man jene Complexion und ihre Versetzungen als Produkte ansieht und addirt. — Die Entwickelung für $(a+b)^n$ ergiebt sich daher auch, wenn man die $n$te Combinationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen a und b bildet, jede Complexion als ein Produkt betrachtet und mit der Versetzungszahl ihrer Elemente multiplicirt, endlich alle so entstehenden Produkte addirt.

Sämmtliche Complexionen der $n$ten Combinationsklasse mit Wiederholungen aus den Elementen a und b gehen aus

$$a^\alpha b^\beta$$

hervor, wenn man für α und β nach und nach alle zusammengehörigen Werthe setzt, welche der Gleichung

$$\alpha + \beta = n$$

entsprechen und dabei Null oder positive ganze Zahlen sind, die Exponenten als Wiederholungs-Exponenten betrachtet, und das Element ausläßt, sobald sein Exponent 0 ist. — Die Complexionen sind hiernach folgende

$$a^n, \quad a^{n-1}b, \quad a^{n-2}b^2, \ldots a^2b^{n-2}, \quad ab^{n-1}, \quad b^n.$$

Die Versetzungszahlen dieser Complexionen sind der Reihe nach

$$\frac{n!}{n!}, \frac{n!}{(n-1)!\,1!}, \frac{n!}{(n-2)!\,2!}, \ldots \frac{n!}{2!(n-2)!}, \frac{n!}{1!(n-1)!}, \frac{n!}{n!}$$

oder $1, \quad n, \quad n_2, \quad \ldots \quad n_2, \quad n, \quad 1$

also ist endlich für n als positive ganze Zahl

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + n_2 a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Unter der Voraussetzung, daß n eine positive ganze Zahl vorstellt, läßt sich der binomische Satz auch durch Induction darthun. Der Beweis ist einfach, legt aber nicht wie der vorige, den Zusammenhang vor Augen. Gemäß dem binomischen Satz (dessen Giltigkeit für den Augenblick dahingestellt bleibe) bilde man zu dem Ende

$$(a+b)^q = a^q + qa^{q-1}b + q_2 a^{q-2}b^2 + \ldots + q_{q-2}a^2b^{q-2} + q_{q-1}ab^{q-1} + q_q b^q$$

und multiplicire mit a + b; das liefert

$$(a + b)^{q+1} =$$

$$a^{q+1} + qa^q b + q_2 a^{q-1} b^2 + \ldots + q_{q-1} a^2 b^{q-1} + q_q ab^q$$
$$+ a^q b + qa^{q-1} b^2 + \ldots + q_{q-2} a^2 b^{q-1} + q_{q-1} ab^q + q_q b^{q+1}$$

oder, wenn man addirt und §. 41 anwendet,

$$(a + b)^{q+1} = a^{q+1} + (q + 1) a^q b + (q + 1)_2 a^{q-1} b^2 + \ldots$$
$$+ (q + 1)_{q-1} a^2 b^{q-1} + (q + 1)_q ab^q + b^{q+1}.$$

Dies Resultat würde richtig sein, wenn die nach dem binomischen Satz für $(a + b)^q$ gebildete Entwickelung richtig wäre. — Man bestimme weiter nach dem binomischen Satz $(a + b)^{q+1}$. Es ergiebt sich dasselbe Resultat, welches so eben erhalten wurde. Der binomische Satz liefert sonach für den Exponenten $q + 1$ dasjenige, welches richtig sein würde, wenn er für den Exponenten q Richtiges geliefert hätte, oder mit anderen Worten, gilt der binomische Satz für irgend einen positiven ganzen Exponenten q, so gilt er für den nächst größeren $q + 1$. Nun ist nach dem binomischen Satz

$$(a + b)^1 = a^1 + 1 \cdot a^{1-1} b + 1_2 a^{1-2} b^2 + \ldots$$
$$= a + b$$

und da dies richtig ist, so gilt der Satz für den Exponenten 1, dann also auch für den Exponenten 2, deshalb weiter für 3 u. s. f. für alle Exponenten, welche positive ganze Zahlen sind.

Später wird der binomische Satz auch für negative ganze und für positive oder negative gebrochene Exponenten als giltig erwiesen werden.

§. 77.

Die Formel

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + n_3 a^{n-3} b^3 + \ldots$$

läßt sich wiedergeben durch

$$(a + b)^n = S[n_\alpha a^{n-\alpha} b^\alpha]$$

wenn man unter $S[n_\alpha a^{n-\alpha} b^\alpha]$ die Summe aller der Glieder denkt, welche aus $n_\alpha a^{n-\alpha} b^\alpha$ hervorgehen dadurch, daß man statt α nach und nach 0, 1, 2, 3 .... substituirt.

Auch läßt sich setzen

$$(a + b)^n = S\left[\frac{n!}{\alpha!\beta!}a^\alpha b^\beta\right]_{\alpha+\beta=n}$$

wenn man unter $S\left[\frac{n!}{\alpha!\beta!}a^\alpha b^\beta\right]$ die Summe derjenigen Glieder denkt, welche aus $\frac{n!}{\alpha!\beta!}a^\alpha b^\beta$ dadurch hervorgehen, daß man statt α und β nach und nach alle zusammengehörigen Werthe setzt, welche Null oder positive ganze Zahlen sind, und welche der Gleichung $\alpha + \beta = n$ entsprechen*).

§. 78.

Stellt n eine positive ganze Zahl vor, so ist

$$(a + b + c + d + \ldots.)^n = S\left[\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\ldots.}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots.\right]_{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots.=n}$$

wenn man unter $S\left[\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\ldots.}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots.\right]$ die Summe derjenigen Ausdrücke versteht, welche aus $\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\ldots.}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots.$ hervorgehen dadurch, daß man statt $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots.$ alle zusammengehörigen Werthe setzt, welche Null oder positive ganze Zahlen sind und der Gleichung $\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots. = n$ entsprechen.

Dies ist der **polynomische** Satz unter der Voraussetzung, daß der Exponent n eine positive ganze Zahl sei. Er wird bewiesen wie der binomische Satz unter derselben Voraussetzung ist bewiesen worden.

---

*) Dabei ist $0! = 1$ zu deuten. Es ist $\frac{n!}{\alpha!\beta!} = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}$, weil $n=\alpha+\beta$, und $\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} = (\alpha+\beta)_\alpha = (\alpha+\beta)_\beta$. Für $\beta = 0$ entsteht hieraus

$$\frac{\alpha!}{\alpha!\,0!} = \alpha_\alpha = \alpha_0 = 1$$

oder $\frac{1}{0!} = 1$ und deshalb $0! = 1$.

Auch vermittelst des binomischen Satzes lassen sich die Potenzen von Summen mehrerer Summanden entwickeln, indem man sie als Summen zweier Summanden ansieht und behandelt, bei dem erhaltenen Resultat von neuem den binomischen Satz anwendet, u. s. f. so oft es nöthig ist. Die Anwendung des polynomischen Satzes ist im Allgemeinen bequemer.

Uebungen und Praktisches.

§. 79.

1) Welchen Fortgang haben die Exponenten von a, welchen die Exponenten von b, welchen die Zeiger in der Entwickelung von $(a+b)^n$? Welches Gesetz findet Statt für die Summe der Exponenten eines jeden Gliedes? Wie viele Glieder hat die Entwickelung von $(a+b)^n$? Ist $(a+b)^n$ einerlei mit a^n+b^n, und welches ist der Unterschied zwischen beiden Ausdrücken? Wie läßt sich der binomische Satz sonst noch darstellen, und wie lautet der polynomische Satz?

2) Es ist

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n_2a^{n-2}b^2 - n_3a^{n-3}b^3 + n_4a^{n-4}b^4 - n_5a^{n-5}b^5 + \ldots.$$

Denn es werden alle die Glieder negativ, welche $-b$ mit einem ungeraden Exponenten enthalten.

3) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

4) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

5) $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$.

6) $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$.

7) $(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$.

8) $(a \pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7$.

9) $(a \pm b)^8 = a^8 \pm 8a^7b + 28a^6b^2 \pm 56a^5b^3 + 70a^4b^4 \pm 56a^3b^5 + 28a^2b^6 \pm 8ab^7 + b^8$.

10) $(1 - 3x)^5 = 1 - 15x + 90x^2 - 270x^3 + 405x^4 - 243x^5$.

11) $(3a - 2b)^5 = 243a^5 - 810a^4b + 1080a^3b^2 - 720a^2b^3 + 240ab^4 - 32b^5$.

12) $\left(\frac{2x}{y^2} + \frac{1}{4}yz\right)^6 = 64x^6y^{-12} + 48x^5y^{-9}z + 15x^4y^{-6}z^2 + \frac{5}{2}x^3y^{-3}z^3 + \frac{15}{64}x^2z^4 + \frac{3}{256}xy^3z^5 + \frac{1}{4096}y^6z^6$.

13) $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^5 = (a^2 + 10ab + 5b^2)\sqrt{a} \pm (5a^2 + 10ab + b^2)\sqrt{b}$.

14) $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^7 = (a^3 + 21a^2b + 35ab^2 + 7b^3)\sqrt{a} \pm (7a^3 + 35a^2b + 21ab^2 + b^3)\sqrt{b}$.

15) $(a \pm b\sqrt{-1})^n = (a^n - n_2a^{n-2}b^2 + n_4a^{n-4}b^4 - n_6a^{n-6}b^6 + \ldots) \pm (na^{n-1}b - n_3a^{n-3}b^3 + n_5a^{n-5}b^5 - n_7a^{n-7}b^7 + \ldots)\sqrt{-1}$.

16) $(a + b)^n + (a - b)^n = 2[a^n + n_2a^{n-2}b^2 + n_4a^{n-4}b^4 + n_6a^{n-6}b^6 + \ldots]$.

17) $(a + b)^n - (a - b)^n = 2[na^{n-1}b + n_3a^{n-3}b^3 + n_5a^{n-5}b^5 + n_7a^{n-7}b^7 + \ldots]$.

18) $(a + b\sqrt{-1})^n + (a - b\sqrt{-1})^n = 2[a^n - n_2a^{n-2}b^2 + n_4a^{n-4}b^4 - \ldots]$.

19) $(a + b\sqrt{-1})^n - (a - b\sqrt{-1})^n = 2[na^{n-1}b - n_3a^{n-3}b^3 + n_5a^{n-5}b^5 - \ldots]\sqrt{-1}$.

20) Bezeichnet man das erste Glied der Entwickelung von $(a + b)^n$ mit A, das zweite mit B, das dritte mit C, das vierte mit D u. s. f., so ist

$$(a + b)^n = A + n\frac{b}{a}A + \frac{n-1}{2}\frac{b}{a}B + \frac{n-2}{3}\frac{b}{a}C + \frac{n-3}{4}\frac{b}{a}D + \ldots$$

Nach dieser Formel läßt sich leicht jedes folgende Glied aus dem vorangehenden erhalten.

21) $(a+b-c)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 - 5a^4c - 20a^3bc - 30a^2b^2c - 20ab^3c - 5b^4c + 10a^3c^2 + 30a^2bc^2 + 30ab^2c^2 + 10b^3c^2 - 10a^2c^3 - 20abc^3 - 10b^2c^3 + 5ac^4 + 5bc^4 - c^5$.

Nach dem polynomischen Satz hat man nämlich

$$(a+b-c)^5 = S\left[\frac{5!}{\alpha!\beta!\gamma!}a^\alpha b^\beta(-c)^\gamma\right]_{\alpha+\beta+\gamma=5}$$

und man findet

α	β	γ		
5	0	0	dazu	a^5
4	1	0		$5a^4b$
3	2	0		$10a^3b^2$
2	3	0		$10a^2b^3$
1	4	0		$5ab^4$
0	5	0		b^5
4	0	1		$-5a^4c$
3	1	1		$-20a^3bc$
2	2	1		$-30a^2b^2c$
1	3	1		$-20ab^3c$
0	4	1		$-5b^4c$
3	0	2		$10a^3c^2$
2	1	2		$30a^2bc^2$
1	2	2		$30ab^2c^2$
0	3	2		$10b^3c^2$
2	0	3		$-10a^2c^3$
1	1	3		$-20abc^3$
0	2	3		$-10b^2c^3$
1	0	4		$5ac^4$
0	1	4		$5bc^4$
0	0	5		c^5

22) $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$.

23) $(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$.

24) $(a-b-c+d-g)^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc$

$+ c^2 + 2ad - 2bd - 2cd + d^2 - 2ag + 2bg + 2cg - 2dg + g^2$.

25) $(a + b + c + d + g + h)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 + 2ag + 2bg + 2cg + 2dg + g^2 + 2ah + 2bh + 2ch + 2dh + 2gh + h^2$.

26) $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$.

27) $(a + b + c + d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3$.

28) $(a + b + c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$.

29) $(a + b + c + d)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4 + 4a^3d + 12a^2bd + 12ab^2d + 4b^3d + 12a^2cd + 24abcd + 12b^2cd + 12ac^2d + 12bc^2d + 4c^3d + 6a^2d^2 + 12abd^2 + 6b^2d^2 + 12acd^2 + 12bcd^2 + 6c^2d^2 + 4ad^3 + 4bd^3 + 4cd^3 + d^4$.

30) $(a - b - c)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 - 6a^5c + 30a^4bc - 60a^4b^2c + 60a^2b^3c - 30ab^4c + 6b^5c + 15a^4c^2 - 60a^3bc^2 + 90a^2b^2c^2 - 60ab^3c^2 + 15b^4c^2 - 20a^3c^3 + 60a^2bc^3 - 60ab^2c^3 + 20b^3c^3 + 15a^2c^4 - 30abc^4 + 15b^2c^4 - 6ac^5 + 6bc^5 + c^6$.

31) Es ist

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$$

$$= S\left[\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\ldots}\right]$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = n.$$

32) Man soll von $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 +$

$gx^6 + hx^7 + \ldots.)^3$ dasjenige Glied angeben, welches x^6 enthält.

$(3a^2g + 6abf + 6ace + 3ad^2 + 3b^2e + 6bcd + c^3)x^6$.

Nach der vorigen Nummer und bei einiger Ueberlegung wird erkannt, daß es darauf ankommt folgende Gleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta = 3$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + 5\zeta + 6\eta = 6$$

in Erfüllung zu bringen. Daher folgende Rechnung

	$\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta,$	also $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$	und daraus
6	0 0 0 0 0 1	2 0 0 0 0 0 1	$3a^2gx^6$
15	1 0 0 0 1 0	1 1 0 0 0 1 0	$6abfx^6$
24	0 1 0 1 0 0	1 0 1 0 1 0 0	$6acex^6$
33	0 0 2 0 0 0	1 0 0 2 0 0 0	$3ad^2x^6$
114	2 0 0 1 0 0	0 2 0 0 1 0 0	$3b^2ex^6$
123	1 1 1 0 0 0	0 1 1 1 0 0 0	$6bcdx^6$
222	0 3 0 0 0 0	0 0 3 0 0 0 0	c^3x^6
1113			
1122			
11112			
111111			

Die letzten 4 Combinationen zur Summe 6 sind unbrauchbar, weil sie mit der ersten Gleichung $\alpha + \beta + \gamma + \ldots. = 3$ sich nicht vereinigen lassen.

33) $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \ldots.)^4 = a^4 + 4a^3bx + (4a^3c + 6a^2b^2)x^2 + (4a^3d + 12a^2bc + 4ab^3)x^3 + (4a^3e + 12a^2bd + 6a^2c^2 + 12ab^2c + b^4)x^4 + (4a^3f + 12a^2be + 12a^2cd + 12ab^2d + 12abc^2 + 4b^3c)x^5 + (4a^3g + 12a^2bf + 12a^2ce + 6a^2d^2 + 12ab^2e + 24abcd + 4ac^3 + 4b^3d + 6b^2c^2)x^6 + \ldots.$

Wir lassen die Rechnung folgen:

	α	
0	4	a^4
	α, β	
1	3 1	$4a^3bx$

	α, β, γ		
2	3 0 1	$4a^3c$	x^2
11	2 2 0	$6a^2b^2$	

	$\alpha, \beta, \gamma, \delta$		
3	3 0 0 1	$4a^3d$	
12	2 1 1 0	$12a^2bc$	x^3
111	1 3 0 0	$4ab^3$	

	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$		
4	3 0 0 0 1	$4a^3e$	
13	2 1 0 1 0	$12a^2bd$	
22	2 0 2 0 0	$6a^2c^2$	x^4
112	1 2 1 0 0	$12ab^2c$	
1111	0 4 0 0 0	b^4	

	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$		
5	3 0 0 0 0 1	$4a^3f$	
14	2 1 0 0 1 0	$12a^2be$	
23	2 0 1 1 0 0	$12a^2cd$	
113	1 2 0 1 0 0	$12ab^2d$	x^5
122	1 1 2 0 0 0	$12abc^2$	
1112	0 3 1 0 0 0	$4b^3c$	
11111			

	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$		
6	3 0 0 0 0 0 1	$4a^3g$	
15	2 1 0 0 0 1 0	$12a^2bf$	
24	2 0 1 0 1 0 0	$12a^2ce$	
33	2 0 0 2 0 0 0	$6a^2d^2$	
114	1 2 0 0 1 0 0	$12ab^2e$	x^6
123	1 1 1 1 0 0 0	$24abcd$	
222	1 0 3 0 0 0 0	$4ac^3$	
1113	0 3 0 1 0 0 0	$4b^3d$	
1122	0 2 2 0 0 0 0	$6b^2c^2$	
11112			
111111			

34) $(a + bx + cx^2 + \ldots.)^2 = a^2 + 2abx + (2ac + b^2)x^2 + (2ad + 2bc)x^3 + (2ae + 2bd + c^2)x^4$

$+ (2af + 2be + 2cd)x^5 + (2ag + 2bf + 2ce + d^2)x^6 + \dots$

35) $(a + bx + cx^2 + \dots)^3 = a^3 + 3a^2bx + (3a^2c + 3ab^2)x^2 + (3a^2d + 6abc + b^3)x^3 + (3a^2e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2c)x^4 + (3a^2f + 6abe + 6acd + 3b^2d + 3bc^2)x^5 + (3a^2g + 6abf + 6ace + 3ad^2 + 3b^2e + 6bcd + c^3)x^6 \dots$

36) Wem ist $n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_n$ gleich, unter n eine positive ganze Zahl verstanden?

2^n.

Dies folgt, wenn man $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots$ entwickelt, und $a = b = 1$ setzt.

37) Welches ist die Summe aller Binomial-Coefficienten in $(a + b)^n$, $(a + b + c)^n$, $(a + b + c + d)^n$ u. s. w., unter n eine positive ganze Zahl verstanden?

2^n, 3^n, 4^n u. s. w.

38) Wenn man aus n Elementen sämmtliche Combinationsklassen ohne Wiederholung bildet, wie viele Complexionen enthalten die sämmtlichen Klassen?

$2^n - 1$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Fortsetzung.)

Wiederholte Versuche.

39) Es werde eine Reihe von n Versuchen angestellt, deren jeder entweder das Ereigniß A oder das Ereigniß B zur Folge hat. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A sei a, die des Ereignisses B sei b. — Es ist möglich, daß bei jedem der n Versuche das Ereigniß A eintritt; dieser Fall werde bezeichnet durch A^n, wobei n als Wiederholungs-Exponent gebraucht ist. Es ist möglich, daß n — 1 Versuche das Ereigniß A zur Folge haben und nur ein Versuch das andere B nach sich zieht; dieser Fall werde dargestellt durch $A^{n-1}B$, und es soll hierbei gleichgiltig sein bei dem wievielsten Versuche das Ereigniß B eintritt. U. s. w. Welche Wahrscheinlichkeiten haben diese Fälle?

Die Fälle

$$A^n \quad A^{n-1}B \quad A^{n-2}B^2 \quad A^{n-3}B^3 \quad A^{n-4}B^4 \ldots.$$

haben beziehlich die Wahrscheinlichkeiten

$$a^n \quad na^{n-1}b \quad n_2a^{n-2}b^2 \quad n_3a^{n-3}b^3 \quad n_4a^{n-4}b^4 \ldots.$$

Die Wahrscheinlichkeiten werden also gegeben durch die Glieder der Entwickelung von $(a+b)^n$.

Nach den früheren Bestimmungen ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß A nmal hinter einander eintrete gleich a^n. — Die Wahrscheinlichkeit, daß zuerst $(n-1)$mal hinter einander A eintrete, und dann B, ist $a^{n-1}b$; soll aber überhaupt A $(n-1)$mal eintreten und B einmal, während es gleichgiltig ist, bei dem wievielsten der n Versuche B sich zuträgt, so ist jene Wahrscheinlichkeit mit der Permutationszahl $\frac{n!}{(n-1)!} = n$ zu multipliciren; also ist $na^{n-1}b$ die Wahrscheinlichkeit für $A^{n-1}B$ u. s. w.

Und wenn jeder der n Versuche eines der drei Ereignisse A, B, C nach sich zöge, während diese beziehlich die Wahrscheinlichkeiten a, b, c hätten, so würden die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Fälle durch die Glieder der Entwickelung von $(a+b+c)^n$ gegeben werden. U. s. w.

Ist in einem besonderen Fall eine bestimmte Ordnung vorgeschrieben, so unterbleibt die Multiplication mit dem Permutations-Coefficienten.

40) Ein Würfel werde viermal aufgeworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal die Zahl 6 zu werfen, oder wenigstens zweimal, dreimal, oder die, viermal 6 zu werfen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens einmal, zweimal, dreimal 6 zu werfen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dreimal 6 zu werfen und einmal eine andere Zahl, oder zweimal 6 und zweimal eine andere Zahl, oder einmal 6 und dreimal eine andere Zahl; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 6 nicht zu werfen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst dreimal 6 zu werfen und das vierte Mal nicht 6, oder abwechselnd 6 und nicht 6 zu werfeu; oder endlich zuerst dreimal nicht 6 zu werfen und zuletzt 6?

$\frac{671}{1296}$, $\frac{19}{144}$, $\frac{7}{432}$, $\frac{1}{1296}$; $\frac{125}{144}$, $\frac{425}{432}$, $\frac{1295}{1296}$; $\frac{5}{324}$, $\frac{25}{216}$, $\frac{125}{324}$; $\frac{625}{1296}$; $\frac{5}{1296}$, $\frac{25}{1296}$, $\frac{125}{1296}$.

Die einfache Wahrscheinlichkeit, 6 zu werfen, ist $\frac{1}{6} = a$, die, nicht 6 zu werfen $\frac{5}{6} = b$, und es beantworten sich die aufgestellten Fragen beziehlich durch die Formeln

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3$, oder $1 - b^4$,
$a^4 + 4a^3b + 6a^2b$,
$a^4 + 4a^3b$,
a^4;
$4ab^3 + b^4$,
$6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$,
$4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;
$4a^3b$, $6a^2b^2$, $4ab^3$; b^4; a^3b, a^2b^2, ab^3.

41) Ein Ereigniß A habe die Wahrscheinlichkeit a, ein Ereigniß B die Wahrscheinlichkeit b, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit α, daß bei n Versuchen, deren jeder eines der beiden Ereignisse nach sich zieht, wenigstens einmal das Ereigniß A sich zutrage?

$1 - b^n$.

b ist ein echter Bruch; je größer also n ist, je größer ist die Wahrscheinlichkeit $1 - b^n$, d. h. je größer die Anzahl der Versuche, je größer ist die Wahrscheinlichkeit, das Ereigniß A wenigstens einmal herbeizuführen. Hierin liegt die sogenannte Steigerung der Wahrscheinlichkeit durch wiederholte Versuche.

42) Ein Würfel soll sechsmal aufgeworfen werden; die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal eine bestimmte Zahl, etwa 1, zu treffen ist $1 - (\frac{5}{6})^6$ oder $\frac{31031}{46656}$, oder beinahe $\frac{24}{36}$; wenn nun in den ersten vier Würfen die Zahl 1 nicht erscheinen sollte, wie groß würde die Wahrscheinlichkeit sein, in den beiden noch übrigen die Zahl 1 zu werfen?

$\frac{11}{36}$.

Man täusche sich hier nicht. Die vorangegangenen Würfe und die folgenden stehen mit einander in gar keinem Zusammenhang. Daher ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

keine andere, als die, überhaupt in zwei Würfen wenigstens einmal 1 zu werfen.

43) Wie groß bleibt in Bezug auf 41) die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A, nachdem 1, 2, 3 .... Versuche ungünstig ausgefallen sind?

$1 - b^{n-1}$, $1 - b^{n-2}$, $1 - b^{n-3}$, ...

Die Wahrscheinlichkeit vermindert sich also mit jedem ungünstig ausgefallenen Versuch.

44) Ein Ereigniß A hat die Wahrscheinlichkeit a, ein Ereigniß B die Wahrscheinlichkeit b. Es werden Versuche angestellt, deren jeder eines der beiden Ereignisse zur Folge hat. Wie viele Versuche müssen angestellt werden, damit für das Eintreten des Ereignisses A eine Wahrscheinlichkeit α Statt finde?

$$\frac{\operatorname{Log}(1-\alpha)}{\operatorname{Log} b}.$$

Ist dieser Ausdruck ein Bruch, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit α nicht genau herstellen. Man wird dann die nächst kleinere oder nächst größere ganze Zahl als Anzahl der Versuche wählen, je nachdem man eine kleinere oder größere Wahrscheinlichkeit vorzieht.

Sowohl hier als in 41) erscheint die absolute Wahrscheinlichkeit a als überflüssig gegeben. Und sie ist es auch; denn da bei jedem Versuch A oder B eintritt, so ist $a + b = 1$, folglich a durch b bedingt. Wir haben a nur herangezogen, damit diese absolute Wahrscheinlichkeit und die relative α gesondert werden.

45) Wie oft müssen zwei Würfel aufgeworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal zwei gleiche Zahlen zu werfen, $\frac{3}{4}$ sei?

8 Würfe geben eine etwas größere Wahrscheinlichkeit.

46) In einer Urne befinden sich 5 Kugeln, einzeln roth, blau oder gelb gefärbt, und man weiß nicht, wie viele Kugeln die eine oder die andere Farbe tragen. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen, und wieder zurückgeworfen. Der Versuch wird viermal wiederholt; dabei erscheine zweimal eine rothe

Kugel, einmal eine blaue, einmal eine gelbe. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit bei einem fünften (oder überhaupt irgend einem) Versuch eine rothe Kugel zu ziehen; wie groß ist die, eine blaue, oder die, eine gelbe zu treffen?

$\frac{69}{175}$; $\frac{53}{175}$, $\frac{53}{175}$.

In Bezug auf die in der Urne vorhandenen Kugeln lassen sich sechs Hypothesen aufstellen. Von den fünf Kugeln sind nämlich entweder

	roth	blau	gelb
I.	1	1	3
oder II.	1	2	2
oder III.	1	3	1
oder IV.	2	1	2
oder V.	2	2	1
oder VI.	3	1	1

Diese Hypothesen gewähren für das Ziehen einer rothen, blauen, gelben Kugel beziehlich folgende absolute Wahrscheinlichkeiten

	a	b	c
I.	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
II.	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
III.	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
IV.	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
V.	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
VI.	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Zügen zweimal roth, einmal blau, und einmal gelb zu ziehen, ergiebt sich aus der Entwickelung für $(a+b+c)^4$, und zwar durch das Glied $\frac{4!}{2!}a^2bc$ oder $12a^2bc$. Und es findet sich diese Wahrscheinlichkeit bei den einzelnen Hypothesen

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
gleich	$\frac{36}{625}$	$\frac{48}{625}$	$\frac{36}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{108}{625}$.

Nach §. 75 41) läßt sich jetzt bestimmen, welche Wahrscheinlichkeiten die Hypothesen selbst für sich haben. Man erhält

für die Hypothese	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
die Wahrscheinlichkeit	$\frac{36}{420}$	$\frac{48}{420}$	$\frac{36}{420}$	$\frac{96}{420}$	$\frac{96}{420}$	$\frac{108}{420}$
oder	$\frac{3}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{9}{35}$

Ist aber α die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese, β die Wahrscheinlichkeit, welche die Hypothese für ein Ereigniß gewährt, so ist $\alpha\beta$ die relative Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider, d. h. für das Ereigniß. — Hieraus und aus der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit erhellet, daß man die verlangten Wahrscheinlichkeiten findet, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen mit den absoluten Wahrscheinlichkeiten multiplicirt, welche sie gewähren, und die entstehenden Produkte addirt. Daher ist die Wahrscheinlichkeit im fünften Zug eine rothe Kugel zu treffen gleich

$$\tfrac{3}{35}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{4}{35}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{3}{35}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{8}{35}\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{8}{35}\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{9}{35}\cdot\tfrac{3}{5}=\tfrac{69}{175}$$

die, eine blaue zu ziehen gleich

$$\tfrac{3}{35}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{4}{35}\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{3}{35}\cdot\tfrac{3}{5}+\tfrac{8}{35}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{8}{35}\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{9}{35}\cdot\tfrac{1}{5}=\tfrac{53}{175}$$

und die, eine gelbe zu ziehen

$$\tfrac{3}{35}\cdot\tfrac{3}{5}+\tfrac{4}{35}\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{3}{35}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{8}{35}\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{8}{35}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{9}{35}\cdot\tfrac{1}{5}=\tfrac{53}{175}$$

Wir haben in dieser Auflösung zuerst die verschiedenen möglichen Hypothesen, Ursachen aufgestellt, und deren Wahrscheinlichkeit berechnet, und darauf die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung gebracht. So oft aus gegebenen Ereignissen und Bedingungen die Ursachen der Ereignisse und die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen ermittelt werden, übt man rückgehende Wahrscheinlichkeitsrechnung aus. Die obere Aufgabe ist also z. B. durch rückgehende und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst.

47) In einer Urne befinden sich zwei Kugeln, deren Farbe man nicht kennt. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen, und diese ist weiß. Die Kugel wird in die Urne zurückgelegt und man zieht abermals eine weiße Kugel. Wenn auch diese Kugel zurückgelegt wird, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zum dritten Mal eine weiße Kugel zu ziehen?

$\frac{9}{10}$.

48) Eine Urne enthält drei Kugeln, einzeln schwarz oder weiß gefärbt. Es werden aus der Urne drei Züge gethan, wäh-

rend nach jedem die gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt wird, und man zieht zweimal eine weiße Kugel, einmal eine schwarze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim vierten Zuge eine weiße Kugel zu erhalten?

$\frac{5}{9}$.

49) Eine Urne enthält fünf Kugeln, einzeln weiß, roth, blau oder gelb gefärbt. Aus der Urne werden vier Züge gethan, während man nach jedem die gezogene Kugel wieder in die Urne giebt. Man zieht zweimal eine weiße Kugel, einmal eine rothe, einmal eine blaue. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus der Urne eine weiße Kugel zu ziehen?

$\frac{7}{25}$.

Siebentes Kapitel.

Von den Differentialien und von den Funktionen im Allgemeinen.

§. 80.

Den kleinsten Theil einer Größe nennen wir das Grund-Differential, das constante Differential derselben, auch schlechthin ihr Differential.

Dieser kleinste Theil ist unveränderlich, völlig bestimmt: er kann nicht kleiner gedacht werden, weil er dann verschwindet, auch nicht größer, weil er dann nicht der kleinste sein würde.

Dem kleinsten Theil einer Größe entsprechend denken wir den kleinsten abstrakten Zahlenwerth, nennen ihn das Grund-Differential, das constante Differential, schlechthin das Differential der Zahl, und bezeichnen es durch

$$dx.$$

Dies Zeichen werde gelesen: Differential x. Es ist nicht anzusehen als ein Produkt, hat zunächst nur die ihm beigelegte Bedeutung, und wird in der Folge genauer genommen werden als

Zeichen für das Differential derjenigen Größe oder Zahl, die bezeichnet ist durch x.

Zu dem Begriff des constanten Differentials treiben verschiedene Gelegenheiten. Eine gleichförmige Bewegung z. B. ist eine solche, bei welcher in den kleinsten Zeittheilen gleiche Wege durchlaufen werden. Gleiche Wege in irgend größeren Zeittheilen bedingen nicht eine gleichförmige Bewegung, denn es ist möglich, daß dabei in den kleinsten Zeittheilen die Wege ungleich sind. Eine Bewegung als gleichförmig zu bedingen, müssen die Wege gleich sein in Zeittheilen so klein, daß sich in ihnen nicht mehr zwei Momente unterscheiden lassen. Man darf hier also keinen größeren und kann zuletzt keinen kleineren Zeittheil wählen, als den völlig bestimmten, der das constante Differential der Zeit ist.

§. 81.

Es sei n eine absolute ganze Zahl, größer als 1. Der Quotient

$$\frac{dx}{n}$$

kann nicht hergestellt werden dadurch, daß man dx in n gleiche Theile zerlegt; denn dx ist bereits der kleinste Theil. Dessenungeachtet tritt uns $\frac{dx}{n}$ als ein bestimmter, wenn auch durch Theilung nicht herstellbarer, ideeller Werth entgegen, und es ist offenbar

$$n \cdot \frac{dx}{n} = dx.$$

Wir führen daher, unter n sofort jeden beliebigen Werth verstanden, den Quotienten $\frac{dx}{n}$ ein, bezeichnend denjenigen (zunächst nicht anders erklärbaren) ideellen Werth, welcher mit n multiplicirt dx liefert; und bemerken vorläufig, daß in der Geometrie und Mechanik selbst Ausdrücke wie $\frac{dx}{\infty}$ noch als Träger wichtiger Beziehungen auftreten.

Hierin liegt ein nothwendiger Fortschritt. Der Verstand bedarf überall eines festen, ihm angemessenen Ausgangspunktes; er

muß Gränzen ziehen, sich bei seiner Beschränktheit nicht zu verwirren, und stößt auf Schranken, die ihm gesetzt sind; fortschreitend findet sich, daß die Gränze nicht ist, wo er sie zog oder fand, er erweitert sie, wenn er es vermag, oder begnügt sich, ohne sofort zu erreichende klare Anschauung, mit einstweilen genügender Bestimmung, bis vielleicht ein anderer Ausgangspunkt näheren Zutritt erlaubt. — Schon in den Elementen ist das der Gang. Zunächst giebt es nur absolute ganze Zahlen. Die Subtraction und die Division nöthigen zu Erweiterungen des Begriffs: man gewinnt die negative Zahl, die gebrochene; in diesen Fällen gelang die Ausdehnung der Gränze. Auf eine ihm gesetzte Schranke stößt der Verstand bei der irrationalen Wurzel. Von ihr wird gesagt, sie sei nicht eine ganze Zahl, auch nicht eine gebrochene. Damit ist zweierlei gesagt, was sie nicht ist (und dessen könnte mehr gesagt werden), aber nichts von dem, was sie ist. Der Verstand kann nicht hinan, klare Anschauung ist unerreichbar, dennoch ist er überzeugt, sie sei Zahl und er begnügt sich einstweilen mit der ausreichenden Bestimmung, sie liefere, potenzirt mit dem Wurzel-Exponenten, den Radicand. Die Geometrie gestattet dann etwas näheren Zutritt, insofern sie Größen liefert, auch zuweilen durch Construction herstellt, deren Maaße irrationale Zahlen sind.

§. 82.

Das Produkt $b \cdot dx$, unter b eine beliebige endliche Zahl verstanden, hat nunmehr eine bestimmte Bedeutung.

§. 83.

Sind a und b absolute endliche Werthe, so ist, wie klein a und wie groß b sein mag, stets

$$\frac{a}{b} > dx.$$

Es ist

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{b+1} > \frac{a}{b+2} > \frac{a}{b+3} > \dots.$$

Der Werth $\frac{a}{b}$ kann also fort und fort verkleinert werden, während dx keine Verringerung mehr zuläßt, und als die Gränze erscheint, zu der jene Verkleinerung von $\frac{a}{b}$ strebt.

Daraus erhellet der Satz.

Es liegt hierin, daß dx kleiner ist, als jeder noch so kleine, durch endliche absolute Zahlen ausdrückbare Werth.

§. 84.

Welche absoluten endlichen Werthe a und b vorstellen mögen, es ist

$$a > bdx.$$

Nach dem vorigen Paragraph.

§. 85.

Stellt a einen absoluten endlichen Werth vor, so darf wegen §. 83 gesetzt werden

$$\frac{a}{\infty} = dx.$$

Der Werth ∞ ist hier ein bestimmter, und drückt sich aus durch $\frac{a}{dx}$. Zwei Werthe der Art $\frac{a}{dx}$ und $\frac{a'}{dx}$ verhalten sich wie $a : a'$.

§. 86.

Nach dem vorigen Paragraph ist dx unendlich klein. Aus

$$dx = \frac{a}{\infty}$$

folgt, unter b einen endlichen Werth verstanden

$$bdx = \frac{ab}{\infty}$$

mithin ist auch bdx unendlich klein.

§. 87.

Jedes Produkt von der Form $b \cdot dx$, unter b eine beliebige

endliche Zahl verstanden, nennen wir ein allgemeineres Differential, der Kürze wegen auch schlechthin ein Differential.

§. 88.

Zwischen den Differentialien finden bestimmte endliche Verhältnisse Statt; so verhält sich

$$adx : dx \;= a : 1$$
$$adx : bdx = a : b.$$

§. 89.

Welche endlichen absoluten Werthe z, a und b vorstellen mögen, es ist

$$z + a > z + dx$$

und
$$z + a > z + bdx.$$

Nach §. 84.

§. 90.

Da nun, wie klein der endliche absolute Werth a gedacht werden mag, und wie groß der endliche absolute Werth b, stets

$$z + a > z + dx$$
$$z + a > z + bdx$$

so ist es unmöglich die Summe $z + dx$ oder die $z + bdx$ durch endliche Zahlen wiederzugeben; und da stets $z + a$ zu groß ausfällt, so ist in endlichen Zahlen genau

$$z + dx \;= z$$

und
$$z + bdx = z.$$

§. 91.

In der Folge ist darauf zu achten, ob es sich in einer Rechnung bloß um endliche Werthe handelt, oder zugleich um Differentialien, oder nur um Differentialien; im ersten Fall ist z zu setzen statt Summen von der Form $z + dx$ oder $z + bdx$.

§. 92.

Es ist

$$dx : \frac{1}{dx} = dx \cdot dx = dx^2$$

d. h. das Differential dx, dividirt durch den unendlich großen Werth $\frac{1}{dx}$, liefert dx^2; und umgekehrt, es ist

$$\frac{1}{dx} \cdot dx^2 = dx.$$

§. 93.

Es ist, unter a und b beliebige absolute Werthe verstanden,

$$adx > bdx^2$$

Folgt aus §. 84, indem man mit dx multiplicirt.

§. 94.

Wir nennen dx^2 das zweite Grund-Differential, das zweite constante Differential, das Grund-Differential oder constante Differential zweiter Ordnung, schlechthin das zweite Differential, oder Differential zweiter Ordnung; und bdx^2, unter b eine beliebige endliche Zahl verstanden, ein allgemeineres Differential zweiter Ordnung, schlechthin ein Differential zweiter Ordnung.

Die Differentiale dx, bdx heißen dagegen Differentiale erster Ordnung.

Wegen §. 93 stehen die Differentiale zweiter Ordnung zu denen erster Ordnung in derselben Beziehung, wie Differentiale erster Ordnung zu endlichen Zahlen. Daher ist statt $adx + bdx^2$ bloß adx zu setzen, wenn es sich in der Rechnung bloß um Differentiale erster Ordnung handelt, oder um Werthe die sich durch endliche Zahlen und Differentiale erster Ordnung ausdrücken.

Der Fortschritt zu den Differentialen dritter Ordnung dx^3, bdx^3, zu denen vierter Ordnung u. s. w. versteht sich nunmehr von selbst.

Das Grund-Differential dx ist anzusehen als die Einheit für die übrigen Differentiale bdx erster Ordnung, welche Vielfache sind von jenem. Eben so ist dx^2 Einheit für die übrigen Differentiale zweiter Ordnung u. s. w.

§. 95.

Die Werthe $\frac{1}{dx^2}$, $\frac{a}{dx^2}$ kann man unendlich Große zweiter Ordnung nennen, Werthe wie $\frac{1}{dx^3}$, $\frac{a}{dx^3}$ unendlich Große dritter Ordnung u. s. w., und dann $\frac{1}{dx}$, $\frac{a}{dx}$ unendlich Große erster Ordnung. Jedes unendlich Große irgend einer Ordnung verschwindet gegen ein unendlich Großes höherer Ordnung.

§. 96.

Bezeichnet x irgend einen reellen Werth, so ist $x + dx$ der nächst größere Werth, $x - dx$ der nächst kleinere.

Die ideellen Werthe $\frac{dx}{n}$ fallen natürlich außer Betracht.

§. 97.

Es seien a und b zwei ungleiche sonst beliebige reelle Werthe.

Ein Ausdruck x durchläuft stetig alle Werthe von a bis b, wenn er zuerst den Werth a annimmt, und, sich beständig um dx ändernd, wächst oder abnimmt, bis er den Werth b erreicht, je nachdem $a \lessgtr b$.

Bei solchem Gange durchläuft x alle reellen Werthe, welche zwischen a und b sich befinden.

Und durchläuft x stetig alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so geht es durch alle reellen Werthe.

§. 98.

Ein Ausdruck x heißt urveränderlich, oder urvariabel, wenn er alle die unendlich vielen Werthe vorstellt, welche zwischen zwei gegebenen Gränzen liegen. Ein Ausdruck a heißt constant, wenn er, wie gewöhnlich, nur irgend einen Werth vorstellt, oder eine begränzte Anzahl von Werthen wie z. B. $\sqrt[n]{a}$.

Urvariable Ausdrücke bezeichnet man durch die letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, constante durch die ersten. In der Algebra bezeichnen x, y, z unbekannte Werthe, a, b, c .... bekannte. Constante Ausdrücke werden als bekannt oder unbekannt in der Bezeichnung gewöhnlich nicht unterschieden. Variable Ausdrücke sind, ihrem Begriff gemäß, niemals unbekannt. Wo die Bedeutung nicht in die Augen fällt, ist sie ausdrücklich anzugeben.

§. 99.

Ein Ausdruck A heißt abhängig von einem Ausdruck b, wenn jede Aenderung (Wachsen oder Abnehmen), welche b erleidet, eine Aenderung des Werthes von A zur Folge hat; ein Ausdruck A heißt unabhängig von b, wenn die Aenderungen des Werthes von b keinen Einfluß auf den Werth von A üben. Der Bruch $\frac{an}{bn}$ z. B. ist abhängig von a und von b, aber unabhängig von n, und unabhängig von jedem Ausdruck q, der in dem Bruch nicht vorkommt.

§. 100.

Ein Ausdruck A sei zusammengesetzt aus beliebig vielen Ausdrücken b, c, d,...., und sei von ihnen abhängig. Der Ausdruck A wird eine allgemeine Funktion, schlechthin eine Funktion irgend eines dieser Ausdrücke, etwa b, genannt, wenn man allein beachtet, daß A von b abhängig ist, während man also sich nicht darum kümmert, daß A auch von anderen Ausdrücken, noch darum, wie es von b abhängt. Der Ausdruck A wird eine Funktion von zweien jener Ausdrücke, etwa b und c, genannt, wenn man allein beachtet, daß A von b und von c abhängig ist, ohne also weiter die Abhängigkeit des Ausdruckes A von den übrigen Ausdrücken zu berücksichtigen, noch die Art seiner Abhängigkeit von b und von c. U. s. w. Der Ausdruck A heißt endlich eine Funktion aller in ihm vorkommenden Ausdrücke b, c, d...., wenn man beachtet, daß er von ihnen allen abhängig ist, ohne danach zu fragen, wie er von ihnen abhängig, d. h. aus ihnen gebildet sei.

Der Ausdruck A kann übrigens ganz beliebig, oder auch abwechselnd, als Funktion des einen oder des anderen, oder mehrerer der Ausdrücke b, c, d.... angesehen werden, oder als Funktion aller.

Zuletzt werde der Begriff der Funktion erweitert dahin, daß wir jeden Ausdruck A eine Funktion nennen, sobald wir ihn in seiner Beziehung zu irgend einem Ausdruck B betrachten, welche Beziehung entweder die der Abhängigkeit ist, oder die der Unabhängigkeit. Hiernach ist z. B. ein einfacher Ausdruck a eine Funktion des Ausdrucks b, indem wir nämlich die Beziehung beachten, daß a von b nicht abhängt; und es kann a als Funktion von a gelten, indem sein Werth abhängig ist von seiner eigenen Aenderung.

Einen Ausdruck, welchen wir als Funktion betrachten, bezeichnen wir durch einen der Buchstaben f, F, ϕ, ψ, χ und dergl. Wird eine Funktion f als Funktion des Ausdrucks x angesehen, so schreiben wir f_x und lesen dies Zeichen Funktion x. Wird f als Funktion der beiden Ausdrücke x und y betrachtet, so schreiben wir $f_{x,y}$; u. s. w.

In den Fällen der Anwendung hat man es stets mit bestimmten Funktionen zu thun, d. h. mit solchen, bei welchen man die Art der Abhängigkeit kennt und beachtet.

Wir werden später dahin gelangen Gesetze abzuleiten, welche für allgemeine Funktionen gelten. — Das praktische Rechnen hat es mit bestimmten Zahlen zu thun und mit bestimmten Operationen. Die Algebra macht sich von den bestimmten Zahlen los, erhebt sich zu allgemeinen Zahlen; sie entwickelt Gesetze für bestimmte Operationen mit allgemeinen Zahlen, die also für alle besonderen Zahlen gelten. Bei der allgemeinen Funktion machen wir uns ferner los von jeder bestimmten Operation; und Gesetze, welche für allgemeine Funktionen gelten, müssen erfüllt werden von allen Ausdrücken, wie auch ihre Zusammensetzung beschaffen sein mag.

§. 101.

Jede Funktion eines urvariabeln Ausdrucks heißt abhängig variabel. Ein abhängig variabler Ausdruck repräsentirt

alle die Werthe, welche er durch die verschiedenen Werthe seines Urvariabeln erhält. Dabei kann und wird sich im Allgemeinen die Funktion in anderen Gränzen bewegen, als der Urveränderliche.

Den constanten Werth, welchen ein abhängig variabler Ausdruck f_x annimmt, wenn statt seines Urvariabeln x der constante Werth a gesetzt wird, bezeichnet man durch f_a.

§. 102.

Jede Funktion von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots.$$

in welcher die Coefficienten a, b, c, d.... constant, also von x unabhängig, sonst aber beliebig sind, heißt eine ganze Funktion von x. Eine ganze Funktion heißt vom nten Grade, wenn x^n die höchste Potenz von x ist, welche die Funktion enthält.

§. 103.

Ist für jeden Werth des Urvariabeln x die Funktion

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \dots.$$

gleich Null, so ist jeder von den Coefficienten a, b, c, d,.... gleich Null.

Der Voraussetzung gemäß geht die Gleichung

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \dots. = 0$$

in Erfüllung für jeden Werth von x. Sie findet daher auch Statt, wenn x Null ist. Für x = 0 folgt aus ihr

$$a = 0.$$

Ist a Null, so ist die obere Gleichung einerlei mit

$$bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \dots. = 0$$

oder mit

$$b + cx + dx^2 + gx^3 + \dots. = 0.$$

Der Urvariable x repräsentirt in dieser Gleichung noch jeden Werth, also auch den Werth Null; und da die Gleichung in Erfüllung gehen soll, wenn x Null ist, so muß

$$b = 0$$

sein. Die erste Gleichung geht für a = 0 und b = 0 über in

$$cx^2 + dx^3 + gx^4 + \dots. = 0$$

oder, durch x^2 dividirt, in

$$c + dx + gx^2 + \ldots . = 0.$$

Der Urvariable x repräsentirt immer noch jeden Werth; und für $x = 0$ geht die letzte Gleichung über in

$$c = 0.$$

Aehnlich kann erwiesen werden, daß $d = 0$ ist, u. s. f., u. s. f.

§. 104.

Sind für jeden Werth des Urvariabeln x die beiden Funktionen

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \ldots .$$

und

$$a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + g'x^4 + \ldots .$$

einander gleich, so sind die Coefficienten von einerlei Potenzen des Urvariabeln einander gleich, d. h. es ist

$$a = a'$$
$$b = b'$$
$$c = c' \text{ u. s. w.}$$

Wegen der Voraussetzung findet für jeden Werth des Urvariabeln x die Gleichung Statt

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \ldots . = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + g'x^4 + \ldots .$$

Aus ihr folgt

$$(a - a') + (b - b')x + (c - c')x^2 + (d - d')x^3 + (g - g')x^4 + \ldots . = 0$$

und da die erstere Gleichung für jeden Werth von x gilt, geht auch die letzte für jeden Werth von x in Erfüllung. Nach dem vorigen Paragraphen ist dann jeder von ihren Coefficienten gleich Null, und deshalb ist

$$a = a'$$
$$b = b'$$
$$c = c' \text{ u. s. w.}$$

§. 105.

Ist für jeden Werth der beiden Urveränderlichen x und y die Funktion

$$a + bx + cy + dx^2 + gxy + hy^2 + ky^3 + lx^2y + mxy^2 + ny^3 + \ldots,$$

gleich Null, so ist jeder von den Coefficienten gleich Null.

Man ordne die Funktion nach den Potenzen des einen Urveränderlichen, etwa x; das liefert

$$(a + cy + hy^2 + ny^3 + \ldots)x^0 + (b + gy + my^2 + \ldots)x + (d + ly + \ldots)x^2 + (k + \ldots)x^3 + \ldots$$

Diese Funktion ist gleichbedeutend mit der ersteren. Sie ist also gleich Null für jeden Werth von x; und deshalb ist nach §. 103 jeder von den Coefficienten gleich Null, d. h. es ist

$$a + cy + hy^2 + ny^3 + \ldots = 0$$
$$b + gy + my^2 + \ldots = 0$$
$$d + ly + \ldots = 0$$

u. s. f.

In diesen Gleichungen repräsentirt y jeden Werth. Nach §. 103 ist dann jeder Coefficient gleich Null; und die Coefficienten dieser Gleichungen sind bie Coefficienten der gegebenen Funktion.

§. 106.

Sind für jeden Werth der Urveränderlichen x und y die beiden Funktionen

$$a + bx + cy + dx^2 + gxy + hy^2 + kx^3 + lx^2y + mxy^2 + ny^3 + \ldots$$

und

$$a' + b'x + c'y + d'x^2 + g'xy + h'y^2 + k'x^3 + l'x^2y + m'xy + n'y^3 + \ldots$$

einander gleich, so sind die Coefficienten derselben Potenzen oder Produkte aus den Urveränderlichen einander gleich, d. h. es ist

$$a = a'$$
$$b = b'$$
$$c = c'$$
$$d = d'$$
$$g = g' \text{ u. s. f.}$$

Wegen der Voraussetzung findet die Gleichung

$$(a - a') + (b - b')x + (c - c')y + (d - d')x^2 + (g - g')xy + \ldots = 0$$

Statt für jeden Werth von x und von y. Nach dem vorstehenden Paragraphen ist daher jeder von den Coefficienten gleich Null, folglich

$$a = a'$$
$$b = b' \text{ u. s. f.}$$

§. 107.

Unter der absoluten Summe irgend einer Menge von beliebigen Ausdrücken wird die Summe verstanden, welche sich ergiebt, wenn man alle Ausdrücke absolut nimmt und sie addirt.

Der Ausdruck

$$1 - 4 + 12 - 32$$

z. B. ist gleich — 23; seine absolute Summe ist 49.

§. 108.

1) Dem Urveränderlichen x läßt sich jedesmal ein so kleiner Werth beilegen, daß das erste Glied der Funktion

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \ldots.$$

in absoluter Hinsicht größer wird, als die absolute Summe aller übrigen Glieder.

Erhellet aus den Elementen. Nöthigenfalls kann dx statt x gesetzt werden und dann würden gegen jedes einzelne Glied alle folgenden verschwinden.

2) Dem Urveränderlichen x läßt sich jedesmal ein so kleiner Werth beilegen, daß irgend ein Glied der Funktion

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \ldots.$$

in absoluter Hinsicht größer wird, als die absolute Summe aller Glieder, welche diesem Gliede folgen.

Wie zuvor.

3) Hat x einen so kleinen Werth, daß das erste Glied der erwähnten Funktion in absoluter Hinsicht größer ist als die absolute Summe aller übrigen Glieder, so ist der Werth der ganzen Funktion positiv, wenn das erste Glied positiv ist, und negativ, wenn das erste Glied negativ ist.

4) Hat x einen so kleinen Werth, daß das nte Glied der Funktion in absoluter Hinsicht größer ist, als die absolute Summe

aller ihm folgenden Glieder, so ist die Summe des nten Gliedes und aller ihm folgenden Glieder positiv oder negativ, je nachdem das nte Glied positiv ist oder negativ.

5) Ist x unendlich klein, so ist die Summe irgend eines Gliedes und aller Glieder, welche ihm folgen, positiv oder negativ, je nachdem jenes Glied es ist.

§. 109.

Eine Funktion $y = fx$ umkehren, heißt, den Variabeln x als Funktion von y herstellen.

Das Umkehren der Funktion $y = f_x$ geschieht, indem man aus der Gleichung $y = f_x$ die Gleichung $x = \phi_y$ ableitet.

Sollte z. B. die Funktion

$$y = a + bx + cx^2$$

umgekehrt werden, so entwickele man x aus der Gleichung, und es ergiebt sich

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a-y}{c}}.$$

§. 110.

Aufgabe. Die Funktion

$$y = bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \ldots.$$

umzukehren.

Auflösung. Man setze

$$x = By + Cy^2 + Dy^3 + Gy^4 + \ldots.$$

unter B, C, D, G .... constante aber noch unbekannte Ausdrücke verstanden. Alsdann ist

$$x^2 = B^2y^2 + 2BCy^3 + \left\{\begin{matrix} 2BD \\ + C^2 \end{matrix}\right\} y^4 + \left\{\begin{matrix} 2BG \\ + 2CD \end{matrix}\right\} y^5 + \ldots.$$

$$x^3 = B^3y^3 + 3B^2Cy^4 + \left\{\begin{matrix} 3B^2D \\ + 3BC^2 \end{matrix}\right\} y^5 + \ldots.$$

$$x^4 = B^4y^4 + 4B^3Cy^5 + \ldots.$$

$$x^5 = B^5y^5 + \ldots.$$

u. s. f.

Die Werthe für x, x^2, x^3 .... substituire man in der Gleichung

$$y = bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \ldots.$$

dadurch entsteht, wenn man auf Null bringt, und nach den Potenzen von y ordnet,

$$\left\{\begin{matrix} bB \\ -1 \end{matrix}\right\} y + \left\{\begin{matrix} bC \\ +cB^2 \end{matrix}\right\} y^2 + \left\{\begin{matrix} bD \\ +2cBC \\ +dB^3 \end{matrix}\right\} y^3 + \left\{\begin{matrix} bG \\ +2cBD \\ +cC^2 \\ +3dB^2C \\ +gB^4 \end{matrix}\right\} y^4 + \ldots. = 0.$$

Diese Gleichung muß in Erfüllung gehen für jeden Werth des Veränderlichen y. Daher ist nach §. 103 jeder Coefficient der Gleichung Null; und hierdurch gewinnt man für die unbekannten Coefficienten B, C, D .... die Gleichungen

$$bB - 1 = 0$$
$$bC + cB^2 = 0$$
$$bD + 2cBC + dB^3 = 0$$
$$bG + 2cBD + cC^2 + 3dB^2C + gB^4 = 0$$

u. s. f.

Aus ihnen folgt

$$B = \frac{1}{b}$$
$$C = -\frac{c}{b^3}$$
$$D = \frac{2c^2 - bd}{b^5}$$
$$G = -\frac{5c^3 - 5bcd + b^2g}{b^7}$$

u. s. f.

Daher ist die verlangte Funktion

$$x =$$
$$\frac{1}{b}y - \frac{c}{b^3}y^2 + \frac{2c^2 - bd}{b^5}y^3 - \frac{5c^3 - 5bcd + b^2g}{b^7}y^4 + \ldots.$$

Sollte man die Funktion

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \ldots.$$

umkehren, so bestimme man, was dasselbe leistet, x als Funktion von $y - a$.

Aus der gegebenen Funktion folgt nämlich

$$y - a = bx + cx^2 + dx^3 + gx^4 + \ldots.$$

und das ist der zuerst behandelte Fall.

Die Umkehrung der Funktionen giebt zu ausgedehnteren Untersuchungen Veranlassung.

§. 111.

Wenn eine Funktion f_x sich einem Werthe G nähert, während der Urveränderliche x einem Werthe g näher rückt, und die Funktion f_x den Werth G wirklich erreicht, sobald der Veränderliche x den Werth g erreicht, so nennt man jenen Werth G den Gränzwerth der Funktion für diesen Gang und diesen Gränzwerth von x, und bezeichnet ihn, indem man das Zeichen lim (limes Gränze) dem Zeichen f_x der Funktion vorsetzt.

So ist z. B. 1 der Gränzwerth der Funktion

$$a^x$$

wenn x sich dem Werthe Null nähert und ihn erreicht, also in diesem Sinn

$$\lim a^x = 1.$$

Uebungen und Praktisches.

§. 112.

1) Was ist das Grund-Differential, ein allgemeineres Differential? Was ist $\frac{dx}{n}$? Läßt sich dx in endlichen Zahlen ausdrücken? Was sind Differentiale erster, zweiter u. s. w. Ordnung? Was ist ein urveränderlicher Ausdruck, ein constanter? Was ist eine Funktion? Wann ist sie abhängig veränderlich? Ist ein veränderlicher Ausdruck unbekannt, oder ein constanter immer bekannt? Was ist eine ganze Funktion? Welche Sätze sind für sie hingestellt worden? Was heißt es, eine Funktion umkehren?

2) Es ist

$$(a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(b_0+b_1x^1+b_2x^2+b_3x^3+\dots)$$

$$=a_0b_0+\left\{\begin{matrix}a_0b_1\\+a_1b_0\end{matrix}\right\}x^1+\left\{\begin{matrix}a_0b_2\\a_1b_1\\a_2b_0\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}a_0b_3\\a_1b_2\\a_2b_1\\a_3b_0\end{matrix}\right\}x^3+\left\{\begin{matrix}a_0b_4\\a_1b_3\\a_2b_2\\a_3b_1\\a_4b_0\end{matrix}\right\}x^4+\dots$$

Man erkennt hier leicht das combinatorische Gesetz, nach welchem die Entwickelung fortschreitet.

3) Quotienten von der Form

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\dots}{a_I+b_Ix+c_Ix^2+d_Ix^3+\dots}$$

können vermittelst §. 98 des ersten Theils der Zahlenlehre in Summen von der Form

$$a_{II}+b_{II}x+c_{II}x^2+d_{II}x^3+\dots$$

verwandelt werden. Diese Verwandelung läßt sich auch mit Hilfe von §. 103 bewirken.

Man setze

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\dots}{a_I+b_Ix+c_Ix^2+d_Ix^3+\dots}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\dots$$

unter A, B, C, D .... unbekannte constante Ausdrücke verstanden, und multiplicire die Gleichung mit dem Nenner; das liefert:

$$a+bx+cx^2+dx^3+\dots$$

$$=a_IA+\left\{\begin{matrix}a_IB\\+b_IA\end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix}a_IC\\+b_IB\\+c_IA\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}a_ID\\+b_IC\\+c_IB\\+d_IA\end{matrix}\right\}x^3+\dots$$

oder, wenn man die Gleichung auf Null bringt,

$$\left\{\begin{matrix}a_IA\\-a\end{matrix}\right\}x^0+\left\{\begin{matrix}a_IB\\+b_IA\\-b\end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix}a_IC\\+b_IB\\+c_IA\\-c\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}a_ID\\+b_IC\\+c_IB\\+d_IA\\-d\end{matrix}\right\}x^3+\dots=0.$$

Diese Gleichung muß für jeden Werth von x in Erfüllung gehen. Daher ist nach §. 103 jeder von ihren Coefficienten

gleich Null; und dieser Umstand liefert die nachstehenden Gleichungen für die unbekannten Coefficienten A, B, C, D....:

$$a_I A - a = 0$$
$$a_I B + b_I A - b = 0$$
$$a_I C + b_I B + c_I A - c = 0$$
$$a_I D + b_I C + c_I B + d_I A - d = 0$$
u. s. w.

Aus ihnen folgt

$$A = \frac{a}{a_I}$$

$$B = \frac{a_I b - a b_I}{a_I^2}$$

$$C = \frac{(a_I c - a c_I) a_I - (a_I b - a b_I) b_I}{a_I^3}$$

$$D = \frac{[(a_I d - a d_I) a_I - (a_I b - a b_I) c_I] a_I - [(a_I c - a c_I) a_I - (a_I b - a b_I) b_I] b_I}{a_I^4}$$

u. s. w.

Sonach hat man

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots.}{a_I + b_I x + c_I x^2 + d_I x^3 \ldots.}$$
$$= \frac{a}{a_I} + \frac{a_I b - a b_I}{a_I^2} x + \frac{(a_I c - a c_I) a_I - (a_I b - a b_I) b_I}{a_I^3} x^2 + \ldots.$$

Ist a_I gleich Null, so nehmen alle Coefficienten der rechts stehenden Funktion die Form $\frac{n}{0}$ an. Dieser Quotient bedeutet hier nicht unendlich groß, sondern, daß es keine Zahlen giebt, welche Coefficienten der rechts stehenden Funktion sein könnten; die links stehende gebrochene Funktion kann daher, unter der Voraussetzung, daß $a_I = 0$ ist, nicht in eine Funktion von der Form

$$a_{II} + b_{II} x + c_{II} x^2 + \ldots.$$

verwandelt werden.

Beispiele.

α) $\frac{a+x}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{a-b}{b^2}x+\frac{a-b}{b^3}x^2-\frac{a-b}{b^4}x^3+\ldots.$

β) $\frac{a+bx+cx^2}{d+gx}=\frac{a}{d}+\frac{bd-ag}{d^2}x+\frac{cd^2-(bd-ag)g}{d^3}x^2+\ldots$

γ) $\frac{32+x^5}{2+x}=16-8x+4x^2-2x^3+x^4.$

4) Eine ganze Funktion f_x ist durch eine ganze Funktion ϕ_x theilbar, und die Funktion ϕ_x heißt ein Theiler zu f_x, wenn es eine dritte ganze Funktion ψ_x giebt, so daß $f_x=\phi_x\cdot\psi_x$, oder was dasselbe sagt $\frac{f_x}{\phi_x}=\psi_x$ ist.

Nach dieser Erklärung läßt sich sofort der größte Theil der Erklärungen und Sätze des sechsten Kapitels vom ersten Theil der Zahlenlehre auf ganze Funktionen übertragen.

5) Ist f_x theilbar durch ϕ_x, so ist auch, unter a und b beliebige von x unabhängige Ausdrücke verstanden, die nicht Null sind, af_x durch $b\phi_x$ theilbar und der Quotient $\frac{af_x}{b\phi_x}$ unterscheidet sich von dem Quotienten $\frac{f_x}{\phi_x}$ nur durch einen von x unabhängigen Faktor. Denn es ist $\frac{af_x}{b\phi_x}=\frac{a}{b}\cdot\frac{f_x}{\phi_x}$.

Wenn man daher den größten Theiler zu zweien Funktionen von x bestimmt, nach Anleitung von §. 170 und 172 14), des ersten Theils der Zahlenlehre, so darf man bei jeder einzelnen Division den Dividend oder den Divisor (denn es darf oben a oder b gleich 1 gesetzt werden), oder auch beide, mit beliebigen von x unabhängigen Ausdrücken, die nicht Null sind, multipliciren, und man wird immer den größten Theiler erhalten; und sich durch solches Multipliciren Erleichterungen verschaffen können.

Den größten Theiler der Funktionen $2x^2+5x-12$ und $7x^2+25x-12$ zu bestimmen, rechne man z. B. folgendermaßen

$$\begin{array}{rr|r|r|l}
2x^2 + 5x - 12 & 7x^2 + 25x - 12 & \tfrac{7}{2} & & \\
 & 7x^2 + \tfrac{35}{2}x - 42 & & & \\
\hline
 & \tfrac{15}{2}x + 30 & 2x^2 + 5x - 12 & 2x - 3 & \\
[(\tfrac{15}{2}x + 30)\cdot\tfrac{2}{15} =] & x + 4 & 2x^2 + 8x & & \\
\hline
 & & -3x - 12 & & \\
 & & -3x - 12 & & \\
\hline
 & & 0 & &
\end{array}$$

Beispiele.

$\alpha)$ $$\frac{2x^3 + 7x^2 - 14x + 5}{x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 9x + 3} = \frac{x + 5}{\frac{1}{2}x^2 + 3}$$

$\beta)$ $$\frac{x^5 - x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 4x - 7}{2x^4 + 5x^3 - 6x^2 - x + 35} = \frac{x^2 - x - 1}{2x + 5}$$

$\gamma)$ $$\frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - x^2 - 21x + 45} = \frac{x + 1}{x + 5}.$$

Umkehrung der Reihen.

6) $$y = \frac{1}{10}x - \frac{2}{10^3}x^2 + \frac{2^2}{10^5}x^3 - \frac{2^3}{10^7}x^4 + \ldots.$$

$$x = 10y + 2y^2 + \tfrac{2}{5}y^3 + \tfrac{2}{25}y^4 + \ldots.$$

7) $$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

$$x = (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \ldots.$$

8) $$y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \ldots. = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

$$x = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \ldots.$$

$$y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

Aus der gegebenen Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y wird x als Funktion von y, und y als Funktion von x nach Anleitung des §. 110 gefunden. Um x als Funktion von y zu erhalten, substituirt man statt x die Reihe

$$Ay + By^2 + Cy^3 + \dots.$$

bringt die Gleichung auf Null, ordnet sie nach den Potenzen von y, setzt jeden Coefficienten gleich Null, und entwickelt aus den hierdurch entstandenen Gleichungen die Coefficienten A, B, C.... Eben so wird verfahren, um y als Funktion von x herzustellen.

9) $$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots.$$

$$x = y + \frac{1}{2\cdot3}y^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}y^5 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}y^7 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9}y^9 + \dots$$

Bei diesem Beispiel ist leicht zu erkennen, daß sich x als Funktion von y durch eine Reihe ausdrücken werde, welche nur die ungeraden Potenzen von y enthält. Nach der gegebenen Gleichung hängen x und y dergestalt von einander ab, daß beide gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln, d. h. wird dem Veränderlichen x das entgegengesetzte Vorzeichen gegeben, so nimmt auch y sein entgegengesetztes Vorzeichen an, und umgekehrt. Diese Abhängigkeit leidet keine Aenderung, wenn x als Funktion von y hergestellt ist. Sie findet aber nur Statt, wenn

$$x = Ay + By^3 + Cy^5 + \dots.,$$

ist. Man substituire daher für x diese Reihe. Setzte man übrigens

$$x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \dots.$$

so würde sich jeder Coefficient einer geraden Potenz von y gleich Null ergeben.

Achtes Kapitel.

Von der Convergenz der Reihen. Unendliche geometrische Progression.

§. 113.

Es seien x, a, b beliebige absolute Werthe, n sei eine positive ganze Zahl, und wachse bis $+\infty$; dann ist

$$1)\ \lim(1+x)^n = +\infty$$

$$2)\ \lim\left(\frac{a+b}{a}\right)^n = +\infty$$

$$3)\ \lim\left(\frac{a}{a+b}\right)^n = +\frac{1}{\infty}$$

Nach dem binomischen Satz ist

$$(1+x)^n = 1 + nx + n_2x^2 + n_3x^3 + \ldots.$$
$$= 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Wächst nun die ganze Zahl n, so wächst die Reihe, es verschwinden zuletzt die Subtrahenden in den Differenzen und sie wird $+\infty$. Daraus erhellet 1).

Es ist

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^n = \left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

Danach erhellet 2) aus 1).

Endlich ist

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{b}{a}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^n}$$

und es erhellet auch 3) aus 1).

Es möge noch bemerkt werden, daß $\left(\frac{a+b}{a}\right)^n$ zunimmt, $\left(\frac{a}{a+b}\right)^n$ dagegen abnimmt, während n wächst.

§. 114.

Es sei n eine positive ganze Zahl, welche zunimmt bis ∞. Ist x ein absoluter Werth, größer als 1, so wächst alsdann x^n, und zwar bis $+\infty$, nach 2) im vorigen Paragraph; ist dagegen x ein absoluter Werth, kleiner als 1, so nimmt x^n ab, bis $\frac{1}{\infty}$, nach 3) im vorigen Paragraph.

§. 115.

Durch Division findet sich:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$
$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

Jeder von den rechts den Beschluß machenden Quotienten sei durch r bezeichnet und werde Rest genannt, die Summe der dem Rest vorangehenden n Glieder sei s_n, und q bezeichne den Werth des ursprünglichen Quotienten $\frac{1}{1-x}$. Dann stellt

$$q = s_n + r$$

jede der oberen Gleichungen dar.

Es sei nun

1) x ein absoluter Werth und kleiner als 1, oder in Zeichen ausgedrückt

$$0 < x < 1.$$

[Die Differenz $1 - x$ hat unter der gegenwärtigen Voraussetzung im Allgemeinen einen endlichen Werth, und ist als einen solchen habend anzusehen. Läge x dem Werthe 1 so äußerst nahe, daß $1 - x$ zu einem Differential bdx herabsänke, so folgte aus

$$1 - x = b \cdot dx$$
$$x = 1 - b \cdot dx$$

und es müßte, nach den Erörterungen im vorigen Kapitel $x = 1$ gesetzt werden, welches die gegenwärtige Voraussetzung ausschließt. Ueberhaupt ist zu unterscheiden ob $x < 1$ oder $x \leqq 1$.]

Der Rest r ist bei unserer Voraussetzung um so kleiner, je größer die Anzahl n der ihm vorangehenden Glieder ist, und er verschwindet, wenn $n = \infty$; denn sein Nenner $1 - x$ hat einen endlichen Werth, und sein Zähler x^n nimmt nach den vorstehenden Paragraphen ab, während n wächst, und verschwindet für $n = \infty$. — Man hat daher näherungsweise

$$q = s_n$$

um so genauer, je größer n ist; und für $n = \infty$ ist vollkommen richtig:

$$q = s_\infty.$$

2) Es sei andererseits

$$-1 < x < 0$$

d. h. x negativ und in absoluter Hinsicht kleiner als 1.

Der Rest r ist positiv oder negativ, je nachdem n gerade oder ungerade; sein absoluter Werth nimmt ab, während n wächst und verschwindet mit $n = \infty$. Daher ist näherungsweise

$$q = s_n$$

um so genauer, je größer n, und genau

$$q = s_\infty.$$

3) Es sei $x = 1$.

In diesem Fall ist $q = \frac{1}{0} = \infty$, auch $r = \infty$. Es ist daher nicht näherungsweise q in s_n zu erhalten; aber es ist

$$q = s_\infty$$

und die Reihe ist

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ ohne Ende.}$$

4) Es sei $x = -1$.

Jetzt ist $q = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$; die Summe

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1 - x}$$

geht über in

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \mp 1 \pm \frac{1}{2}$$

je nachdem n gerade ist oder ungerade, und es ist q nicht näherungsweise in s_n noch in s_∞ zu erhalten. Der Werth der unendlichen Reihe an sich

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

ist unbestimmt.

5) Es sei $x > 1$.

Es ist dann $1 - x$ negativ, also q negativ. Der Rest r ist gleichfalls negativ; er wird in absoluter Hinsicht größer, wenn n zunimmt, und ist $-\infty$, wenn $n = \infty$. Die Glieder der Summe s_n sind sämmtlich positiv und steigen. Die Summe s_n entfernt sich mehr und mehr von q, je größer die Anzahl ihrer Glieder genommen wird, und ist ∞, wenn $n = \infty$.

6) Es sei endlich $x < -1$.

Der Rest r wächst in absoluter Hinsicht während n zunimmt, und wird ∞, wenn $n = \infty$. Die Summe s_n entfernt sich daher mehr und mehr von q während n wächst, und sie ist ∞, wenn $n = \infty$.

Auf zwei Ergebnisse dieser Erörterungen lenken wir vorläufig die Aufmerksamkeit.

Die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

liefert, bei gewissen Werthen von x, in der Summe s_n ihrer ersten n Glieder näherungsweise den Quotienten q, um so genauer, je größer n ist, und es fällt die Summe s_∞ aller ihrer unendlich vielen Glieder vollkommen mit dem Quotienten q zusammen; während bei anderen Werthen von x die Summe s_n sich bei steigendem n mehr und mehr von dem Werthe des Quotienten q entfernt. Das Erste ist der Fall, wenn bei steigendem n das Restglied r abnimmt und bei $n = \infty$ verschwindet; das Andere, wenn r zunimmt mit n.

§. 116.

Unendliche Reihen ergeben sich bei vielen Gelegenheiten, und zwar ohne jedesmal aus endlichen, ihren Werth ausdrückenden Formen zu entspringen; auch können sie willkürlich gebildet werden. Sie erlangen für die Folge Wichtigkeit.

Eine unendliche Reihe liegt entweder in bestimmten Zahlen vor, oder sie ist Funktion eines oder mehrerer Variabeln.

Andererseits ist entweder eine endliche Form bekannt, als deren Repräsentant die unendliche Reihe sich darstellt (vorige Paragraph), oder es ist eine solche Form nicht bekannt. Und ist eine endliche Form nicht bekannt, so ist sie entweder möglich oder überhaupt unmöglich.

Ist eine endliche Form bekannt oder möglich, so kann immer ein Restglied r_n gedacht, vielleicht auch ermittelt werden (wenn es sich nicht sofort ergiebt), von der Beschaffenheit, daß es die Summe s_n der ersten n Glieder der Reihe zu dem Werth ergänzt, welchen die unendliche Reihe vorstellt. Oft auch kann oder muß man sich mit einem Näherungsausdruck für das Restglied begnügen.

Ist die endliche Form nicht möglich, so ist auch das Restglied in endlicher Gestalt nicht möglich, weil man sonst zu einer endlichen Form für den Werth der unendlichen Reihe gelangen würde. Es ist dann nur ein sich näherndes Restglied in endlicher Form denkbar, und vielleicht zu erlangen.

Nimmt das Restglied r_n ab, während n wächst, und verschwindet es, wenn $n = \infty$, so nähert sich die Summe s_n, während n zunimmt, mehr und mehr dem Werthe, welchen die unendliche Reihe repräsentirt, und fällt mit dem Werthe der Reihe zusammen, wenn $n = \infty$. Nimmt dagegen das Restglied zu, während n wächst, und wird es unendlich, wenn $n = \infty$, so entfernt sich die Summe s_n bei steigendem n fortdauernd von dem Werthe, deren Repräsentant die Reihe ist.

Liegt eine unendliche Reihe vor, ist ein endlicher Ausdruck, als dessen Repräsentant die Reihe zu betrachten wäre, nicht bekannt, noch ihr Restglied genau oder annähernd, so kann man zunächst nur prüfen, ob die Summe s_n bei steigendem n sich mehr und mehr einem bestimmten endlichen Werth nähere und ihn erreiche bei $n = \infty$, oder nicht.

Dieselbe unendliche Reihe kann aus verschiedenen endlichen Formen entspringen, deren jede dann ein besonderes Restglied bedingt. So ist z. B.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

und, wie leicht erhellet

$$\frac{1-f_x}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n - f_x}{1-x}$$

während n bis ∞ zunehmen darf.

Bei einer unendlichen Reihe ziehen wir daher stets den Werth zunächst in Betracht, welchen sie unmittelbar an sich als unendliche Reihe vorstellt.

§. 117.

Eine unendliche Reihe heißt convergent, wenn die Summe aller ihrer Glieder einen endlichen Werth hat, divergent, wenn die Summe aller ihrer Glieder unendlich ist, oder unbestimmt.

Eine convergente Reihe ist entweder durchaus fallend, oder es nehmen die Glieder von irgend einem späteren an fortdauernd ab. Eine fallende Reihe ist aber nicht nothwendig convergent.

Es kann ein Steigen oder Fallen Statt finden ohne Ende fort, während nur ein endlicher Werth als Gränze erreicht wird. Die in einem Kreise liegenden regulären n ecke wachsen, wenn n zunimmt, ohne Ende fort, aber nur bis zum Kreise selbst, der hier die endliche Gränze bildet; die um den Kreis liegenden regulären n ecke nehmen ab, während n wächst ohne Ende fort, bis zum Kreise.

Steigt eine Reihe ohne Ende, so werden entweder die Glieder zuletzt unendlich, oder es ist die Reihe doch die algebraische Summe aus unendlich vielen endlichen Werthen. Das letzte ist auch der Fall bei einer unendlichen fallenden Reihe deren kleinstes Glied einen endlichen Werth hat.

Das Fallen oder Steigen wird stets nach den absoluten Werthen der Glieder beurtheilt.

§. 118.

Die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Eine unendliche Reihe liegt entweder in bestimmten Zahlen vor, oder sie ist Funktion eines oder mehrerer Variabeln.

Andererseits ist entweder eine endliche Form bekannt, als deren Repräsentant die unendliche Reihe sich darstellt (vorige Paragraph), oder es ist eine solche Form nicht bekannt. Und ist eine endliche Form nicht bekannt, so ist sie entweder möglich oder überhaupt unmöglich.

Ist eine endliche Form bekannt oder möglich, so kann immer ein Restglied r_n gedacht, vielleicht auch ermittelt werden (wenn es sich nicht sofort ergiebt), von der Beschaffenheit, daß es die Summe s_n der ersten n Glieder der Reihe zu dem Werth ergänzt, welchen die unendliche Reihe vorstellt. Oft auch kann oder muß man sich mit einem Näherungsausdruck für das Restglied begnügen.

Ist die endliche Form nicht möglich, so ist auch das Restglied in endlicher Gestalt nicht möglich, weil man sonst zu einer endlichen Form für den Werth der unendlichen Reihe gelangen würde. Es ist dann nur ein sich näherndes Restglied in endlicher Form denkbar, und vielleicht zu erlangen.

Nimmt das Restglied r_n ab, während n wächst, und verschwindet es, wenn $n = \infty$, so nähert sich die Summe s_n, während n zunimmt, mehr und mehr dem Werthe, welchen die unendliche Reihe repräsentirt, und fällt mit dem Werthe der Reihe zusammen, wenn $n = \infty$. Nimmt dagegen das Restglied zu, während n wächst, und wird es unendlich, wenn $n = \infty$, so entfernt sich die Summe s_n bei steigendem n fortdauernd von dem Werthe, deren Repräsentant die Reihe ist.

Liegt eine unendliche Reihe vor, ist ein endlicher Ausdruck, als dessen Repräsentant die Reihe zu betrachten wäre, nicht bekannt, noch ihr Restglied genau oder annähernd, so kann man zunächst nur prüfen, ob die Summe s_n bei steigendem n sich mehr und mehr einem bestimmten endlichen Werth nähere und ihn erreiche bei $n = \infty$, oder nicht.

Dieselbe unendliche Reihe kann aus verschiedenen endlichen Formen entspringen, deren jede dann ein besonderes Restglied bedingt. So ist z. B.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

und, wie leicht erhellet

$$\frac{1-f_x}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. + x^{n-1} + \frac{x^n - f_x}{1-x}$$

während n bis ∞ zunehmen darf.

Bei einer unendlichen Reihe ziehen wir daher stets den Werth zunächst in Betracht, welchen sie unmittelbar an sich als unendliche Reihe vorstellt.

§. 117.

Eine unendliche Reihe heißt convergent, wenn die Summe aller ihrer Glieder einen endlichen Werth hat, divergent, wenn die Summe aller ihrer Glieder unendlich ist, oder unbestimmt.

Eine convergente Reihe ist entweder durchaus fallend, oder es nehmen die Glieder von irgend einem späteren an fortdauernd ab. Eine fallende Reihe ist aber nicht nothwendig convergent.

Es kann ein Steigen oder Fallen Statt finden ohne Ende fort, während nur ein endlicher Werth als Gränze erreicht wird. Die in einem Kreise liegenden regulären n ecke wachsen, wenn n zunimmt, ohne Ende fort, aber nur bis zum Kreise selbst, der hier die endliche Gränze bildet; die um den Kreis liegenden regulären n ecke nehmen ab, während n wächst ohne Ende fort, bis zum Kreise.

Steigt eine Reihe ohne Ende, so werden entweder die Glieder zuletzt unendlich, oder es ist die Reihe doch die algebraische Summe aus unendlich vielen endlichen Werthen. Das letzte ist auch der Fall bei einer unendlichen fallenden Reihe deren kleinstes Glied einen endlichen Werth hat.

Das Fallen oder Steigen wird stets nach den absoluten Werthen der Glieder beurtheilt.

§. 118.

Die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.$$

ist convergent, wenn

$$-1 < x < +1$$

und ihr vollständiger Werth ist alsdann

$$\frac{1}{1-x}$$

dagegen ist sie divergent, wenn

$$+1 \leqq x \leqq -1.$$

Hat die Reihe an sich einen endlichen Werth, so sei er s. Aus

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.$$

folgt $s = 1 + x[1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.]$

$$s = 1 + x \cdot s$$

also $s = \dfrac{1}{1-x}.$

Das Weitere erhellet aus §. 115.

Wir nennen diese Reihe die **unendliche geometrische Progression**, schlechthin die **geometrische Reihe**.

Man hat nun ferner

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots$$
$$= a[1 + x + x^2 + \ldots.]$$
$$= \frac{a}{1-x}.$$

§. 119.

Das n te Glied einer unendlichen Reihe bezeichnen wir durch t_n, u_n, u. dergl., unter n Stellenzahl verstanden. Eine unendliche Reihe wird demnach dargestellt durch:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots.$$

§. 120.

Ist die unendliche Reihe

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots.$$

convergent, so ist, unter a einen endlichen Werth verstanden, auch die Reihe

$$at_1 + at_2 + at_3 + at_4 + \ldots.$$

convergent.

Denn ist der Werth der ersten Reihe endlich, so ist es auch der der anderen.

§. 121.

Die unendliche Reihe

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots.$$

sei convergent, und jedes Glied sei positiv. Die Summe s_I beliebig vieler beliebig aus ihr entnommener Glieder ist positiv und von endlichem Werth.

Die Summe der übrigen Glieder sei s_{II}, die Summe der Reihe sei s. Zunächst sind s_I und s_{II} offenbar positiv, und keiner dieser positiven Werthe kann unendlich sein, weil sonst ihre Summe $s_I + s_{II}$ nicht den endlichen positiven Werth s liefern könnte.

Daher ist z. B. die Reihe

$$t_2 + t_4 + t_6 + \ldots.$$

convergent.

§. 122.

Es sei die Reihe

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots.$$

convergent und jedes Glied sei positiv. Werden in dieser Reihe beliebig viele Glieder an beliebigen Stellen negativ gesetzt, so ist die so geänderte Reihe auch convergent.

Die Summe dieser geänderten Glieder ist negativ, und endlich nach dem vorigen Paragraph. Sie sei $-s_I$. Die Summe s_{II} der übrigen Glieder ist gleichfalls endlich. Der Werth der geänderten Reihe ist $s_{II} - s_I$, mithin endlich.

Demnach wäre z. B.

$$t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \ldots.$$

convergent.

§. 123.

Eine unendliche Reihe, bei welcher vom zweiten Gliede ab jedes Glied in absoluter Hinsicht kleiner ist als das vorangehende, und deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, ist convergent.

Die Reihe sei

$$t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + t_5 - t_6 + \ldots.$$

Die Summe der Reihe sei s. Es ist

$$s = t_1 - (t_2 - t_3) - (t_4 - t_5) - \ldots.$$

auch

$$s = (t_1 - t_2) + (t_3 - t_4) + (t_5 - t_6) + \ldots.$$

Da jedes Glied der Reihe größer ist als das nächst folgende, so sind die Differenzen $t_2 - t_3, t_4 - t_5 \ldots., t_1 - t_2, t_3 - t_4, \ldots.$ sämmtlich positiv. Deshalb ist

$$s < t_1$$

zugleich

$$s > t_1 - t_2.$$

Es liegt also s zwischen zwei positiven Gränzen, und ist deshalb endlich. — Ist andererseits

$$-t_1 + t_2 - t_3 + t_4 - \ldots.$$

die gegebene Reihe, so findet sich eben so

$$s > -t_1$$

zugleich

$$s < -(t_1 - t_2)$$

und dann liegt s zwischen zwei negativen Gränzen, ist also ebenfalls endlich.

§. 124.

Jeder einzelne der Werthe $q, q', q'', \ldots.$ befinde sich zwischen den Gränzen -1 und $+1$, d. h. es sei

$$-1 < q < +1$$

$$-1 < q' < +1 \text{ u. s. f.}$$

dann ist die Reihe

$$1)\quad 1 + q + qq' + qq'q'' + \ldots.$$

convergent.

Der größte Werth, welcher in absoluter Hinsicht unter den Werthen $q, q', \ldots.$ sich findet, sei, positiv genommen, g. Dann ist $-1 < g < +1$ und die Reihe

$$2)\quad 1 + g + g^2 + g^3 + \ldots.$$

convergent nach §. 118.

Nun sei zuerst jeder der Werthe $q, q', q'', \ldots.$ positiv. Dann ist der Werth der Reihe 1) positiv, aber kleiner als der der Reihe 2), folglich endlich, also die Reihe 1) convergent.

Zweitens seien beliebig viele der Werthe $q, q', q'', \ldots$ negativ. Dann ist eine Anzahl von Gliedern der Reihe 1) negativ, und die Reihe ist convergent nach §. 122.

Folglich ist die Reihe 1) stets convergent.

§. 125.

Es sei

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1} + t_n + t_{n+1} + \ldots$$

eine unendliche Reihe. Man dividire jedes Glied in das nächst folgende. Liegt einer der entstehenden Quotienten etwa $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ innerhalb der Gränzen -1 und $+1$, und befinden sich alle folgenden Quotienten innerhalb derselben Gränzen, so ist die Reihe convergent.

Es sei

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = q \text{ und } -1 < q < +1$$

$$\frac{t_{n+2}}{t_{n+1}} = q' \text{ und } -1 < q' < +1$$

$$\frac{t_{n+3}}{t_{n+2}} = q'' \text{ und } -1 < q'' < +1 \text{ u. s. f.}$$

Dann ist

$$t_{n+1} = t_n \cdot q$$

$$t_{n+2} = t_{n+1} \cdot q' = t_n \cdot qq'$$

$$t_{n+3} = t_{n+2} \cdot q'' = t_n \cdot qq'q''.$$

Die Reihe läßt sich wiedergeben durch:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1} + t_n(1 + q + qq' + qq'q'' + \ldots)$$

und es erhellet ihre Convergenz aus dem vorigen Paragraphen.

§. 126.

Es sei

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

eine unendliche nach den Potenzen eines Urveränderlichen x fortschreitende Reihe; die den Coefficienten unten beigefügten Ziffern sind Stellenzahlen.

Man dividire jedes Glied in das nächst folgende und es sei

$$\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}x = q$$

$$\frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_{n+1}x^{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}x = q_{I}$$

$$\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}x = q_{II}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\frac{a_{\infty+1}}{a_\infty}x = q_\infty.$$

Die Werthe der Quotienten q, q_{I}, q_{II}, ... hängen ab einerseits von den constanten Quotienten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \ldots,$$

andererseits von den Werthen des Variabeln x. Die vorgelegte Reihe ist convergent, wenn jeder der Quotienten q, q_{I}, ... innerhalb der Gränzen -1 und $+1$ sich befindet.

Wir setzen voraus, daß in absoluter Hinsicht entweder

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < \ldots\ldots < \frac{a_{\infty+1}}{a_\infty}$$

sei, oder

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} > \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} > \ldots\ldots > \frac{a_{\infty+1}}{a_\infty}.$$

Zuerst sei

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < \ldots\ldots < \frac{a_{\infty+1}}{a_\infty}$$

in absoluter Hinsicht.

Der positive oder negative Werth des Quotienten $\frac{a_{\infty+1}}{a_\infty}$ sei durch A bezeichnet, und es stelle x' einen besonderen positiven oder negativen Werth des Variabeln x vor, von der Beschaffenheit, daß

$$-1 < Ax' < +1.$$

In absoluter Hinsicht, auch x' absolut nehmend, ist dann

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}x' < \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}x' < \dots < \frac{a_{\infty+1}}{a_\infty}x'$$

Ist aber

$$0 < +z < +1$$

so folgt

$$0 > -z > -1$$

und es erhellet, daß wenn wir die constanten Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}\dots$ mit den ihnen ursprünglich zugehörigen Vorzeichen + oder — nehmen, eben so x',

$$-1 < \frac{a_{n+1}}{a_n}x' < +1$$

$$-1 < \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}x' < +1$$

$$-1 < \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}x' < +1$$

u. s. f.

sein muß.

Unter der gegenwärtigen Voraussetzung ist daher die vorgelegte Reihe nach §. 125 convergent für jeden Werth von x, welcher der Bedingung genügt:

$$-1 < Ax < +1.$$

Wird hier durch A dividirt, so entsteht, wenn A positiv ist

$$-\frac{1}{A} < x < +\frac{1}{A}$$

und, wenn A negativ,

$$+\frac{1}{A} > x > -\frac{1}{A}.$$

Beides ist dasselbe. Die Reihe ist also convergent für alle Werthe des Variabeln x, welche sich innerhalb der Gränzen $-\frac{1}{A}$ und $+\frac{1}{A}$ befinden.

Wir setzen andererseits voraus, es sei in absoluter Hinsicht

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} > \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} > \dots > \frac{a_{\infty+1}}{a_\infty}.$$

Der positive oder negative Werth des Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sei durch B bezeichnet. Nach Anleitung der eben durchgeführten Erörterungen erhellet bald, daß die vorgelegte Reihe convergent sein werde für alle Werthe von x, welche gleichzeitig den beiden Bedingungen genügen:

$$-1 < Ax < +1$$

und

$$-1 < Bx < +1$$

oder

$$-\frac{1}{A} < x < +\frac{1}{A}$$

und

$$-\frac{1}{B} < x < +\frac{1}{B}.$$

Beide Bedingungen werden erfüllt, sobald x innerhalb der Gränzen sich befindet, welche die engeren sind

Ueberhaupt also: steigen jene constanten Quotienten in absoluter Hinsicht, so muß, damit die vorgelegte Reihe convergent ausfalle,

$$-\frac{1}{A} < x < +\frac{1}{A}$$

genommen werden; fallen dagegen die constanten Quotienten, so muß x der Bedingung entsprechen:

$$-\frac{1}{A} < x < +\frac{1}{A}$$

oder der

$$-\frac{1}{B} < x < +\frac{1}{B}$$

je nachdem die ersten Gränzen die engeren sind oder die anderen.

Entspringt der Werth $B = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ aus den Coefficienten zweier benachbarten Glieder, welche nicht eine bestimmte Stelle in der Reihe einnehmen, und dürfen diese ohne Ende fort weiter hinaus geschoben werden, so fällt B zuletzt mit A zusammen und die Gränzen $-\frac{1}{B}$ und $+\frac{1}{B}$ gerathen in die $-\frac{1}{A}$ und $+\frac{1}{A}$.

§. 127.

Die unendliche Reihe

$$1 + gx + g_2x^2 + g_3x^3 + \ldots.$$

unter g_2, g_3 u. s. f. Binomial-Coefficienten verstanden, ist convergent, wenn

$$-1 < x < +1.$$

Wegen §. 37 ist die Reihe endlich, wenn g eine positive ganze Zahl bedeutet. Damit die Reihe unendlich ausfalle, muß g eine positive oder negative gebrochene, oder eine negative ganze Zahl vorstellen. Vergl. §. 38.

Die Quotienten

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} \quad \frac{g_{n+2}}{g_{n+1}} \quad \frac{g_{n+3}}{g_{n+2}} \ldots.$$

reduciren sich auf

$$\frac{g-n}{n+1} \quad \frac{g-(n+1)}{n+2} \quad \frac{g-(n+2)}{n+3} \ldots.$$

Der Quotient

$$\frac{g-n}{n+1}$$

kann als Repräsentant aller der hier sich ergebenden Quotienten betrachtet werden, denn sie gehen hervor, wenn man in ihm statt n alle ganzen Werthe denkt von 0 bis $+\infty$.

g ist eine negative Zahl, oder positiv und gebrochen. Daher schreitet der Quotient

$$\frac{g-n}{n+1}$$

während n durch die ganzen Zahlen von 0 bis $+\infty$ steigt (d. h. es schreiten alle jene Quotienten), in absoluter Hinsicht steigend fort.

Ferner ist

$$\frac{g-n}{n+1} = \frac{\frac{g}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Für $n = \infty$ ist dies -1, d. h. es ist $A = -1$.

Die Reihe ist daher convergent, wenn x innerhalb der Gränzen

$$\frac{1}{-1} \text{ und } \frac{-1}{-1}$$

sich befindet, d. h. wenn

$$-1 < x < +1$$

und das ist der Satz.

§. 128.

Die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

ist convergent, wenn

$$-\infty < x < +\infty.$$

Der Quotient

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

reducirt sich auf

$$\frac{1}{n+1}$$

und er gewährt alle in gleicher Weise gebildeten Quotienten, wenn n sämmtliche ganze Werthe von 0 bis $+\infty$ vorstellt.

Der Quotient fällt in absoluter Hinsicht, während n zunimmt; er ist $\frac{1}{\infty}$ wenn $n = \infty$, d. h. es ist $A = \frac{1}{\infty}$.

Die Gränzen $-\frac{1}{A}$ und $+\frac{1}{A}$ sind $-\infty$ und $+\infty$.

Die Gränzen $-\frac{1}{B}$ und $+\frac{1}{B}$ sind

$$-(n+1) \text{ und } +(n+1)$$

n ist nicht beschränkt, kann ohne Ende fort größer genommen werden. Folglich ist die Reihe convergent, wenn

$$-\infty < x < +\infty.$$

Zur Erläuterung Folgendes:

Wenn man in der Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

10 statt x setzt, so ist sie steigend bis zu dem Gliede $\frac{10^9}{9!}$; aber von dem Gliede $\frac{10^{10}}{10!}$ ab ist jedes folgende Glied kleiner als das voranstehende. Setzt man 1000 statt x, so steigt die Reihe anfänglich ebenfalls, und sie fällt erst von dem Gliede $\frac{1000^{1000}}{1000!}$ ab. Setzt man nun Werthe statt x innerhalb -10 und $+10$, so fällt die Reihe spätestens von dem Gliede $\frac{x^{10}}{10!}$ ab und ist convergent, setzt man Werthe innerhalb der Gränzen -1000 und $+1000$, so fällt sie spätestens von dem Gliede $\frac{x^{1000}}{1000!}$ ab und ist convergent. Daraus ersieht sich wie die Gränzen $-\frac{1}{B}$ und $+\frac{1}{B}$ können erweitert werden, ohne daß der Erweiterung eine Schranke entgegenträte.

§. 129.

Die Reihen

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots.$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots.$$

sind convergent, wenn

$$-\infty < x < +\infty.$$

Wegen des vorigen Paragraphen sind in den für x gegebenen Gränzen zunächst nach §. 121 die Reihen

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

convergent, und dann nach §. 122 auch die oberen Reihen.

§. 130.

Ist eine unendliche Reihe convergent, also die Summe aller ihrer Glieder endlich, so kann man entweder diese Summe allgemein und vollständig bestimmen (wie z. B. bei der geometrischen Reihe), oder man kann sie näherungsweise erhalten, indem man eine Anzahl der ersten Glieder addirt. Die genäherte Bestimmung der Summe kann natürlich nur bei numerisch gegebenen Reihen erfolgen. Wie viele der ersten Glieder man zu addiren habe, um eine gewisse Genauigkeit zu erhalten, hängt von der Natur der Reihe ab. In jedem Fall muß nachgewiesen werden, welche Genauigkeit, oder daß die erforderliche erreicht sei. Im Allgemeinen läßt sich hierüber folgendes sagen: Es sei s die vollständige Summe aller Glieder einer convergenten Reihe. Man habe die n ersten Glieder in Decimalbrüche verwandelt und addirt, und dadurch die Summe s_n erhalten. Man suche nun einen Ausdruck r zu bestimmen, von der Beschaffenheit, daß die Summe aller noch übrigen Glieder den Ausdruck r nicht übersteigen kann, verwandele r in einen Decimalbruch und bilde die Summe $s_n + r$. So weit die Decimalbrüche s_n und $s_n + r$ übereinstimmen, so weit (vielleicht auch etwas weiter) stimmen sie mit der Summe s überein, so weit reicht also zuverlässig die Genauigkeit. Die Bestimmung des Restes r hängt von der besonderen Natur der Reihe ab. Der folgende Paragraph enthält eine Bestimmung der Genauigkeit, welche sich öfter anwenden läßt.

§. 131.

Jedes Glied der unendlichen Reihe

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots. + t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots.$$

sei positiv und sie sei convergent.

Es sei

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = q$$

$$\frac{t_{n+2}}{t_{n+1}} = q'$$

$$\frac{t_{n+3}}{t_{n+2}} = q''$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Nach der Voraussetzung sind sämmtliche Quotienten $q, q', q''....$ positiv. Jeder derselben befinde sich innerhalb der Gränzen 0 und $+1$, und der erste q werde von keinem der folgenden an Größe übertroffen.

Es ist

$$t_{n+1} = t_n q$$
$$t_{n+2} = t_n q q'$$
$$t_{n+3} = t_n q q' q''$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

und die Reihe läßt sich wiedergeben durch

$$t_1 + t_2 + ... + t_n + t_n q[1 + q' + q'q'' + ...].$$

Die Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + ...$$

ist convergent und es ist

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... > 1 + q' + q'q'' + ...$$

Nun sei s die Summe aller Glieder der ursprünglichen Reihe, s_n die Summe ihrer ersten n Glieder, und es ist

$$s = s_n + t_n q[1 + q' + q'q'' + ...]$$

und, nach dem Vorstehenden

$$s < s_n + t_n q[1 + q + q^2 + q^3 + ...]$$

oder §. 118 anwendend

$$s < s_n + t_n \frac{q}{1-q}$$

oder, da $q = \frac{t_{n+1}}{t_n}$ ist

$$s < s_n + \frac{t_n t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}}.$$

Zugleich ist

$$s > s_n$$

und nach diesen beiden Bestimmungen läßt sich die Genauigkeit beurtheilen, mit welcher s durch s_n gegeben wird.

Es sei andererseits die unendliche convergente Reihe

$$t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \ldots \pm t_n \mp t_{n+1} \pm \ldots$$

vorgelegt. Das Glied $\pm t_n$ gehöre bereits der Gegend an, in welcher die Glieder fort und fort fallen. Die Summe aller Glieder der Reihe bezeichne s, die Summe der ersten n Glieder s_n; dann ist, wenn t_{n+1} positiv

$$s < s_n + t_{n+1}$$

zugleich

$$s > s_n + (t_{n+1} - t_{n+2})$$

und, wenn t_{n+1} negativ ist,

$$s > s_n - t_{n+1}$$

und zugleich

$$s < s_n - (t_{n+1} - t_{n+2}).$$

Denn man hat im ersten Fall

$$s = s_n + t_{n+1} - (t_{n+2} - t_{n+3}) - (t_{n+4} - t_{n+5}) - \ldots$$

zugleich

$$s = s_n + (t_{n+1} - t_{n+2}) + (t_{n+3} - t_{n+4}) + \ldots$$

im anderen

$$s = s_n - t_{n+1} + (t_{n+2} - t_{n+3}) + (t_{n+4} - t_{n+5}) + \ldots$$

zugleich

$$s = s_n - (t_{n+1} - t_{n+2}) - (t_{n+3} - t_{n+4}) - \ldots$$

und da die eingeklammerten Differenzen nach der Voraussetzung sämmtlich positiv sind, so erhellen die Behauptungen.

Und hiernach läßt sich bei der gegenwärtigen Reihe die Genauigkeit beurtheilen, mit welcher s durch s_n sich ausdrückt.

Uebungen und Praktisches.

§. 132.

1) Was heißt es, eine unendliche Reihe sei convergent, divergent, und welche Sätze sind aufgestellt worden? Wann ist die geometrische Progression convergent, und wie drückt sich ihre Summe aus?

2) Welches ist der Werth der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \ldots.?$$

$\tfrac{4}{3}$.

3) Welchen Werth hat die Reihe

$$3 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{8} + \ldots.?$$

6.

4) Welchen Werth hat die Reihe

$$b - \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} - \frac{b^4}{a^3} + \ldots.?$$

$\frac{ab}{a+b}$, vorausgesetzt $-1 < -\frac{b}{a} < +1$.

5) Welchen Werth hat die Reihe

$$1 - x^2 + x^5 - x^7 + x^{10} - x^{12} + x^{15} - x^{17} + \ldots.?$$

$\frac{1-x^2}{1-x^5}$, wenn $-1 < x^5 < +1$.

6) Die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots.$$

ist divergent.

Es ist nämlich

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots.$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots.$$

$$\ldots. + \left[\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots. + \frac{1}{2^n}\right] + \ldots.$$

Die Anzahl der Glieder, welche sich in der eckigen Klammer befinden, ist

$$2^n - 2^{n-1} = (2-1)2^{n-1} = 2^{n-1}$$

nämlich gleich der Anzahl der Glieder von 1 bis $\frac{1}{2^n}$ weniger der Anzahl der Glieder von 1 bis $\frac{1}{2^{n-1}}$. Von diesen Gliedern ist $\frac{1}{2^n}$ das kleinste, also ist die Summe der in der eckigen Klammer stehenden Glieder größer als $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n}$, d. h. größer als $\frac{1}{2}$. Daraus erhellet, daß die Summe jeder eingeklammerten Glieder größer ist als $\frac{1}{2}$; und es ist die Reihe größer als

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots \text{ ohne Ende,}$$

also die Reihe unendlich.

7) Sind die Reihen

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} + \ldots$$

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{14} + \ldots$$

convergent oder divergent?

Beide sind divergent.

Für die erste erhellet es, wenn man sie folgendermaßen schreibt

$$1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{3^3}\right) + \ldots$$

und die zweite ist dann divergent, weil ihre Glieder größer sind als die der ersteren.

8) Sind die Reihen

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots$$

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \ldots$$

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{10} + \ldots$$

convergent oder divergent?

Sie sind sämmtlich convergent.

9) Für welche Werthe von x sind die Reihen

α) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$

β) $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$

γ) $1 + 1 \cdot x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + \ldots$

δ) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \ldots$

convergent?

Die Reihen α), β), δ) sind convergent, wenn x kleiner als $+1$ und zugleich größer als -1 ist. Die Reihe γ) ist convergent für $x = 0$, divergent für jedes andere x.

10) Welchen Werth hat die Reihe

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots ?$$

2,71828182845904 ....

Die Reihe ist convergent, denn sie entspringt aus der Reihe in §. 128 wenn $x = 1$.

Da $\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} : n$, so hat man zunächst folgende Rechnung:

	1
	1
2	0,5
3	0,16666666666666666 ....
4	0,04166666666666666 ....
5	0,00833333333333333 ....
6	0,00138888888888888 ....
7	0,00019841269841269 ....
8	0,00002480158730158 ....
9	0,00000275573192239 ....
10	0,00000027557319223 ....
11	0,00000002505210838 ....
12	0,00000000208767569 ....
13	0,00000000016059043 ....
14	0,00000000001147074 ....
15	0,00000000000076471 ....
16	0,00000000000004779 ....
	....
	2,71828182845904225 ....

Es fragt sich nun, welche Genauigkeit erlangt ist. Nach §. 131 ist der Rest kleiner als

$$\frac{\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}},$$

welches sich reducirt auf $\frac{1}{nn!}$. Wir sind fortgeschritten bis $\frac{1}{16!}$, also ist der Rest kleiner als

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16!} = 0{,}000000000000002987\ldots.$$

Dies zum obern Resultat addirt giebt

$$2{,}71828182845904523 8.$$

In beiden Resultaten stimmen die ersten 14 Decimalstellen überein, also sind diese zuverlässig.

11) Welches ist der Werth der Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

wenn x gleich 2, oder 3, oder 4, oder 5 ist; und welches ist der allgemeine, den Rest übersteigende Ausdruck, wenn man bis zu dem Gliede $\frac{x^n}{n!}$, einschließlich, gerechnet hat?

7,389056..., 20,085536..., 54,598150..., 148,413159...;

und hat man bis zu dem Gliede $\frac{x^n}{n!}$ einschließlich alle Glieder addirt, so ist der Rest kleiner als $\frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}$.

12) Welches ist der Werth der Reihe

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \ldots.?$$

0,632120 ....

13) Welche Werthe haben die Reihen

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} + \ldots.$$

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \ldots.?$$

0,540302 ...., 0,841470 ....

14) Die Periode eines vollkommen periodischen unendlichen Decimalbruchs sei p; und sie habe n Ziffern; man soll den Bruch angeben, welchen sämmtliche Decimalziffern des unendlichen Decimalbruchs ausdrücken.

Die sämmtlichen Decimalziffern machen folgende Summe aus

$$\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \frac{p}{10^{3n}} \ldots \text{ ohne Ende.}$$

Die Summanden dieser Summe bilden eine abnehmende geometrische Progression, deren erstes Glied $\frac{p}{10^n}$ und deren Quotient $\frac{1}{10^n}$ ist. Die Summe aller Glieder ist daher gleich

$$\frac{\frac{p}{10^n}}{1-\frac{1}{10^n}} \text{ oder } \frac{p}{10^n-1}.$$

15) Es bezeichne v die sämmtlichen Stellen, welche bei einem unvollkommen periodischen echten Decimalbruch den Perioden vorangehen; p bezeichne die Periode; v habe m, p habe n Ziffern; man soll den Bruch angeben, welcher dem unendlichen Decimalbruch gleich ist.

Der unendliche Decimalbruch macht folgende Summe aus

$$\frac{v}{10^m} + \frac{p}{10^{m+n}} + \frac{p}{10^{m+2n}} + \frac{p}{10^{m+3n}} + \ldots$$

Man lasse den ersten Summand zurück; die übrigen bilden eine abnehmende geometrische Reihe mit dem ersten Gliede $\frac{p}{10^{m+n}}$ und dem Quotienten $\frac{1}{10^n}$. Die ganze Summe ist daher gleich

$$\frac{v}{10^m} + \frac{\frac{p}{10^{m+n}}}{1-\frac{1}{10^n}} = \frac{v}{10^m} + \frac{p}{(10^n-1)10^m}$$

oder gleich

$$\frac{v10^n + p - v}{(10^n-1)10^m}.$$

Man vergleiche §. 201 des ersten Theils der Zahlenlehre.

16) Welches ist die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$1 \quad 2p \quad 3p^2 \quad 4p^3 \ldots ?$$

wann ist sie convergent, und welches ist alsdann die Summe aller ihrer Glieder?

$$\frac{np^n}{p-1} - \frac{p^n-1}{(p-1)^2}.$$

Sie ist convergent, wenn $-1 < p < +1$, und ihre Summe ist alsdann $\frac{1}{(p-1)^2}$.

17) Welches ist die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$1 \quad 3p \quad 6p^2 \quad 10p^3 \ldots.$$

deren ntes Glied $(n+1)_2 p^{n-1}$ ist; wann ist sie convergent, und welches ist alsdann ihre Summe?

$$\frac{(n+1)_2 p^n}{p-1} - \frac{np^n}{(p-1)^2} + \frac{p^n-1}{(p-1)^3}.$$

Sie ist convergent, wenn $-1 < p < +1$, und ihre Summe ist alsdann $\frac{1}{(p-1)^3}$.

Neuntes Kapitel.

Erweiterung des binomischen Satzes. Die Reihen für Potenzen, Logarithmen und trigonometrische Funktionen.

§. 133.

Es seien die Coefficienten der Reihen

α) $1 + gx + g_2x^2 + g_3x^3 + g_4x^4 + \ldots.$

β) $1 + hx + h_2x^2 + h_3x^3 + h_4x^4 + \ldots.$

γ) $1 + (g+h)x + (g+h)_2x^2 + (g+h)_3x^3 + \ldots.$

Binomial-Coefficienten, g und h positive oder negative gebrochene oder negative ganze Zahlen. Die Reihen α) und β) sind dann unendlich (§. 38). Die Summe $g+h$ wird im Allgemeinen eine positive oder negative gebrochene, oder eine negative ganze Zahl gewähren, und dann ist die Reihe γ) gleichfalls unendlich;

aber es kann auch $g + h$ eine positive ganze Zahl liefern und dann ist die Reihe γ) begränzt; endlich kann $g + h$ gleich Null sein, und die Reihe γ) ist dann gleich 1, weil in diesem Fall ihr zweites Glied und alle folgenden verschwinden. Die Convergenz der unendlichen Reihen erheischt, daß

$$-1 < x < +1$$

wie in §. 127 ist nachgewiesen worden.

Wir bezeichnen die Reihe α) durch f_g, also die Reihe β) durch f_h und die Reihe γ) durch f_{g+h}. Es ist

1) $f_g \cdot f_h = f_{g+h}$

und, unter q eine positive ganze Zahl verstanden,

2) $(f_g)^q = f_{qg}$.

Den Beweis zu führen multipliciren wir die beiden Reihen

$$1 + gx + g_2x^2 + g_3x^3 + g_4x^4 + g_5x^5 + \ldots.$$
$$1 + hx + h_2x^2 + h_3x^3 + h_4x^4 + h_5x^5 + \ldots.$$

mit einander, und erhalten:

$$\begin{array}{llllll} 1 + gx + g_2x^2 & + g_3x^3 & + g_4x^4 & + g_5x^5 & + \ldots. \\ \quad + hx + ghx^2 & + g_2hx^3 & + g_3hx^4 & + g_4hx^5 & + \ldots. \\ \quad\quad + h_2x^2 & + gh_2x^3 & + g_2h_2x^4 & + g_3h_2x^5 & + \ldots. \\ & + h_3x^3 & + gh_3x^4 & + g_2h_3x^5 & + \ldots. \\ & & + h_4x^4 & + gh_4x^5 & + \ldots. \\ & & & + h_5x^5 & + \ldots. \\ & & & & \quad + \ldots. \end{array}$$

oder, wenn wir addiren und §. 40 anwenden,

$$(1 + gx + g_2x^2 + \ldots.)(1 + hx + h_2x^2 \ldots.)$$
$$= 1 + (g + h)x + (g + h)_2x^2 + (g + h)_3x^3 + \ldots.$$

und das ist das Gesetz unter 1).

Man denke unter h' eine positive oder negative gebrochene oder eine negative ganze Zahl, eben so unter h'', h''' ...., und setze in 1) $h + h'$ statt h. Das liefert

$$f_g \cdot f_{h+h'} = f_{g+h+h'}$$

aber es ist nach 1)

$$f_{h+h'} = f_h \cdot f_{h'}$$

also folgt

$$f_g \cdot f_h \cdot f_{h'} = f_{g+h+h'}.$$

Setzt man hier $h' + h''$ statt h', so folgt wie zuvor

$$f_g \cdot f_h \cdot f_{h'} \cdot f_{h''} = f_{g+h+h'+h''}$$

und in solcher Weise fortfahrend:

$$f_g \cdot f_h \cdot f_{h'} \cdot f_{h''} \cdot f_{h'''} \ldots = f_{g+h+h'+h''+h'''+\ldots}$$

Hierin werde

$$h = h' = h'' = h''' = \ldots = g$$

gesetzt, und man hat das zweite Gesetz.

Beide Gesetze behalten übrigens ihre Giltigkeit, wenn jede der Zahlen g und h, oder eine von ihnen, eine positive ganze Zahl ist.

§. 134.

Der binomische Satz ist in §. 76 für positive ganze Exponenten erwiesen worden.

Es ist weiter, wenn n eine positive oder negative gebrochene oder eine negative ganze Zahl vorstellt,

I) $(1 + x)^n = 1 + nx + n_2x^2 + n_3x^3 + \ldots$

so lange

$$-1 < x < +1.$$

II) $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n_2a^{n-2}b^2 + n_3a^{n-3}b^3 + \ldots$

so lange

$$-a < b < +a.$$

Die Reihen schreiten ohne Ende fort, weil keiner von den Binomial-Coefficienten in Null übergeht nach §. 38.

Man denke unter p eine positive ganze Zahl, und setze in 2) des vorigen Paragraphen $\frac{p}{q}$ statt g. Das liefert:

$$\left(f_{\frac{p}{q}}\right)^q = f_p.$$

Nun ist

$$f_p = 1 + px + p_2x^2 + \ldots$$

oder nach §. 76 3), da p eine positive ganze Zahl vorstellt,

$$f_p = (1 + x)^p.$$

Diesen Werth substituiren wir oben, und erhalten

$$\left(f_{\frac{p}{q}}\right)^q = (1 + x)^p$$

oder, durch q radicirt,

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = f_{\frac{p}{q}}$$

oder

$$\phi)\ (1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}x + \left(\frac{p}{q}\right)_2 x^2 + \left(\frac{p}{q}\right)_3 x^3 + \ldots,$$

und das ist das Gesetz unter I) für den Fall, daß n eine positive gebrochene Zahl bedeutet.

Es stelle g an sich eine positive ganze oder gebrochene Zahl vor, und man setze in 1) des vorigen Paragraphen $-g$ statt h. Das liefert

$$f_g \cdot f_{-g} = 1$$

oder

$$f_{-g} = \frac{1}{f_g}.$$

Bei der Bedeutung von g ist nach §. 76 3) und nach ϕ)

$$f_g = (1+x)^g$$

demnach

$$f_{-g} = \frac{1}{(1+x)^g}$$

oder

$$(1+x)^{-g} = f_{-g}$$

d. h.

$$(1+x)^{-g} = 1 + (-g)x + (-g)_2 x^2 + (-g)_3 x^3 + \ldots.$$

und das ist die Formel I), wenn n eine negative ganze oder gebrochene Zahl vorstellt.

Nach dem Bisherigen ist

$$(1+x)^n = 1 + nx + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \ldots.$$

wenn n eine positive oder negative gebrochene oder eine negative ganze Zahl vorstellt, vorausgesetzt

$$-1 < x < +1.$$

Nun sei

$$-1 < \frac{b}{a} < +1$$

oder, was dasselbe leistet,

$$-a < b < +a$$

und man substituire $\frac{b}{a}$ statt x; das liefert

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + n\frac{b}{a} + n_2\frac{b^2}{a^2} + n_3\frac{b^3}{a^3} + \ldots.$$

oder, mit a^n multiplicirt,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n_2a^{n-2}b^2 + n_3a^{n-3}b^3 + \ldots.$$

und das ist das Gesetz unter II).

Der binomische Satz gilt nun überhaupt für positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen.

§. 135.

Nach dem binomischen Satz ist

$$(1+p)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 1 + \frac{1}{p}\cdot p + \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)}{2!}p^2 + \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)}{3!}p^3 + \ldots.$$

$$= 1 + 1 + \frac{1\cdot(1-p)}{2!} + \frac{1\cdot(1-p)(1-2p)}{3!} + \ldots.$$

vorausgesetzt

$$-1 < p < +1.$$

Man lasse p in Null übergehen, und es entsteht

$$\lim(1+p)^{\frac{1}{p}} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots.$$

Der Werth dieser unendlichen convergenten Reihe ist [§. 132 10)]

$$2{,}718281828459\ldots.$$

Er hat für die Folge Wichtigkeit und wird bezeichnet durch

$$e.$$

§. 136.

Es ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

Nach dem binomischen Satz ist

$$(1+p)^{\frac{x}{p}}$$

$$=1+\frac{x}{p}\cdot p+\frac{\frac{x}{p}\left(\frac{x}{p}-1\right)}{2!}p^2+\frac{\frac{x}{p}\left(\frac{x}{p}-1\right)\left(\frac{x}{p}-2\right)}{3!}p^3+\ldots.$$

$$=1+x+\frac{x(x-p)}{2!}+\frac{x(x-p)(x-2p)}{3!}+\ldots.$$

vorausgesetzt

$$-1<p<+1.$$

Man lasse p in Null übergehen, und es entsteht

$$1)\ \lim(1+p)^{\frac{x}{p}}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots.$$

Andererseits ist wegen des vorigen Paragraphen, wenn p zu Null wird, und da dies auf x keinen Einfluß übt

$$\lim\left[(1+p)^{\frac{1}{p}}\right]^x=e^x$$

oder

$$2)\ \lim(1+p)^{\frac{x}{p}}=e^x$$

und aus 1) und 2) erhellet die Behauptung.

§. 137.

Die Logarithmen, welche die Zahl e zur Basis haben, heißen **natürliche** Logarithmen. Der natürliche Logarithmus einer Zahl a wird bezeichnet durch

$$\ln a.$$

Dies Zeichen wird gelesen: der natürliche Logarithmus von a, oder logarithmus naturalis a.

Logarithmen, deren Basis eine andere Zahl ist als e, nennt man **künstliche** Logarithmen.

§. 138.

Es ist nach §. 136

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots.$$

und die Reihe nach §. 128 convergent, wenn

$$-\infty < x < +\infty.$$

Daher ist

$$\phi)\quad e^{yz} = 1 + yz + \frac{(yz)^2}{2!} + \frac{(yz)^3}{3!} + \ldots.$$

so lange

$$-\infty < yz < +\infty$$

und dies ist der Fall, wenn

$$-\infty < y < +\infty$$

und

$$-\infty < z < +\infty$$

Nun sei

$$y = \text{l}na$$

also

$$e^y = a.$$

Diese Werthe substituire man in ϕ) und schreibe x statt z; das liefert

$$a^x = 1 + (\text{l}na)x + \frac{(\text{l}na)^2}{2!}x^2 + \frac{(\text{l}na)^3}{3!}x^3 + \ldots.$$

und die Reihe ist convergent, wenn

$$-\infty < \text{l}na < +\infty$$

und

$$-\infty < x < +\infty.$$

§. 139.

Wir haben nunmehr erlangt:

$$\text{I})\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

$$\text{II})\quad a^x = 1 + (\text{l}na)x + \frac{(\text{l}na)^2}{2!}x^2 + \frac{(\text{l}na)^3}{3!}x^3 + \ldots.$$

und die Reihen sind convergent für jeden reellen Werth von x, und von lna.

§. 140.

Fortab werde $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet. Dann ist

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = +1.$$
$$i^5 = +i$$

$$i^6 = -1$$
$$i^7 = -i$$
$$i^8 = +1$$
$$i^9 = +i$$
$$i^{10} = -1 \text{ u. s. f.}$$

§. 141.

In §. 139 I) werde xi statt x gesetzt; das liefert

$$e^{xi} = 1 + xi - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}i - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!}i + \ldots$$

oder

$$e^{xi} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)i.$$

Die eingeklammerten Reihen sind nach §. 129 convergent für jeden reellen Werth von x.

Wir bezeichnen, bis auf Weiteres, die erste der Reihen durch ϕ_x die andere durch ψ_x, setzen also

$$\phi_x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

$$\psi_x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

und haben in dieser Bezeichnung

$$e^{xi} = \phi_x + i\psi_x.$$

§. 142.

Potenzen, deren Exponenten imaginaire Ausdrücke sind, nennt man schlechthin imaginaire Potenzen.

§. 143.

Da die Reihen ϕ_x und ψ_x für jeden reellen Werth von x convergiren, d. h. bestimmte reelle Werthe liefern, so ist für die imaginaire Potenz e^{xi} in §. 141 ein bestimmter imaginairer Werth von der Form $p + qi$ hervorgegangen.

Ein gleiches Ergebniß würde sich vermittelst der Reihe II) in §. 139 auf ähnlichem Wege für die imaginaire Potenz a^{xi} erzielen lassen.

§. 144.

In den Elementen ließ sich der ursprüngliche Begriff der Potenz, bei welchem der Exponent eine positive ganze Zahl sein muß, ausdehnen auf Potenzen deren Exponenten negative ganze Zahlen sind, oder positive oder negative gebrochene. Die Reihen in §. 139 liefern auch für Potenzen mit irrationalen und imaginairen Exponenten bestimmte Werthe; und wir erweitern nunmehr den Begriff der Potenz dahin, daß wir unter ihr den Werth verstehen, welcher durch jene Reihen für sie gegeben wird.

Liegt der Werth einer Potenz einfach vor, so ist es natürlich nicht nothwendig, ihn aus den Reihen zu entnehmen.

§. 145.

Es entsteht die Frage, inwiefern die Gesetze, welche in den Elementen für die dort erklärten Potenzen sind erwiesen worden, ihre Giltigkeit für die allgemeineren Potenzen behalten.

§. 146.

Es ist für alle Werthe von x und von y

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

Denn es ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots$$

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y = 1 + x &+ \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ + y &+ xy + \frac{x^2y}{2!1!} + \frac{x^3y}{3!1!} + \cdots \\ &+ \frac{y^2}{2!} + \frac{xy^2}{1!2!} + \frac{x^2y^2}{2!2!} + \cdots \\ &+ \frac{y^3}{3!} + \frac{xy^3}{1!3!} + \cdots \\ &+ \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

oder
$$e^x \cdot e^y$$
$$=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\frac{(x+y)^4}{4!}+\ldots = e^{x+y}.$$

Das allgemeine nte Glied der Entwickelung ist nämlich
$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}y}{(n-1)!\,1!}+\frac{x^{n-2}y^2}{(n-2)!\,2!}+\frac{x^{n-3}y^3}{(n-3)!\,3!}+\ldots+\frac{y^n}{n!}$$

oder
$$\frac{1}{n!}[x^n+nx^{n-1}y+n_2x^{n-2}y^2+\ldots+y^n]$$

oder
$$\frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

§. 147.

Ist nach dem vorigen Paragraph für jedes x und für jedes y

$$1)\quad e^x \cdot e^y = e^{x+y},$$

so folgt weiter, wie in den Elementen, für alle Werthe von x und y

$$2)\quad e^x : e^y = e^{x-y}$$

$$3)\quad \frac{1}{e^y} = e^{-y}$$

und für jedes x, während jedoch m eine ganze Zahl vorstellt,

$$4)\quad (e^x)^m = e^{mx}.$$

§. 148.

Es ist für alle Werthe von x und von y, unter m aber eine ganze Zahl verstanden

$$1)\quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$2)\quad a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$3)\quad \frac{1}{a^y} = a^{-y}$$

$$4)\quad (a^x)^m = a^{mx}$$

$$5)\quad a^x b^x = (ab)^x$$

$$6)\quad a^x : b^x = (a:b)^x.$$

Man hat

$$a = e^{\ln a}$$
$$a^x = e^{x \ln a}$$

also ist

$$a^x \cdot a^y = e^{x \ln a} \cdot e^{y \ln a}$$
$$= e^{(x+y)\ln a}$$
$$= a^{x+y}$$

und ähnlich ergeben sich die übrigen Formeln.

§. 149.

Wir schreiten weiter und suchen eine Reihe für $\ln y$ zu gewinnen.

Nach §. 139 II) ist

$$(1+x)^y = 1 + [\ln(1+x)]y + \frac{[\ln(1+x)]^2}{2!}y^2 + \ldots.$$

Nach dem binomischen Satz ist

$$(1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2!}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3 + \ldots.$$

In beiden Gleichungen bringen wir das erste rechts stehende Glied, nämlich 1, auf die linke Seite, setzen die beiden Werthe, welche für $(1+x)^y - 1$ sich ergeben, einander gleich, und dividiren durch y; das liefert

$$\ln(1+x) + \frac{[\ln(1+x)]^2}{2!}y + \ldots = x + \frac{y-1}{2!}x^2 + \frac{(y-1)(y-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

und, wenn wir hier $y = 0$ setzen,

$$1)\quad \ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

Die Convergenz erheischt, daß

$$-1 < x < +1$$

denn während die oben nach §. 139 II) gebildete Reihe zwar für jeden reellen Werth von x convergirt, ist die nach dem binomischen Satz gebildete Reihe nur convergent, wenn x sich innerhalb der Gränzen -1 und $+1$ befindet.

Aus

$$-1 < x < +1$$

folgt, indem man 1 addirt

$$0 < 1 + x < +2.$$

Vermittelst der Reihe 1) können also nur die Logarithmen der Zahlen $1 + x$ gefunden werden, welche innerhalb der Gränzen 0 und $+2$ sich befinden.

Man betrachte x an sich positiv und

$$0 < +x < +1$$

dann ist

$$-1 < -x < 0$$

und die beiden nach 1) gebildeten Reihen

$$\alpha)\quad \ln(1+x) = \quad x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

$$\beta)\quad \ln(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \ldots.$$

sind convergent, wenn, wie angenommen,

$$0 < +x < +1.$$

Die Gleichung β) werde von der α) subtrahirt, das liefert

$$\gamma)\quad \ln\frac{1+x}{1-x} = 2[x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.]$$

mit der Bedingung

$$0 < +x < +1.$$

Man denke y dergestalt, daß

$$+1 < y < +\infty$$

so entspricht der Quotient $\frac{y-1}{y+1}$ der Bedingung

$$0 < \frac{y-1}{y+1} < +1$$

d. h. der Bedingung, welche x zu erfüllen hat. Man substituire diesen Quotienten statt x und es entsteht, nach einer leichten Reduction zur Linken,

$$2)\quad \ln y = 2\left[\frac{y-1}{y+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

$$+1 < y < +\infty.$$

Vermittelst der eben gewonnenen Reihe lassen sich die natürlichen Logarithmen aller Zahlen berechnen, welche innerhalb der Gränzen $+1$ und $+\infty$ befindlich sind.

Man denke x und z positiv, so befindet sich der Quotient $\frac{x+z}{x}$ stets innerhalb der Gränzen $+1$ und $+\infty$; und setzen wir ihn statt y in 2) so entspringt noch

$$\ln\frac{x+z}{x} = 2\left[\frac{z}{2x+z} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^5 + \ldots\right]$$

oder

3) $\ln(x+z) = \ln x + 2\left[\frac{z}{2x+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^5 + ..\right]$

Die Convergenz erfordert

$$0 < x < +\infty$$
$$0 < z < +\infty$$

Wird unter x eine größere, unter z eine kleine Zahl verstanden, so nimmt diese Reihe rasch ab, gewährt also vermittelst weniger Glieder hinreichende Genauigkeit; deshalb ist sie bequemer als die Reihe unter 2). Die Formel 3) dient aber nur, $\ln(x + z)$ zu finden, wenn $\ln x$ bereits bekannt ist.

Es sei

$$s = \frac{z}{2x+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^n$$

und r bezeichne die Summe der übrigen unter 3) eingeklammerten Glieder, d. h. es sei

$$r = \frac{1}{n+2}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^{n+2} + \frac{1}{n+4}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^{n+4} + \dots$$

Dann ist

$$r < \frac{1}{n+2}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^{n+2}\left[1 + \left(\frac{z}{2x+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{2x+z}\right)^4 + \dots\right]$$

oder

$$r < \frac{1}{n+2} \cdot \frac{z^{n+2}}{(2x+z)^{n+2}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{2x+z}\right)^2}$$

oder

$$r < \frac{1}{n+2} \cdot \frac{z^{n+2}}{(2x+z)^n \cdot (x+z)4x}.$$

Der rechts stehende Ausdruck sei der Kürze wegen durch q bezeichnet.

Nun ist

$$\ln(x+z) = \ln x + 2(s+r)$$

also

$$\ln(x+z) > \ln x + 2s$$

und zugleich

$$\ln(x+z) < \ln x + 2(s+q),$$

und hiernach kann die Genauigkeit beurtheilt werden.

Setzen wir $n = 1$, $z = 1$, $x = 250$, so wird

$$s = \frac{z}{2x + z}$$

$$q = 0{,}000000002 \ldots.$$

$$\ln(x + z) > \ln x + 2s$$

zugleich

$$\ln(x + z) < \ln x + 2s + 0{,}000000004 \ldots.$$

Und hieraus erhellet, daß für solche Werthe von x und z, für welche $\frac{z}{x} < \frac{1}{250}$, im Allgemeinen mit einer Genauigkeit von sieben Decimalstellen, und mit noch größerer Genauigkeit je weiter der Quotient $\frac{z}{x}$ sich noch vermindert, sein wird

$$4) \quad \ln(x + z) = \ln x + \frac{2z}{2x + z}$$

Durch Division findet sich

$$\frac{2z}{2x + z} = \frac{z}{x} - \frac{z^2}{x(2x + z)}$$

und setzen wir $z = 1$, $x = 10000$, so liefert dies

$$\frac{2z}{2x + z} = \frac{z}{x} - 0{,}000000004 \ldots.$$

Für solche Werthe von z und x, für welche $\frac{z}{x} < \frac{1}{10000}$, ist also im Allgemeinen mit einer Genauigkeit von sieben Decimalstellen der Quotient $\frac{z}{x}$ gleich dem $\frac{2z}{2x + z}$, also auch

$$5) \quad \ln(x + z) = \ln x + \frac{z}{x}.$$

Der Reihen 2) und 3) bedient man sich zur Berechnung der Logarithmen der ersteren Primzahlen, der Formeln 4) und 5) zur Berechnung der späteren. Die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen ergeben sich aus denen der Primzahlen.

§. 150.

Aufgabe. Den Logarithmus von y für irgend eine Basis a zu finden.

Auflösung. Setzen wir

$$\overset{a}{\text{Log}}\, y = x,$$

so muß x der Gleichung entsprechen

$$a^x = y.$$

Hieraus folgt

$$\ln a^x = \ln y$$

$$x \ln a = \ln y$$

$$x = \frac{1}{\ln a} \ln y$$

oder

$$\overset{a}{\text{Log}}\, y = \frac{1}{\ln a} \ln y.$$

Die natürlichen Logarithmen erhalten wir nach dem vorigen Paragraph. Daher ist die Aufgabe gelöst.

Die künstlichen Logarithmen für irgend eine Basis a werden, nach der gefundenen Formel, aus den natürlichen erhalten, wenn man die letzten mit $\frac{1}{\ln a}$ multiplicirt. Der Ausdruck $\frac{1}{\ln a}$ heißt der Modul des Logarithmen-Systems, dessen Basis a ist.

Es erhellet ferner, daß die künstlichen Logarithmen für eine Basis a in die natürlichen Logarithmen übergehen, wenn man sie mit ln a multiplicirt.

§. 151.

Nach §. 149 5) ist näherungsweise

$$\ln(x + z) = \ln x + \frac{z}{x}.$$

Mit $\frac{1}{\ln a}$ multiplicirt geht diese Formel über in

$$1)\quad \overset{a}{\text{Log}}(x + z) = \overset{a}{\text{Log}}\, x + \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{z}{x}.$$

Hieraus folgt

$$\overset{a}{\text{Log}}(x + z) - \overset{a}{\text{Log}}\, x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{z}{x}.$$

Für denselben Werth von x, und einen Werth z′, für welchen ebenfalls $\frac{z'}{x} < \frac{1}{10000}$, ist auch

$$\overset{a}{\mathrm{Log}}(x+z') - \overset{a}{\mathrm{Log}}\,x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{z'}{x}.$$

Die erstere Gleichung werde durch die letztere dividirt; das liefert

$$2)\quad \frac{\overset{a}{\mathrm{Log}}(x+z') - \overset{a}{\mathrm{Log}}\,x}{\overset{a}{\mathrm{Log}}(x+z) - \overset{a}{\mathrm{Log}}\,x} = \frac{z}{z'}.$$

Dies Gesetz begründet, wie wir später zeigen werden, die Einrichtung der Logarithmentafeln in Bezug auf die Proportionaltheile.

§. 152.

Nach §. 141 ist

$$1)\quad e^{xi} = \phi_x + i\psi_x.$$

Daraus folgt, i negativ setzend,

$$2)\quad e^{-xi} = \phi_x - i\psi_x.$$

Aus 1) und 2) entspringt durch Addition und Subtraction

$$3)\quad \phi_x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$4)\quad \psi_x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

§. 153.

Es ist

$$1)\quad \phi_x^{\,2} + \psi_x^{\,2} = 1$$

$$2)\quad \psi_{x+y} = \psi_x\phi_y + \phi_x\psi_y$$

$$3)\quad \psi_{x-y} = \psi_x\phi_y - \phi_x\psi_y$$

$$4)\quad \phi_{x+y} = \phi_x\phi_y - \psi_x\psi_y$$

$$5)\quad \phi_{x-y} = \phi_x\phi_y + \psi_x\psi_y$$

Die Gleichung 1) ist das Produkt der Gleichungen 1) und 2) im vorigen Paragraph.

Nach 3) und 4) des vorigen Paragraphen ist

$$\psi_x\phi_y = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \cdot \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}$$

$$= \frac{e^{(x+y)i} + e^{(x-y)i} - e^{-(x-y)i} - e^{-(x+y)i}}{4i}.$$

$$\phi_x\psi_y = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\cdot\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i}$$

$$= \frac{e^{(x+y)i}-e^{(x-y)i}+e^{-(x-y)i}-e^{-(x+y)i}}{4i}$$

folglich

$$\psi_x\phi_y+\phi_x\psi_y = \frac{e^{(x+y)i}-e^{-(x+y)i}}{2i}$$

oder wegen 4) des vorigen Paragraphen

$$\psi_x\phi_y+\phi_x\psi_y = \psi_{x+y}.$$

Das ist das zweite Gesetz; eben so folgen die übrigen.

§. 154.

Die Funktionen Cos und Sin erfüllen die nämlichen Gesetze, welche im vorigen Paragraphen sind aufgestellt worden; und es läßt sich darthun, daß Cos x durch ϕ_x gegeben wird, und Sin x durch ψ_x.

§. 155.

Als Maaß eines Winkels ergeben sich verschiedene Zahlen, je nach der Art den Winkel zu messen. Der Winkel z. B., dessen Gradmaaß 90 ist, hat zum Bogenmaaß $\frac{1}{2}\pi$. Die trigonometrischen Funktionen ändern sich dadurch nicht. Sollte daher Sin x durch die Reihe

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots.$$

gegeben werden, so ist dies nur möglich bei einer bestimmten Weise, den Winkel zu messen.

Es sei α Gradmaaß, x Bogenmaaß eines und desselben Winkels; dann verhält sich

$$\alpha : 360 = x : 2\pi$$

und es ist

$$\alpha = \frac{\pi}{180}x.$$

Aehnlich, wenn α ein anderes Maaß vorstellte. Es besteht daher immer ein constanter Coefficient a, vermittelst dessen das Bogen-

maaß x in irgend ein anderes sich umwandeln läßt. Nehmen wir nun a unbestimmt, x als Bogenmaaß, und setzen

$$\text{Sin}\, x = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \frac{(ax)^7}{7!} + \dots$$

so folgt

$$\frac{\text{Sin}\, x}{x} = a - \frac{a^3}{3!}x^2 + \frac{a^5}{5!}x^4 - \dots$$

Im Moment des Verschwindens von x ist Sin x gleich dem Bogen x. Daher hat man, wenn x abnimmt bis auf Null,

$$1 = a.$$

Was für den unendlich kleinen Winkel, als irgend einen gilt, muß für alle gelten, weil a nur durch die Weise der Messung, nicht durch den einzelnen Winkel bedingt ist.

Wenn daher die Funktion ψ_x den Sinus ausdrücken sollte, so muß unter x Bogenmaaß verstanden werden. Eben so, sollte ϕ_x den Cosinus liefern, welches nun aus §. 153 1) sich schließen läßt.

§. 156.

Für irgend einen besonderen Werth x' als Bogenmaaß sei

$$\text{Sin}\, x' = \psi_{x'}$$

und

$$\text{Cos}\, x' = \phi_{x'}.$$

Dann ist, dx als Differential verstanden,

$$\text{Sin}(x' + dx) = \text{Sin}\, x' \text{Cos}\, dx + \text{Cos}\, x' \text{Sin}\, dx.$$

Es ist aber $\text{Cos}\, dx = 1$, und $\text{Sin}\, dx = dx$, weil im Moment des Verschwindens der Sinus mit dem Bogen zusammenfällt. Daher hat man

1) $\text{Sin}(x' \pm dx) = \text{Sin}\, x' \cdot 1 \pm \text{Cos}\, x' \cdot dx.$

Eben so folgt

2) $\text{Cos}(x' \pm dx) = \text{Cos}\, x' \cdot 1 \mp \text{Sin}\, x' \cdot dx.$

Andererseits ist nach §. 153, und weil

$$\phi_{dx} = 1 - \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^4}{4!} - \frac{dx^6}{6!} + \dots = 1$$

und $\psi_{dx} = dx - \frac{dx^3}{3!} + \dots = dx$

gesetzt werden muß

$$3)\quad \psi_{x' \pm dx} = \psi_{x'} \cdot 1 \pm \phi_{x'} \cdot dx.$$

$$4)\quad \phi_{x' \pm dx} = \phi_{x'} \cdot 1 \mp \psi_{x'} \cdot dx.$$

Ist nun für irgend einen besonderen Werth x'

$$\operatorname{Sin} x' = \psi_{x'}$$

$$\operatorname{Cos} x' = \phi_{x'}$$

so ist wegen 1) und 3) auch

$$\operatorname{Sin}(x' \pm dx) = \psi_{x' \pm dx}$$

und wegen 2) und 4)

$$\operatorname{Cos}(x' \pm dx) = \phi_{x' \pm dx}.$$

Hieraus erhellet aber, daß wenn für irgend einen Werth x' die Funktionen Cos und ϕ, und die Sin und ψ übereinstimmen, sie auch übereinstimmen müssen für alle Werthe, welche durch stetiges Wachsen oder Abnehmen des Werthes x' hervorgehen.

Nun ist

$$\operatorname{Sin} 0 = \psi_0 = 0$$

und
$$\operatorname{Cos} 0 = \phi_0 = 1$$

folglich ist
$$\operatorname{Sin} x = \psi_x$$

und
$$\operatorname{Cos} x = \phi_x$$

für alle Werthe von x, von 0 bis $+\infty$ und von 0 bis $-\infty$, d. h. für alle reellen Werthe.

Es ist demnach

$$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

$$\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

wenn

$$-\infty < x < +\infty.$$

§. 157.

In den Funktionen ϕ_x und ψ_x werde xi statt x gesetzt; das liefert

$$\phi_{xi} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

$$\psi_{xi} = (x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots.)i$$

und die Reihen sind convergent nach §. 128 und §. 121.

ϕ_{xi} ist positiv und größer als 1, ψ_{xi} imaginair. Diese Werthe liegen also außerhalb der Gränzen -1 und $+1$, in welchen die trigonometrischen Funktionen Cos x und Sin x sich bewegen.

Die Funktionen ϕ_x und ψ_x haben eine allgemeinere Bedeutung als Cos x und Sin x. Die ersteren liefern bestimmte Werthe für jeden reellen oder imaginairen Werth von x; in den letzteren darf, ihrer ursprünglichen Natur nach, x nicht imaginair sein. Nur für jeden reellen Werth von x ist $\phi_x = \operatorname{Cos} x$ und $\psi_x = \operatorname{Sin} x$; ist aber x imaginair, so liegen die Werthe von ϕ und ψ außerhalb der Gränzen derer, die Cos und Sin anzunehmen vermögen.

Die Gesetze in §. 153 werden von den Funktionen ϕ und ψ erfüllt, gleichgiltig ob x reell sei oder imaginair; mithin auch alle Gesetze, welche aus jenen sich ableiten lassen, und welche die Trigonometrie zunächst für Sin und Cos aufstellt. Die Funktionen ϕ und ψ erscheinen als allgemeinere trigonometrische Funktionen.

§. 158.

Wir bezeichnen fortab, bei jedem reellen oder imaginairen Werth von x, den Werth der Reihe

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

durch Cos x, und den Werth der Reihe

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

durch Sin x, und erweitern den Begriff der Funktionen Sin x und Cos x, indem wir von der Trigonometrie absehen und unter Sinus und Cosinus irgend eines Zahlenausdruckes x die Werthe verstehen, welche die oberen Reihen für Sin x und Cos x geben, sobald unter x jener Zahlenausdruck gedacht wird.

Mit den Funktionen Sin x und Cos x erhalten auch die aus ihnen gebildeten Funktionen Tg x, Cotg x u. s. w. allgemeinere Bedeutung.

Die allgemeineren Funktionen Sin x u. s. w. fallen mit den ursprünglichen zusammen, sobald

$$-\infty < x < +\infty$$

d. h. x reell ist.

Die allgemeineren Funktionen sind von Wichtigkeit; und in der Folge stets gemeint.

§. 159.

Nach den §. 152 und 153 ist nunmehr bei jedem reellen oder imaginairen Werth von x und y

$$1)\ e^{xi} = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x$$

$$2)\ e^{-xi} = \operatorname{Cos} x - i \operatorname{Sin} x$$

$$3)\ \operatorname{Cos} x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$4)\ \operatorname{Sin} x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

$$5)\ \operatorname{Sin} x^2 + \operatorname{Cos} x^2 = 1$$

$$6)\ \operatorname{Sin}(x+y) = \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y + \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} y$$

$$7)\ \operatorname{Sin}(x-y) = \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y - \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} y$$

$$8)\ \operatorname{Cos}(x+y) = \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y - \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y$$

$$9)\ \operatorname{Cos}(x-y) = \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y + \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y.$$

Und dividirt man 1) durch 2) so folgt noch

$$10)\ e^{2xi} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}.$$

§. 160.

Stellt g Null vor und jede positive und jede negative ganze Zahl, so ist

$$1)\ \operatorname{Cos}(2g\pi + x) = \operatorname{Cos} x$$

$$2)\ \operatorname{Sin}(2g\pi + x) = \operatorname{Sin} x.$$

Nach elementaren Lehren ist

$$\operatorname{Cos} 2g\pi = 1$$

$$\operatorname{Sin} 2g\pi = 0.$$

und es folgen die Gesetze aus dem vorigen Paragraphen 8) und 6).

§. 161.

Wenn n eine positive ganze Zahl vorstellt, und g Null und jede positive und jede negative ganze Zahl, so hat der Ausdruck

$$\mathrm{Cos}\,\frac{2g\pi + x}{n} + i\,\mathrm{Sin}\,\frac{2g\pi + x}{n}$$

n verschiedene Werthe bei jedem einzelnen Werth von x, und diese gehen hervor, wenn man statt g die Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n-1$$

setzt, oder auch

$$0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2,\ \ldots$$

bis n verschiedene Werthe erlangt sind.

1) Man denke g durch n dividirt, der Quotient sei q, der Rest z. Dann ist

$$g = nq + z$$

und es stellt z bei positivem g die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1$$

vor, bei negativem g die Werthe

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots\ -(n-1).$$

Der Werth nq + z werde statt g gesetzt, und es entsteht

$$\mathrm{Cos}\,\frac{2g\pi + x}{n} + i\,\mathrm{Sin}\,\frac{2g\pi + x}{n}$$

$$= \mathrm{Cos}\,\frac{2(nq + z)\pi + x}{n} + i\,\mathrm{Sin}\,\frac{2(nq + z)\pi + x}{n}$$

$$= \mathrm{Cos}\left(2q\pi + \frac{2z\pi + x}{n}\right) + i\,\mathrm{Sin}\left(2q\pi + \frac{2z\pi + x}{n}\right)$$

$$= \mathrm{Cos}\,\frac{2z\pi + x}{n} + i\,\mathrm{Sin}\,\frac{2z\pi + x}{n}$$

während statt z die angegebenen Werthe zu setzen sind.

2) Es ist

$$\mathrm{Cos}\,\frac{2(n-h)\pi+x}{n} = \mathrm{Cos}\left(2\pi + \frac{2(-h)\pi+x}{n}\right) = \mathrm{Cos}\,\frac{2(-h)\pi+x}{n}$$

$$\mathrm{Sin}\,\frac{2(n-h)\pi+x}{n} = \mathrm{Sin}\left(2\pi + \frac{2(-h)\pi+x}{n}\right) = \mathrm{Sin}\,\frac{2(-h)\pi+x}{n}$$

Daraus erhellet, daß $n-1$ und -1 einerlei Werthe gewähren, eben so $n-2$ und -2, $n-3$ und -3, ... 2 und $-(n-2)$, 1 und $-(n-1)$.

3) Aus 1) und 2) erhellet, daß die verschiedenen Werthe, welche der Ausdruck

$$\mathrm{Cos}\frac{2g\pi+x}{n}+i\,\mathrm{Sin}\frac{2g\pi+x}{n}$$

durch die sämmtlichen Werthe von g bei einerlei x erhalten kann, hervorgehen, wenn man statt g nur die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n-1$$

setzt, oder die Werthe

$$0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2,\ \ldots.$$

und daß er nicht mehr als n verschiedene Werthe ausgiebt

4) Es bleibt noch zu zeigen, daß diese Werthe von einander verschieden sind.

Sollte für zwei der Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n-1$$

sich Gleiches ergeben, so müßte, unter z und z′ diese Zahlen verstanden,

$$\mathrm{Cos}\frac{2z\pi+x}{n}=\mathrm{Cos}\frac{2z'\pi+x}{n}$$

zugleich $\mathrm{Sin}\frac{2z\pi+x}{n}=\mathrm{Sin}\frac{2z'\pi+x}{n}$

sein; oder gleichzeitig

$$\mathrm{Cos}\frac{2z\pi+x}{n}-\mathrm{Cos}\frac{2z'\pi+x}{n}=0$$

$$\mathrm{Sin}\frac{2z\pi+x}{n}-\mathrm{Sin}\frac{2z'\pi+x}{n}=0$$

oder gleichzeitig

$$2\mathrm{Sin}\frac{(z+z')\pi+x}{n}\mathrm{Sin}\frac{(z-z')\pi}{n}=0$$

$$2\mathrm{Cos}\frac{(z+z')\pi+x}{n}\mathrm{Cos}\frac{(z-z')\pi}{n}=0$$

z und z′ sind verschieden und beide kleiner als n; deshalb ist $z-z'$ nicht Null, und $\frac{z-z'}{n}$ ein echter Bruch (<1), also ist

niemals $\operatorname{Sin}\frac{z-z'}{n}\pi$ oder $\operatorname{Sin}\frac{z'-z}{n}\pi$ gleich Null. Wäre aber einer der Werthe $\operatorname{Sin}\frac{(z+z')\pi+x}{n}$ oder $\operatorname{Cos}\frac{(z+z')\pi+x}{n}$ gleich Null, so müßte der andere ± 1 sein. Es sind demnach niemals die beiden oberen Werthe gleichzeitig Null; und der vorgelegte Ausdruck liefert n verschiedene Werthe.

Damit ist der Satz erwiesen.

§. 162.

Es ist

1) $(\operatorname{Cos}x+i\operatorname{Sin}x)(\operatorname{Cos}y+i\operatorname{Sin}y)=\operatorname{Cos}(x+y)+i\operatorname{Sin}(x+y)$

2) $\frac{\operatorname{Cos}x+i\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}y+i\operatorname{Sin}y}=\operatorname{Cos}(x-y)+i\operatorname{Sin}(x-y)$

Denn es ist

$$(\operatorname{Cos}x+i\operatorname{Sin}x)(\operatorname{Cos}y+i\operatorname{Sin}y)=e^{xi}\cdot e^{yi}=e^{(x+y)i}$$
$$=\operatorname{Cos}(x+y)+i\operatorname{Sin}(x+y)$$

und

$$\frac{\operatorname{Cos}x+i\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}y+i\operatorname{Sin}y}=\frac{e^{xi}}{e^{yi}}=e^{(x-y)i}$$
$$=\operatorname{Cos}(x-y)+i\operatorname{Sin}(x-y).$$

§. 163.

Es ist, wenn n eine ganze Zahl vorstellt,

1) $(\operatorname{Cos}x\pm i\operatorname{Sin}x)^n=\operatorname{Cos}nx\pm i\operatorname{Sin}nx$

2) $(\operatorname{Cos}x\pm i\operatorname{Sin}x)^{\frac{1}{n}}=\operatorname{Cos}\frac{x}{n}\pm i\operatorname{Sin}\frac{x}{n}$.

Denn es ist

$$(\operatorname{Cos}x\pm i\operatorname{Sin}x)^n=(e^{\pm xi})^n=e^{\pm nxi}$$
$$=\operatorname{Cos}nx\pm i\operatorname{Sin}nx$$

ferner nach 1)

$$\left(\operatorname{Cos}\frac{x}{n}\pm i\operatorname{Sin}\frac{x}{n}\right)^n=\operatorname{Cos}x+i\operatorname{Sin}x$$

und das liefert 2), wenn man durch n radicirt.

§. 164.

Bezeichnen p und q beliebige reelle Ausdrücke und ist

$$p^2 + q^2 = 1$$

so läßt sich setzen

$$p + qi = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x$$

während x reell und bestimmt ist durch die Gleichungen

$$\operatorname{Cos} x = p$$
$$\operatorname{Sin} x = q$$

ist dagegen

$$p^2 + q^2 \gtrless 1$$

so läßt sich setzen

$$p + qi = r(\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x)$$

und es sind r und x reell und bestimmt durch die Gleichungen

$$r = +\sqrt{p^2 + q^2}$$

$$\operatorname{Cos} x = \frac{p}{r}$$

$$\operatorname{Sin} x = \frac{q}{r}.$$

Die Bedingung $p^2 + q^2 = 1$ bringt es mit sich, daß weder p noch q sich außerhalb der Gränzen -1 und $+1$ befinden kann; dieser Umstand und die Bedingung $p^2 + q^2 = 1$ rechtfertigen es aber, zu setzen

$$\operatorname{Cos} x = p$$
$$\operatorname{Sin} x = q$$

und diese beiden Gleichungen bestimmen (Geometrie Thl. I. 6te Aufl. §. 549) vollständig den Winkel x.

Ist $p^2 + q^2 \gtrless 1$ so kann nicht $p = \operatorname{Cos} x$ und $q = \operatorname{Sin} x$ gesetzt werden, weil $\operatorname{Sin}^2 + \operatorname{Cos}^2 = 1$. Wir versuchen daher zu setzen

$$p + qi = r(\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x)$$

und folgern

$$\frac{p}{r} + \frac{q}{r} i = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x$$

$$\frac{p}{r} = \operatorname{Cos} x$$

$$\frac{q}{r} = \operatorname{Sin} x$$

$$\frac{p^2}{r^2} + \frac{q^2}{r^2} = \operatorname{Cos} x^2 + \operatorname{Sin} x^2 = 1$$

$$p^2 + q^2 = r^2$$

und hiernach haben wir

$$r = \pm \sqrt{p^2 + q^2}$$

und dann

$$\operatorname{Cos} x = \frac{p}{r}$$

$$\operatorname{Sin} x = \frac{q}{r}.$$

Es ist $\sqrt{p^2 + q^2}$ in absoluter Hinsicht größer als p und größer als q, deshalb jeder der Brüche $\frac{p}{r}$ und $\frac{q}{r}$ absolut kleiner als 1; und da zugleich die Summe ihrer Quadrate 1 ausmacht, so können sie stets als Cos und Sin dienen. Die Vorzeichen von p und q, und das beliebig zu wählende von r, bedingen die Vorzeichen von Sin x und Cos x; der Einfachheit wegen nimmt man r positiv, und dann erhält Cos x einerlei Vorzeichen mit p, Sin x einerlei Zeichen mit q.

§. 165.

Der Ausdruck $\sqrt[n]{1}$, unter n eine positive ganze Zahl verstanden, hat n verschiedene Werthe.

Es ist

$$1 = \operatorname{Cos} 0 + i \operatorname{Sin} 0$$

daher auch, wenn g Null und jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt (§. 160).

$$1 = \operatorname{Cos}(2g\pi + 0) + i\operatorname{Sin}(2g\pi + 0).$$

Nach §. 163 ist nun

$$\sqrt[n]{1} = \operatorname{Cos}\frac{2g\pi + 0}{n} + i\operatorname{Sin}\frac{2g\pi + 0}{n}$$

und hieraus, oder was dasselbe ist, aus

$$\sqrt[n]{1} = \operatorname{Cos}\frac{2g\pi}{n} + i\operatorname{Sin}\frac{2g\pi}{n}$$

ergeben sich nach §. 161 n verschiedene Werthe.

Beispiel.

Es ist

$$\sqrt[3]{1} = \operatorname{Cos}\frac{2g\pi}{3} + i\operatorname{Sin}\frac{2g\pi}{3}$$

und setzt man statt g die Werthe 0, + 1, — 1, so entsteht

$$\sqrt[3]{1} = \operatorname{Cos}0 + i\operatorname{Sin}0 = 1$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \operatorname{Cos}\tfrac{2}{3}\pi + i\operatorname{Sin}\tfrac{2}{3}\pi \\ &= -\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\pi + i\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\pi \\ &= -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \operatorname{Cos}(-\tfrac{2}{3}\pi) + i\operatorname{Sin}(-\tfrac{2}{3}\pi) \\ &= \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\end{aligned}$$

und jeder von den drei erhaltenen Werthen liefert 1, wenn man ihn mit 3 potenzirt.

§. 166.

Der Ausdruck $\sqrt[n]{-1}$, unter n eine positive ganze Zahl verstanden, hat n verschiedene Werthe.

Es ist

$$-1 = \operatorname{Cos}\pi + i\operatorname{Sin}\pi$$

also auch

$$-1 = \operatorname{Cos}(2g\pi + \pi) + i\operatorname{Sin}(2g\pi + \pi)$$

und dann

$$\sqrt[n]{-1} = \operatorname{Cos}\frac{(2g+1)\pi}{n} + i\operatorname{Sin}\frac{(2g+1)\pi}{n}.$$

§. 167.

Daher hat auch $\sqrt[n]{\pm a}$, unter n eine positive ganze Zahl verstanden, n verschiedene Werthe; und sie gehen hervor, wenn man den absoluten Werth von $\sqrt[n]{a}$ mit den n verschiedenen Werthen von $\sqrt[n]{\pm 1}$ multiplicirt.

§. 168.

Der Ausdruck $\sqrt[n]{p + qi}$, unter n eine positive ganze Zahl verstanden, hat n verschiedene Werthe.

Ist $p^2 + q^2 = 1$, so läßt sich nach §. 164 setzen

$$p + qi = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x$$

dann weiter, nach §. 160

$$p + qi = \operatorname{Cos}(2g\pi + x) + i \operatorname{Sin}(2g\pi + x).$$

Hieraus folgt nach §. 163

$$(p + qi)^{\frac{1}{n}} = \operatorname{Cos} \frac{2g\pi + x}{n} + i \operatorname{Sin} \frac{2g\pi + x}{n}$$

und das liefert n verschiedene Werthe nach §. 161.

Ist $p^2 + q^2 \gtrless 1$, so bilde man nach §. 164

$$p + qi = r(\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x)$$

und es folgt

$$\alpha)\quad (p + qi)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\ \sqrt[n]{\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x}$$

Nun ist nach §. 167 und §. 165

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{r}\left(\operatorname{Cos} \frac{2g'\pi}{n} + i \operatorname{Sin} \frac{2g'\pi}{n}\right)$$

wenn unter $\sqrt[n]{r}$ zur Rechten der absolute Werth verstanden wird, und g′ Null vorstellt und jede positive oder negative ganze Zahl. Weiter ist

$$\sqrt[n]{\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x} = \operatorname{Cos} \frac{2g''\pi + x}{n} + i \operatorname{Sin} \frac{2g''\pi + x}{n}$$

unter g″ Null verstanden und jede positive oder negative ganze Zahl. Diese Werthe in α) gesetzt liefern nach §. 162 1)

$$(p + qi)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\operatorname{Cos} \frac{2(g' + g'')\pi + x}{n} + i \operatorname{Sin} \frac{2(g' + g'')\pi + x}{n}\right].$$

Hier ist $\sqrt[n]{r}$ absolut, und $g' + g''$ liefert nichts Anderes als Null und jede positive oder negative ganze Zahl. Daher ist zu setzen

$$(p + qi)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\operatorname{Cos}\frac{2g\pi + x}{n} + i\operatorname{Sin}\frac{2g\pi + x}{n}\right)$$

und es ergeben sich n Werthe nach §. 161.

§. 169.

Es ist

$$\ln(\operatorname{Cos}x + i\operatorname{Sin}x) = (2g\pi + x)i$$

während g Null vorstellt und jede positive oder negative ganze Zahl.

Denn es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}x + i\operatorname{Sin}x &= \operatorname{Cos}(2g\pi + x) + i\operatorname{Sin}(2g\pi + x)\\ &= e^{(2g\pi+x)i}.\end{aligned}$$

§. 170.

Es ist

$$\begin{aligned}&1)\ \ln 1 = 2g\pi i\\ &2)\ \ln i = (2g + \tfrac{1}{2})\pi i\\ &3)\ \ln(-1) = (2g + 1)\pi i\\ &4)\ \ln(-i) = (2g + \tfrac{3}{2})\pi i.\end{aligned}$$

Nach dem vorigen Paragraphen, wenn man $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$ statt x setzt.

§. 171.

Es sei a eine absolute Zahl, z ihr natürlicher Logarithmus nach §. 149. Dann ist auch

$$1)\ \ln a = z + 2g\pi i$$

weiter

$$\begin{aligned}&2)\ \ln(-a) = z + (2g + 1)\pi i\\ &3)\ \ln(ai) = z + (2g + \tfrac{1}{2})\pi i\\ &4)\ \ln(-ai) = z + (2g + \tfrac{3}{2})\pi i.\end{aligned}$$

Es ist $\ln a = \ln(a \cdot 1) = \ln a + \ln 1 = z + 2g\pi i$ nach der Annahme und nach 1) des vorigen Paragraphen. Eben so folgen die übrigen Gesetze.

§. 172.

Ist $p + qi = \mathrm{Cos}\,x + i\mathrm{Sin}\,x$

so ist $\ln(p + qi) = (2g\pi + x)i$

und ist $p + qi = r(\mathrm{Cos}\,x + i\mathrm{Sin}\,x)$

so ist $\ln(p + qi) = \ln r + (2g\pi + x)i.$

Erhellet aus §. 169.

§. 173.

Der Ausdruck $p + qi$, in welchem p und q reell sind, kann als der allgemeinste Zahlenausdruck gelten; denn nach dem Bisherigen gehen alle sonstigen imaginairen Ausdrücke auf ihn zurück, und er umschließt die reellen, wenn q Null ist.

§. 174.

Unter arc sin z (zu lesen arcus sinus z) versteht man den Kreisbogen zum Halbmesser 1, dessen Sinus den Werth z hat; oder es bezeichnet arc sin z den Werth von x, welcher der Gleichung entspricht

$$z = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Ueberhaupt stellt x irgend eine Zahl (einen Bogen) vor, z den dazu gehörigen Sinus, so sind die Zahlen x und z von einander abhängig, jede kann als Funktion der anderen betrachtet werden; betrachtet man z als Funktion von x, so wird z durch Sin x bezeichnet, betrachtet man dagegen x als Funktion von z, so bezeichnet man x durch arc sin z.

Die Funktion arc sin z läßt sich herstellen, indem man die obige Reihe umkehrt; und es ergiebt sich (§. 112 9)

$$x = \mathrm{arc\,sin}\,z = z + \frac{1}{2\cdot3}z^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}z^5 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}z^7 + \dots\dots$$

Es versteht sich jetzt von selbst, welche Bedeutung die Zeichen arc cos z, arc tg z u. s. w. haben.

Derselbe Sinus z gehört zu unendlich vielen Bogen; deshalb stellt arc sin z unendlich viele Werthe vor. Eben so arc cos z u. s. w. Diese Mehrdeutigkeit ist zu beachten.

§. 175.

Ist z der Werth des Sinus irgend eines Bogens, so ist $\sqrt{1-z^2}$ der Werth des Cosinus desselben Bogens, $\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ der Werth seiner Tangente u. s. f. Daher ist

$$\operatorname{arc}\sin z = \operatorname{arc}\cos\sqrt{1-z^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \text{ u. s. w.}$$

Eben so

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \operatorname{arc}\sin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{arc}\cos\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \text{ u. s. w.}$$

U. m. dergl.

§. 176.

Es ist

1) $\operatorname{arc}\sin y + \operatorname{arc}\sin z = \operatorname{arc}\sin(y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-y^2})$

2) $\operatorname{arc}\sin y - \operatorname{arc}\sin z = \operatorname{arc}\sin(y\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-y^2})$

3) $\operatorname{arc}\cos y + \operatorname{arc}\cos z = \operatorname{arc}\cos[yz - \sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}]$

4) $\operatorname{arc}\cos y - \operatorname{arc}\cos z = \operatorname{arc}\cos[yz + \sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}]$

5) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} y + \operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{y+z}{1-yz}$

6) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} y - \operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{y-z}{1+yz}$

7) $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} y + \operatorname{arc}\operatorname{cotg} z = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{yz-1}{z+y}$

8) $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} y - \operatorname{arc}\operatorname{cotg} z = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{yz+1}{z-y}$

Es ist

$$\operatorname{Sin}(\alpha+\beta) = \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta.$$

Setzen wir

$$\operatorname{Sin}(\alpha+\beta) = s$$

$$\operatorname{Sin}\alpha = y, \text{ also } \operatorname{Cos}\alpha = \sqrt{1-y^2}$$

$$\operatorname{Sin}\beta = z \qquad \operatorname{Cos}\beta = \sqrt{1-z^2}$$

so ist nach der angezogenen Formel

$$s = y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-y^2}.$$

Ferner ist

$$\arcsin s = \alpha + \beta$$
$$\arcsin y = \alpha$$
$$\arcsin z = \beta$$

also

$$\arcsin y + \arcsin z = \arcsin s$$

oder, wenn wir für s den Werth setzen

$$\arcsin y + \arcsin z = \arcsin(y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - y^2})$$

Das ist die Formel 1).

Wir wollen noch die Formel 5) herleiten.

Es ist

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Nun sei

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = s$$
$$\operatorname{tg}\alpha = y$$
$$\operatorname{tg}\beta = z$$

so ist

$$s = \frac{y + z}{1 - yz}.$$

Weiter ist

$$\operatorname{arctg} s = \alpha + \beta$$
$$\operatorname{arctg} y = \alpha$$
$$\operatorname{arctg} z = \beta$$

also

$$\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} s$$

oder für s den Werth gesetzt

$$\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} \frac{y + z}{1 - yz}.$$

Die übrigen Formeln ergeben sich ähnlich.

§. 177.

Es ist

1) $\arcsin z = \frac{1}{i} \ln(\sqrt{1 - z^2} + iz)$

$\arcsin z = -\frac{1}{i} \ln(\sqrt{1 - z^2} - iz)$

$$2)\quad \arccos z = \frac{1}{i}\ln(z + i\sqrt{1 - z^2})$$

$$\arccos z = -\frac{1}{i}\ln(z - i\sqrt{1 - z^2})$$

$$3)\quad \operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1}{2i}\ln\frac{i - z}{i + z}$$

$$4)\quad \ln z = i \arcsin i\frac{1 - z^2}{2z}$$

$$\ln z = -i\arcsin i\frac{z^2 - 1}{2z}$$

$$5)\quad \ln z = \pm i\arccos\frac{1 + z^2}{2z}$$

$$6)\quad \ln z = 2i\operatorname{arc\,tg} i\frac{1 - z}{1 + z}.$$

Von den Formeln 1), 2), 10) in §. 159 werde der Logarithmus genommen; das liefert, weil $\ln(e^m) = m$ ist,

$$\alpha)\quad x = \frac{1}{i}\ln(\mathrm{Cos}\,x + i\,\mathrm{Sin}\,x)$$

$$= \frac{1}{i}\ln(\sqrt{1 - \mathrm{Sin}\,x^2} + i\,\mathrm{Sin}\,x)$$

$$= \frac{1}{i}\ln(\mathrm{Cos}\,x + i\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,x^2})$$

$$\beta)\quad x = \frac{1}{-i}\ln(\mathrm{Cos}\,x - i\,\mathrm{Sin}\,x)$$

$$= \frac{1}{-i}\ln(\sqrt{1 - \mathrm{Sin}\,x^2} - i\,\mathrm{Sin}\,x)$$

$$= \frac{1}{-i}\ln(\mathrm{Cos}\,x - i\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,x^2})$$

$$\gamma)\quad x = \frac{1}{2i}\ln\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,x}{1 - i\,\mathrm{tg}\,x}.$$

Man setze $\mathrm{Sin}\,x = z$, also $x = \arcsin z$, substituire diese Werthe gehörigen Orts in α) und β), und es entstehen die Formeln 1). Setzt man $\mathrm{Cos}\,x = z$, also $x = \arccos z$, so ergeben sich aus α) und β) die Formeln 2). 3) entsteht aus γ), wenn man $\mathrm{tg}\,x = z$, also $x = \operatorname{arc\,tg} z$ setzt.

Die Formeln 4), 5), 6) folgen beziehlich aus denen 1), 2), 3). Man setze z. B.

$$\delta)\ \sqrt{1-z^2}+iz=y$$

und entwickele hieraus z; das liefert

$$\varepsilon)\ z=\frac{y^2-1}{2iy}=i\frac{1-y^2}{2y}.$$

Die Werthe δ) und ε) substituire man in der ersten Formel; es entsteht

$$\arc\sin i\frac{1-y^2}{2y}=\frac{1}{i}\ln y$$

welches, wenn man mit i multiplicirt und z statt y schreibt, die erste Formel unter 4) ist. Eben so ergeben sich die übrigen.

§. 178.

Es ist

$$1)\ x=\operatorname{tg}x-\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}x^3+\tfrac{1}{5}\operatorname{tg}x^5-\tfrac{1}{7}\operatorname{tg}x^7+\ldots.$$

$$2)\ \operatorname{arc}\operatorname{tg}z=z-\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5-\tfrac{1}{7}z^7+\ldots.$$

Die erste Reihe ist convergent, so lange tg x, die andere, so lange z in den Gränzen + 1 und — 1 sich befindet.

Man entwickele $\ln\frac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}$ nach der Formel §. 149 γ); es entsteht

$$\ln\frac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}=2i[\operatorname{tg}x-\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}x^3+\tfrac{1}{5}\operatorname{tg}x^5-\tfrac{1}{7}\operatorname{tg}x^7+\ldots.]$$

und, wenn man diesen Werth in der Gleichung γ) des vorigen Paragraphen substituirt, ergiebt sich die Formel 1). Die zweite Formel geht aus der ersten hervor, indem man $\operatorname{tg}x=z$, also $x=\operatorname{arc}\operatorname{tg}z$ setzt.

§. 179.

Es ist, unter n eine positive ganze Zahl verstanden,

$$1)\ \operatorname{Cos}nx=\operatorname{Cos}x^n-n_2\operatorname{Cos}x^{n-2}\operatorname{Sin}x^2+n_4\operatorname{Cos}x^{n-4}\operatorname{Sin}x^4-\ldots.$$

$$2)\ \operatorname{Sin}nx=n\operatorname{Cos}x^{n-1}\operatorname{Sin}x-n_3\operatorname{Cos}x^{n-3}\operatorname{Sin}x^3+n_5\operatorname{Cos}x^{n-5}\operatorname{Sin}x^5-\ldots.$$

$$3)\quad \operatorname{tg} nx = \frac{n \operatorname{tg} x - n_3 \operatorname{tg} x^3 + n_5 \operatorname{tg} x^5 - \ldots}{1 - n_2 \operatorname{tg} x^2 + n_4 \operatorname{tg} x^4 - n_6 \operatorname{tg} x^6 + \ldots}$$

$$4)\quad \operatorname{Cotg} nx = \frac{\operatorname{Cotg} x^n - n_2 \operatorname{Cotg} x^{n-2} + n_4 \operatorname{Cotg} x^{n-4} - \ldots}{n \operatorname{Cotg} x^{n-1} - n_3 \operatorname{Cotg} x^{n-3} + n_5 \operatorname{Cotg} x^{n-5} - \ldots}.$$

Aus §. 163 1) folgt, wenn man den binomischen Satz anwendet,

$$\operatorname{Cos} nx + i \operatorname{Sin} nx = \operatorname{Cos} x^n + n i \operatorname{Cos} x^{n-1} \operatorname{Sin} x$$
$$- n_2 \operatorname{Cos} x^{n-2} \operatorname{Sin} x^2 - n_3 i \operatorname{Cos} x^{n-3} \operatorname{Sin} x^3 + \ldots$$
$$\operatorname{Cos} nx - i \operatorname{Sin} nx = \operatorname{Cos} x^n - n i \operatorname{Cos} x^{n-1} \operatorname{Sin} x$$
$$- n_2 \operatorname{Cos} x^{n-2} \operatorname{Sin} x^2 + n_3 i \operatorname{Cos} x^{n-3} \operatorname{Sin} x^3 + \ldots$$

und die Addition und Subtraction dieser Gleichungen liefert die Formeln 1) und 2).

Die Formel 2) werde durch die Formel 1) dividirt, darauf dividire man Zähler und Nenner des rechts entstehenden Quotienten durch $\operatorname{Cos} x^n$; das liefert die Formel 3); ähnlich ergiebt sich 4).

§. 180.

Es sei n eine positive ganze Zahl. Ist dabei n ungerade, so ist

$$1)\quad 2^{n-1} \operatorname{Cos} x^n = \operatorname{Cos} nx + n_1 \operatorname{Cos}(n-2)x + n_2 \operatorname{Cos}(n-4)x + \ldots$$
$$\ldots + n_t \operatorname{Cos}(n-2t)x + \ldots + n_{\frac{n-3}{2}} \operatorname{Cos} 3x + n_{\frac{n-1}{2}} \operatorname{Cos} x$$

$$2)\quad 2^{n-1} \operatorname{Sin} x^n = \operatorname{Sin}\frac{n\pi}{2}\Big[\operatorname{Sin} nx - n_1 \operatorname{Sin}(n-2)x + n_2 \operatorname{Sin}(n-4)x$$
$$- n_3 \operatorname{Sin}(n-6)x + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{n-1}{2}} \operatorname{Sin} x\Big].$$

Ist dagegen n gerade, so ist

$$3)\quad 2^{n-1} \operatorname{Cos} x^n = \operatorname{Cos} nx + n_1 \operatorname{Cos}(n-2)x + n_2 \operatorname{Cos}(n-4)x + \ldots$$
$$\ldots + n_{\frac{n-2}{2}} \operatorname{Cos} 2x + \tfrac{1}{2} n_{\frac{n}{2}}$$

$$4)\quad 2^{n-1} \operatorname{Sin} x^n = \operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}\Big[\operatorname{Cos} nx - n_1 \operatorname{Cos}(n-2)x + n_2 \operatorname{Cos}(n-4)x$$
$$- n_3 \operatorname{Cos}(n-6)x + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \tfrac{1}{2} n_{\frac{n}{2}}\Big].$$

Es ist

$$(\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x)(\operatorname{Cos} x - i \operatorname{Sin} x) = \operatorname{Cos} x^2 + \operatorname{Sin} x^2 = 1.$$

Setzen wir also

$$\alpha)\ \mathrm{Cos}\,x + i\mathrm{Sin}\,x = z$$

so ist

$$\beta)\ \mathrm{Cos}\,x - i\mathrm{Sin}\,x = \frac{1}{z}.$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert

$$\gamma)\ 2\mathrm{Cos}\,x = z + \frac{1}{z}$$

potenziren wir die Gleichungen α) und β) mit der ganzen Zahl q, so entsteht

$$\delta)\ \mathrm{Cos}\,qx + i\mathrm{Sin}\,qx = z^q$$

$$\varepsilon)\ \mathrm{Cos}\,qx - i\mathrm{Sin}\,qx = \frac{1}{z^q}$$

und die Addition dieser Gleichungen liefert

$$\zeta)\ 2\mathrm{Cos}\,qx = z^q + \frac{1}{z^q}.$$

Nun sei n eine positive ganze Zahl. Aus γ) erhalten wir dann durch den binomischen Satz

$$2^n\mathrm{Cos}\,x^n = z^n + nz^{n-2} + n_2 z^{n-4} + \ldots + n_t z^{n-2t} + \ldots$$
$$\ldots + n_2\frac{1}{z^{n-4}} + n\frac{1}{z^{n-2}} + \frac{1}{z^n}$$

oder umgekehrt geordnet

$$2^n\mathrm{Cos}\,x^n = \frac{1}{z^n} + n\frac{1}{z^{n-2}} + n_2\frac{1}{z^{n-4}} + \ldots \quad + nz^{n-2} + z^n.$$

Diese beiden Gleichungen addiren wir und wenden die Formel ζ) an; dadurch entsteht

$$\eta)\ 2^n\mathrm{Cos}\,x^n = \mathrm{Cos}\,nx + n_1\mathrm{Cos}(n-2)x + n_2\mathrm{Cos}(n-4)x + \ldots$$
$$\ldots + n_t\mathrm{Cos}(n-2t)x + \ldots + n\mathrm{Cos}(n-2)x + \mathrm{Cos}\,nx$$

und wenn wir rechts die gleichen Glieder zusammenfassen, ergiebt sich für ein ungerades n die Formel 1), für ein gerades n die Formel 2). Die letzten Glieder der Formeln 1) und 2) wollen wir für Anfänger näher nachweisen. Die unter η) rechts stehende Summe umfaßt $n+1$ Glieder. Ist n ungerade, so ist $n+1$ gerade, und es lassen sich zwei und zwei Glieder zusammenfassen, ohne eins übrig zu behalten. Nach dem Zusammenfassen hat man $\frac{n+1}{2}$ Glieder. Das letzte derselben ist das $\frac{n+1}{2}$ste. Der Zei-

ger seines Binomial-Coefficienten ist $\frac{n+1}{2}-1$ oder $\frac{n-1}{2}$. Die allgemeine Form jedes Gliedes ist $n_t \mathrm{Cos}(n-2t)x$. Daher ist jenes letzte Glied

$$n_{\frac{n-1}{2}} \mathrm{Cos}\left(n-2\frac{n-1}{2}\right)x \text{ oder } n_{\frac{n-1}{2}} \mathrm{Cos}\, x.$$

Ist dagegen n gerade, so ist $n+1$ ungerade. Beim Zusammenfassen der Glieder bleibt das mittlere übrig. Dies ist das $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ste; also ist der Zeiger seines Binomial-Coefficienten gleich $\frac{n}{2}+1-1$ oder $\frac{n}{2}$, und das Glied selbst

$$n_{\frac{n}{2}} \mathrm{Cos}\left(n-2\frac{n}{2}\right)x \text{ d. h. } n_{\frac{n}{2}}$$

und wenn mit 2 gehoben wird, erhält es noch den Coefficienten $\frac{1}{2}$.

Die Formeln 2) und 4) ergeben sich beziehlich aus denen 1) und 3). Wir setzen nämlich

$$x = \tfrac{1}{2}\pi - y.$$

Dann ist

$$\mathrm{Cos}\, x = \mathrm{Sin}\, y$$

und

$$\mathrm{Cos}\, hx = \mathrm{Cos}\left(\frac{h\pi}{2} - hy\right) = \mathrm{Cos}\frac{h\pi}{2}\mathrm{Cos}\, hy + \mathrm{Sin}\frac{h\pi}{2}\mathrm{Sin}\, hy.$$

Für ein ungerades h folgt hieraus

$$\vartheta)\quad \mathrm{Cos}\, hx = \mathrm{Sin}\frac{h\pi}{2}\mathrm{Sin}\, hy$$

ist aber h gerade, so folgt

$$\iota)\quad \mathrm{Cos}\, hx = \mathrm{Cos}\frac{h\pi}{2}\mathrm{Cos}\, hy.$$

Nach ϑ) ergiebt sich, da wenn n ungerade ist, auch $n-2$, $n-4$, $n-6$, ... ungerade sind

$$\mathrm{Cos}\, nx = \mathrm{Sin}\frac{n\pi}{2}\mathrm{Sin}\, ny$$

$$\mathrm{Cos}(n-2)x = \mathrm{Sin}\frac{n-2}{2}\pi\mathrm{Sin}(n-2)y = -\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{2}\mathrm{Sin}(n-2)y$$

$$\mathrm{Cos}(n-4)x = \mathrm{Sin}\frac{n-4}{2}\pi\,\mathrm{Sin}(n-4)y = \mathrm{Sin}\frac{n\pi}{2}\mathrm{Sin}(n-4)y$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Setzen wir diese Werthe in 1), und darauf x statt y, so entsteht die Formel 2).

Aus ι) folgt, weil mit n auch n—2, n—4, ... gerade sind

$$\mathrm{Cos}\,nx = \mathrm{Cos}\frac{n\pi}{2}\mathrm{Cos}\,ny$$

$$\mathrm{Cos}(n-2)x = \mathrm{Cos}\frac{n-2}{2}\pi\,\mathrm{Cos}(n-2)y = -\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{2}\mathrm{Cos}(n-2)y$$

$$\mathrm{Cos}(n-4)x = \mathrm{Cos}\frac{n-4}{2}\pi\,\mathrm{Cos}(n-4)y = \mathrm{Cos}\frac{n\pi}{2}\mathrm{Cos}(n-4)y$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

und, wenn wir diese Werthe in 3) substituiren, ergiebt sich 4).

§. 181.

Die Umkehrung der Reihe für Sin x liefert

$$x = \mathrm{Sin}\,x + \frac{1}{2\cdot3}\mathrm{Sin}\,x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\mathrm{Sin}\,x^5 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}\mathrm{Sin}\,x^7 + \ldots.$$

Vergl. §. 112 9).

Durch diese Reihe kann die Zahl π berechnet werden. Es ist nämlich $\mathrm{Sin}\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, folglich

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot3\cdot2^3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot2^5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot2^7} + \ldots.$$

oder

$$\pi = 6\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot3\cdot2^3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot2^5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot2^7} + \ldots\right]$$

und da die Reihe convergent ist, wie leicht erhellet, auch ziemlich schnell abnimmt, so läßt sich die Zahl π ohne große Mühe mit hinreichender Genauigkeit durch sie erhalten.

Nachtrag.

§. 182.

Auch die unbestimmten Coefficienten lassen sich benutzen, die Reihen für a^x u. s. f. zu gewinnen; und wir geben nachträglich diese Entwickelungen, nebst einigen Bemerkungen.

§. 183.

Aufgabe. Die Potenz a^x in eine Reihe zu verwandeln, welche nach den Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung. Die Aufgabe besteht zunächst darin, die unbekannten constanten Coefficienten A, B, C, D, E, F.... der Bedingung gemäß aufzufinden, daß

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots.$$

werde für jeden positiven oder negativen ganzen oder gebrochenen Werth des Urveränderlichen x.

Der Coefficient A ist gleich 1; denn in dem besonderen Fall, daß x Null ist, geht die Gleichung über in

$$1 = A.$$

Wir dürfen daher setzen

$$1)\ a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots.$$

Die übrigen unbekannten Coefficienten B, C, D, E, F.... zu finden, kommt es zunächst darauf an, Gleichungen für sie herzuleiten. Zu dem Ende setzen wir in 1) statt x jeden der Ausdrücke y, z und y + z. Das liefert

$$2)\ a^y = 1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + Fy^5 + \ldots.$$

$$3)\ a^z = 1 + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \ldots.$$

$$4)\ a^{y+z} = 1 + B(y+z) + C(y+z)^2 + D(y+z)^3 + \ldots.$$

In der letzten Gleichung lösen wir alle Klammern auf, und ordnen nach den Potenzen von z; dadurch entsteht:

$$5)\ a^{y+z} = (1 + By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots.)z^0$$
$$+ (B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + 5Fy^5 + \ldots.)z + \ldots.$$

Die Gleichungen 2) und 3) multipliciren wir mit einander, und ordnen ebenfalls nach den Potenzen von z; das liefert

$$6)\ a^{y+z} = (1 + By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots.)z^0$$
$$+ (B + B^2y + BCy^2 + BDy^3 + BEy^4 + \ldots.)z + \ldots.$$

Diese Gleichung gilt wiederum für jeden Werth von y. Also sind die Coefficienten von einerlei Potenzen des Urveränderlichen y gleich, und dieser Umstand liefert für die Unbekannten B, C, D .... folgende Gleichungen

$$2C = B^2$$
$$3D = BC$$
$$4E = BD$$
$$5F = BE$$
$$\vdots \quad \vdots$$

Die Anzahl derselben bleibt um 1 geringer, als die Anzahl der Unbekannten. Die Gleichungen reichen daher zur Bestimmung der Unbekannten nicht aus, können indeß dienen, vermittelst eines der Unbekannten alle übrigen auszudrücken. Wir wollen den ersten beibehalten, nämlich B, und die übrigen entwickeln. Es ergiebt sich:

$$C = \frac{B^2}{2}$$
$$D = \frac{B^3}{3!}$$
$$E = \frac{B^4}{4!}$$
$$F = \frac{B^5}{5!}$$
$$\vdots \quad \vdots$$

Und substituiren wir diese Werthe in der Gleichung 1) so entsteht

$$7)\ a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2!}x^2 + \frac{B^3}{3!}x^3 + \frac{B^4}{4!}x^4 + \frac{B^5}{5!}x^5 + \ldots.$$

Der Unbekannte B, welcher noch zu ermitteln ist, hängt von a ab; denn die rechts stehende Reihe muß andere Werthe annehmen, wenn statt des Constanten a andere Constante c, d ....

gesetzt werden, und da eine Aenderung des a für x gleichgiltig ist, muß sie auf B Einfluß üben. Wie die Ausdrücke a und B von einander abhängen tritt hervor, wenn wir $\frac{1}{B}$ statt x setzen; dadurch entsteht

$$a^{\frac{1}{B}} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = e$$

oder

$$a = e^B$$

folglich ist

$$B = \ln a$$

und es entspringt, diesen Werth in 7) substituirend

$$a^x = 1 + (\ln a)x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \ldots$$

hieraus ferner, da $\ln e = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

Wir bemerken zu dieser Entwickelung in der Kürze Nachstehendes:

Die Frage, wegen des Bestehens einer Reihe für a^x, erledigt sich, indem sie gefunden wird.

Als man zunächst

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

setzte, wurde der Exponent in der Bedeutung gedacht, welche er nach elementaren Lehren erhalten kann; aber die Bedeutung von x in der Reihe ist nicht beschränkt.

Gleichungen für die Coefficienten zu erlangen, wurde das Gesetz

$$a^y \cdot a^z = a^{y+z}$$

genutzt, und ihm entspricht die zuletzt erzielte Reihe. Man setze

$$1 + By + Cy^2 + \ldots = fy$$

und die Bedingung drückt sich aus durch

$$f_y \cdot f_z = f_{y+z}.$$

In ihr liegt das Hauptgesetz der Potenzen. Ob aber f_y, indem es dieser Bedingung genügt, lediglich eine elementare Potenz sein werde, oder von erweiterter Bedeutung, ist eine Frage, die sich

aufdrängt. Die Erörterungen bei der ersten Entwickelung haben dargelegt, daß die Endreihe von allgemeinerer Bedeutung ist.

§. 184.

Aufgabe. Die trigonometrischen Funktionen Sin x und Cos x in Reihen zu verwandeln, welche nach den Potenzen von x fortschreiten.

Auflösung. Wir beschäftigen uns zunächst mit Cos x; und unsere Aufgabe besteht darin, die unbekannten constanten Coefficienten A′, B′, C′, D′ .... zu ermitteln, der Bedingung gemäß, daß

$$\text{Cos}\,x = A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots.$$

sei, für die Werthe, welche x annehmen kann.

Der Coefficient A′ ist 1. Denn für den Fall, daß x Null ist, geht die Gleichung über in

$$\text{Cos}\,0 = A'$$

und es ist $\text{Cos}\,0 = 1$.

Die Coefficienten derjenigen Potenzen von x, welche ungerade Exponenten haben, sind sämmtlich Null. Es ist nämlich $\text{Cos}\,x = \text{Cos}(-x)$; die Reihe für Cos x darf daher keine Aenderung erleiden, wenn $-x$ statt x gesetzt wird, und dieser Bedingung leistet sie nur Genüge, wenn in ihr keine Potenzen von x mit ungeraden Exponenten vorkommen.

Dem Bisherigen gemäß beginnt die Reihe für Cos x mit 1, und enthält keine Potenzen von x mit ungeraden Exponenten. Wir setzen daher

$$1)\ \text{Cos}\,x = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + Gx^{10} + \ldots.$$

und suchen die unbekannten constanten Coefficienten A, B, C, D ....

Gleichungen für die unbekannten Coefficienten herzuleiten benutzen wir die Formel

$$\text{Cos}(y+z) + \text{Cos}(y-z) = 2\,\text{Cos}\,y\,\text{Cos}\,z.$$

In 1) setzen wir nach und nach $y+z$, $y-z$, y, z statt x; das liefert

$$2)\ \mathrm{Cos}(y+z) = 1 + A\left\{\begin{array}{l} y^2 \\ +\,2yz \\ +\,z^2 \end{array}\right\} + B\left\{\begin{array}{l} y^4 \\ +\,4y^3z \\ +\,4_2y^2z^2 \\ +\,4_3yz^3 \\ +\,z^4 \end{array}\right\}$$

$$+\,C\left\{\begin{array}{l} y^6 \\ +\,6y^5z \\ +\,6_2y^4z^2 \\ +\,6_3y^3z^3 \\ +\,6_4y^2z^4 \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \end{array}\right\} + D\left\{\begin{array}{l} y^8 \\ +\,8y^7z \\ +\,8_2y^6z^2 \\ +\,8_3y^5z^3 \\ +\,8_4y^4z^4 \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \end{array}\right\} + \ldots.$$

$$3)\ \mathrm{Cos}(y-z) = 1 + A\left\{\begin{array}{l} y^2 \\ -\,2yz \\ +\,z^2 \end{array}\right\} + B\left\{\begin{array}{l} y^4 \\ -\,4y^3z \\ +\,4_2y^2z^2 \\ -\,4_3yz^3 \\ +\,z^4 \end{array}\right\}$$

$$+\,C\left\{\begin{array}{l} y^6 \\ -\,6y^5z \\ +\,6_2y^4z^2 \\ -\,6_3y^3z^3 \\ +\,6_4y^2z^4 \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \end{array}\right\} + D\left\{\begin{array}{l} y^8 \\ -\,8y^7z \\ +\,8_2y^6z^2 \\ -\,8_3y^5z^3 \\ +\,8_4y^4z^4 \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \end{array}\right\} + \ldots.$$

$$4)\ \mathrm{Cos}\,y = 1 + Ay^2 + By^4 + Cy^6 + Dy^8 + \ldots.$$

$$5)\ \mathrm{Cos}\,z = 1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + \ldots.$$

Die Gleichungen 2) und 3) addiren wir und ordnen nach den Potenzen von z; dadurch entsteht, wenn der Faktor 2, welcher sich rechts überall ergiebt, herausgenommen wird:

$$6)\ \mathrm{Cos}(y+z)+\mathrm{Cos}(y-z) = 2[(1+Ay^2+By^4+Cy^6+\ldots.)z^0$$
$$+(A+4_2By^2+6_2Cy^4+8_2Dy^6+\ldots.)z^2+\ldots.].$$

Die Gleichungen 4) und 5) multipliciren wir mit einander, ordnen nach den Potenzen von z, und nehmen die sich ergebende

Gleichung doppelt (wegen der oben angezogenen trigonometrischen Formel); das liefert

$$7)\ 2\cos y\cos z = 2[(1 + Ay^2 + By^4 + Cy^6 + \ldots.)z^0 + (A + A^2y^2 + ABy^4 + ACy^6 + \ldots.)z^2 + \ldots.].$$

Die in 6) und 7) links stehenden Ausdrücke sind gleich für alle Werthe, welche y und z annehmen können, daher sind auch die rechts stehenden Reihen für alle diese Werthe gleich, und es folgt, daß die Coefficienten gleich sind, welche denselben Potenzen von z angehören. Daher ist

$$A + 4_2By^2 + 6_2Cy^4 + 8_2Dy^6 + \ldots. = A + A^2y^2 + ABy^4 + ACy^6 + ADy^8 + \ldots.$$

und weil auch diese Gleichung in Erfüllung geht für alle Werthe von y, so haben wir die nachstehenden Gleichungen für die unbekannten Coefficienten A, B, C, D ....:

$$4_2B = A^2$$
$$6_2C = AB$$
$$8_2D = AC$$
$$10_2G = AD$$
$$\vdots \quad \vdots$$

Die Anzahl der Gleichungen bleibt um 1 geringer, als die Anzahl der Unbekannten. Die Gleichungen reichen deshalb nicht aus, die Unbekannten zu entwickeln; sie können indeß dienen, vermittelst eines der Unbekannten alle übrigen auszudrücken, und dies mag vermittelst A geschehen. Wir erhalten

$$B = \frac{A^2}{4_2}$$
$$C = \frac{A^3}{4_2 \cdot 6_2}$$
$$D = \frac{A^4}{4_2 \cdot 6_2 \cdot 8_2}$$
$$G = \frac{A^5}{4_2 \cdot 6_2 \cdot 8_2 \cdot 10_2} \text{ u. s. f.}$$

Die Ausdrücke für B, C, D, G .... zu reduciren, multipliciren wir

Zähler und Nenner derselben beziehlich mit 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 .... Dadurch entsteht

$$B = \frac{(2A)^2}{4!} \quad C = \frac{(2A)^3}{6!} \quad D = \frac{(2A)^4}{8!} \quad G = \frac{(2A)^5}{10!} \text{ u. s. f.}$$

Substituiren wir diese Werthe in 1), und setzen noch der Uebereinstimmung wegen $A = \frac{2A}{2!}$, so erhalten wir

$$8)\ \operatorname{Cos} x = 1 + \frac{2A}{2!}x^2 + \frac{(2A)^2}{4!}x^4 + \frac{(2A)^3}{6!}x^6 + \frac{(2A)^4}{8!}x^8 + \frac{(2A)^5}{10!}x^{10} + \ldots.$$

Die Bestimmung des Unbekannten A bleibe noch verschoben.

Wir wenden uns zu Sin x. Es sind die constanten unbekannten Coefficienten a', b', c', d', g' .... der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß

$$\operatorname{Sin} x = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + g'x^4 + \ldots.$$

sei, für jeden zulässigen Werth von x.

Der Coefficient a' ist Null, denn für den Fall, daß x Null ist, geht die Gleichung über in

$$\operatorname{Sin} 0 = a'$$

und es ist $\operatorname{Sin} 0 = 0$.

Die Coefficienten derjenigen Potenzen von x, welche gerade Exponenten haben, sind sämmtlich Null. Denn es ist $\operatorname{Sin}(-x) = -\operatorname{Sin} x$; die Reihe für Sin x muß daher von der Beschaffenheit sein, daß der Werth, welchen sie ausdrückt, das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, wenn $-x$ statt x gesetzt wird; und dieser Bedingung leistet sie nur Genüge, wenn keine Potenzen von x mit geraden Exponenten in ihr vorkommen.

Die Reihe für Sin x enthält also kein von x unabhängiges Glied, und keine Glieder mit Potenzen von x, deren Exponenten gerade Zahlen sind. Daher setzen wir

$$9)\ \operatorname{Sin} x = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + gx^9 + \ldots.$$

Gleichungen für die unbekannten Coefficienten a, b, c, d, g .... erhalten wir vermittelst der Formel

$$\operatorname{Cos}(y - z) - \operatorname{Cos}(y + z) = 2 \operatorname{Sin} y \operatorname{Sin} z.$$

Wir setzen nämlich in 8) statt x die Ausdrücke y — z und y + z, das liefert

$$10)\ \mathrm{Cos}(y-z) = 1 + \frac{2A}{2!}\left\{\begin{matrix} y^2 \\ -\ 2yz \\ +\ z^2 \end{matrix}\right\} + \frac{(2A)^2}{4!}\left\{\begin{matrix} y^4 \\ -\ 4y^3z \\ +\ 4_2y^2z^2 \\ -\ 4_3yz^3 \\ +\ z^4 \end{matrix}\right\}$$

$$+ \frac{(2A)^3}{6!}\left\{\begin{matrix} y^6 \\ -\ 6y^5z \\ +\ 6_2y^4z^2 \\ -\ 6_3y^3z^3 \\ +\ 6_4y^2z^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} + \frac{(2A)^4}{8!}\left\{\begin{matrix} y^8 \\ -\ 8y^7z \\ +\ 8_2y^6z^2 \\ -\ 8_3y^5z^3 \\ +\ 8_4y^4z^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} + \ldots.$$

$$11)\ \mathrm{Cos}(y+z) = 1 + \frac{2A}{2!}\left\{\begin{matrix} y^2 \\ +\ 2yz \\ +\ z^2 \end{matrix}\right\} + \frac{(2A)^2}{4!}\left\{\begin{matrix} y^4 \\ +\ 4y^3z \\ +\ 4_2y^2z^2 \\ +\ 4_3yz^3 \\ +\ z^4 \end{matrix}\right\}$$

$$+ \frac{(2A)^3}{6!}\left\{\begin{matrix} y^6 \\ +\ 6y^5z \\ +\ 6_2y^4z^2 \\ +\ 6_3y^3z^3 \\ +\ 6_4y^2z^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} + \frac{(2A)^4}{8!}\left\{\begin{matrix} y^8 \\ +\ 8y^7z \\ +\ 8_2y^6z^2 \\ +\ 8_3y^5z^3 \\ +\ 8_4y^4z^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} + \ldots.$$

In 9) setzen wir y, dann z statt x, dadurch entsteht

$$12)\ \mathrm{Sin}\,y = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + gy^9 + \ldots.$$

$$13)\ \mathrm{Sin}\,z = az + bz^3 + cz^5 + dz^7 + gz^0 + \ldots.$$

Die Gleichung 11) subtrahiren wir von 10), ordnen nach den Potenzen von z und nehmen den Faktor 2, welcher sich rechts überall ergiebt, heraus; das liefert

$$14)\quad \mathrm{Cos}(y-z)-\mathrm{Cos}(y+z)=2\Big[\Big(-2\frac{2A}{2!}y-4\frac{(2A)^2}{4!}y^3$$
$$-6\frac{(2A)^3}{6!}y^5-8\frac{(2A)^4}{8!}y^7-\ldots\Big)z+\ldots\Big].$$

Die Gleichungen 12) und 13) multipliciren wir mit einander, ordnen ebenfalls nach den Potenzen von z, und multipliciren die sich ergebende Gleichung mit 2 (wegen der obern trigonometrischen Formel); dadurch entsteht

$$15)\quad 2\mathrm{Sin}\,y\,\mathrm{Sin}\,z=2[(a^2y+aby^3+acy^5+ady^7$$
$$+agy^9\ldots)z+\ldots].$$

Die in 14) und 15) links stehenden Ausdrücke sind gleich für alle Werthe, welche y und z annehmen können, daher auch die Reihen rechts; und es folgt

$$-2\frac{2A}{2!}y-4\frac{(2A)^2}{4!}y^3-6\frac{(2A)^3}{6!}y^5-8\frac{(2A)^4}{8!}y^7-\ldots$$
$$=a^2y+aby^3+acy^5+ady^7+\ldots$$

hieraus, weil die Gleichung für jeden Werth von y gilt, und, wenn wir bei den Coefficienten der links stehenden Reihe heben,

$$-2A=a^2$$
$$-\frac{(2A)^2}{3!}=ab$$
$$-\frac{(2A)^3}{5!}=ac$$
$$-\frac{(2A)^4}{7!}=ad$$
$$\vdots\qquad\vdots$$

Vermittelst dieser Gleichungen, welche zur Bestimmung der Unbekannten nicht ausreichen, weil ihre Anzahl um 1 geringer ist, als die Anzahl der Unbekannten, lassen sich durch einen Unbekannten alle übrigen ausdrücken; wir wählen dazu a und erhalten

$$2A = - a^2$$
$$b = - \frac{a^3}{3!}$$
$$c = \frac{a^5}{5!}$$
$$d = - \frac{a^7}{7!}$$
$$g = \frac{a^9}{9!} \text{ u. s. f.}$$

Den Werth von 2A setzen wir in 8), die Werthe von b, c, d, g .... in 9), und es entsteht:

$$16) \quad \operatorname{Cos} x = 1 - \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^4}{4!}x^4 - \frac{a^6}{6!}x^6 + \frac{a^8}{8!}x^8 - \ldots.$$

$$17) \quad \operatorname{Sin} x = ax - \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^5}{5!}x^5 - \frac{a^7}{7!}x^7 + \frac{a^9}{9!}x^9 - \ldots.$$

Der Unbekannte a, dessen Bestimmung noch erfolgen soll, ist abhängig von der Art, die Winkel zu messen. Es ist z. B. der Sinus von $\frac{1}{3}$R gleich $\frac{1}{2}$; wird nun der Winkel durch Grade gemessen, so ist sein Maaß 30, und es muß sein

$$\frac{1}{2} = a \cdot 30 - \frac{a^3}{3!}30^3 + \frac{a^5}{5!}30^5 + \ldots.$$

wird der Winkel durch den Bogen eines Kreises gemessen, dessen Halbmesser 1 ist, so ist sein Maaß $\frac{1}{6}\pi$, und es muß ebenfalls sein

$$\frac{1}{2} = a \cdot \tfrac{1}{6}\pi - \frac{a^3}{3!}(\tfrac{1}{6}\pi)^3 + \frac{a^5}{5!}(\tfrac{1}{6}\pi)^5 + \ldots.$$

daß aber die Reihe des Sinus für $x = 30$ denselben Werth gebe, als für $x = \frac{1}{6}\pi$, kann nur durch a bewirkt werden; daher wird für jede besondere Art die Winkel zu messen, ein besonderer Werth des a Statt finden und zu ermitteln sein.

Werden die Winkel durch die Bogen eines Kreises gemessen, dessen Halbmesser 1 ist, so ist $a = 1$.

Es ist nämlich der Sinus kleiner als der Bogen, daher

$$ax - \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^5}{5!}x^5 - \ldots. < x.$$

oder, durch den Bogen x dividirt,

$$a - \frac{a^3}{3!}x^2 + \frac{a^5}{5!}x^4 - \ldots . < 1.$$

Stellen wir uns unter x so kleine Werthe vor, daß $-\frac{a^3}{3!}x^2$ in absoluter Hinsicht größer ist, als die absolute Summe aller folgenden Glieder, so ist die Summe des Gliedes $-\frac{a^3}{3!}x^2$ und aller ihm folgenden Glieder etwas Negatives; dies sei $-y$, und wir haben

$$a - y < 1.$$

Es ist ferner die Tangente größer als der Bogen, also

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} > x$$

oder

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{\sqrt{1 - \operatorname{Sin} x^2}} > x$$

$$\operatorname{Sin} x > x\sqrt{1 - \operatorname{Sin} x^2}$$

$$\operatorname{Sin} x^2 > x^2 - x^2 \operatorname{Sin} x^2$$

$$(1 + x^2)\operatorname{Sin} x^2 > x^2$$

$$\operatorname{Sin} x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

folglich ist

$$ax - \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^5}{5!}x^5 - \ldots . > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

oder, durch x dividirt,

$$a - \frac{a^3}{3!}x^2 + \frac{a^5}{5!}x^4 - \ldots . > \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Denken wir unter x so kleine Werthe, daß das zweite Glied der links stehenden Reihe in absoluter Hinsicht größer ist, als die absolute Summe aller ihm folgenden Glieder, so macht die Summe des zweiten Gliedes und aller Glieder, welche ihm folgen, etwas Negatives aus, und die Summe aller Glieder der Reihe ist kleiner als a. Da nun

$$a - \frac{a^3}{3!}x^2 + \frac{a^5}{5!}x^4 - \ldots . > \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

so ist um so mehr, für so kleine Werthe von x

$$a > \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Der Bruch $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ ist kleiner als 1; er darf daher gleich gesetzt werden 1 — z, und wir haben

$$a > 1 - z$$

oder

$$a + z > 1.$$

Oben hatte sich ergeben

$$a - y < 1.$$

Wird also a um irgend Etwas vermehrt, so ist das Entstehende größer als 1, und wird a um irgend Etwas vermindert, so ist das Entstehende kleiner als 1. Daraus erhellet, daß $a = 1$ ist.

Unter der Voraussetzung also, daß x Bogenmaaß vorstellt, d. h. daß die Winkel gemessen werden durch Bogen eines Kreises, der 1 zum Halbmesser hat, ist $a = 1$, und nach 17) und 16)

$$18)\ \operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots.$$

$$19)\ \operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots.$$

Hier gelten Bemerkungen ähnlich denen zu Ende des vorigen Paragraphen.

§. 185.

Auch der binomische Satz läßt sich vermittelst der unbestimmten Coefficienten erweitern.

Wir setzen zu dem Ende

$$(1 + x)^y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

und suchen die von x unabhängigen unbekannten Coefficienten A, B, C .... zu ermitteln.

Es ist $A = 1$, denn für $x = 0$ geht die obere Gleichung über in $1 = A$. Daher dürfen wir setzen

$$1)\ (1 + x)^y = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

Um Gleichungen für die Unbekannten zu erlangen, setzen wir $x + z$ statt x, und es entsteht

$$(1 + x + z)^y = 1 + B(x + z) + C(x + z)^2 + D(x + z)^3 + \ldots.$$

oder, wenn wir rechts die Klammern auflösen (nach §. 76) und nach den Potenzen von z ordnen,

2) $(1 + x + z)^y = (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.)z^0$
$+ (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots.)z + \ldots.$

Ferner setzen wir in 1) $\frac{x}{1+z}$ statt x. Das liefert

$$\left(1 + \frac{x}{1+z}\right)^y = 1 + B\frac{x}{1+z} + C\frac{x^2}{(1+z)^2} + D\frac{x^3}{(1+z)^3} + \ldots.$$

oder, wenn wir mit $(1 + z)^y$ multipliciren

3) $(1 + z + x)^y = (1 + z)^y + Bx(1 + z)^{y-1} + Cx^2(1 + z)^{y-2}$
$+ Dx^3(1 + z)^{y-3} + \ldots.$

Die Coefficienten B, C, D .... sind Funktionen von y; denn wenn in 1) sich y ändert, muß die rechts stehende Reihe andere Werthe annehmen, und da die Aenderung des y keinen Einfluß auf x übt, so müssen die Coefficienten Aenderungen erleiden, also Funktionen von y sein. Die Werthe, welche die Funktionen B, C, D .... erhalten, wenn man in ihnen $y - 1$ statt y setzt, seien bezeichnet durch B', C', D', ... die, in welche sie übergehen, wenn $y - 2$ statt y gesetzt wird, durch B'', C'', D'' ...., u. s. f. Dann hat man nach 1)

$$(1 + z)^y = 1 + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots.$$
$$(1 + z)^{y-1} = 1 + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \ldots.$$
$$(1 + z)^{y-2} = 1 + B''z + C''z^2 + D''z^3 + \ldots.$$

Diese Werthe setzen wir in 3) und ordnen nach den Potenzen von z. Es entsteht

4) $(1 + x + z)^y = (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.)z^0$
$+ (B + B'Bx + B''Cx^2 + B'''Dx^3 + \ldots.)z + \ldots.$

Die Reihen unter 2) und 4) stimmen überein für alle Werthe von z und von x; daher ist, weil die Reihen für alle Werthe von z übereinstimmen:

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots.$$
$$= B + B'Bx + B''Cx^2 + B'''Dx^3 + \ldots.$$

und, weil auch x jeden Werth vorstellt,

$$B = B$$
$$2C = B'B$$
$$3D = B''C$$
$$4E = B'''D$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot$$

und hieraus folgt

$$B = B$$
$$C = \frac{B \cdot B'}{2!}$$
$$D = \frac{B \cdot B' \cdot B''}{3!}$$
$$E = \frac{B \cdot B' \cdot B'' \cdot B'''}{4!} \text{ u. s. f.}$$

Es bleibt noch die Bestimmung der Funktion B übrig. Wir setzen $B = f_y$. Dann ist

$$\alpha)\ (1 + x)^y \quad = 1 + f_y \cdot x \ + \ldots.$$
$$\beta)\ (1 + x)^z \quad = 1 + f_z \cdot x \ + \ldots.$$
$$\gamma)\ (1 + x)^{y+z} = 1 + f_{y+z} x + \ldots.$$

Die Multiplication der Gleichungen α) und β) mit einander liefert

$$\delta)\ (1 + x)^{y+z} = 1 + (f_y + f_z)x + \ldots.$$

Aus γ) und δ) folgt

$$\varepsilon)\ f_{y+z} = f_y + f_z.$$

Wir setzen hier $z = y$ und es entsteht

$$f_{2y} = 2f_y.$$

Wir setzen weiter $z = 2y$; das liefert

$$f_{3y} = f_y + f_{2y} = 3f_y$$

u. s. w., so daß für n, als positive ganze Zahl, folgt

$$f_{ny} = nf_y,$$

oder mit ny dividirt

$$\frac{f_{ny}}{ny} = \frac{f_y}{y}.$$

Der Quotient $\frac{f_y}{y}$ ist nach der letzten Gleichung von der Beschaffenheit, daß er unverändert bleibt, wenn man ny statt y setzt; er ist deshalb von y unabhängig, d. h. constant. Bezeichnet also a einen constanten noch unbekannten Ausdruck, so ist

$$\frac{f_y}{y} = a$$

oder $$f_y = ay, \text{ d. h. } B = ay.$$

Da a unabhängig ist von y, so ist es gleichgiltig, bei welchem besonderen Werth von y wir a bestimmen. Für $y = 1$ folgt aus α)

$$(1 + x)^1 = 1 + f_1 x = 1 + ax$$

und da dies $1 + x$ sein muß, so ist $a = 1$, und $B = y$.

Ist $B = y$, so ist $B' = y - 1$, $B'' = y - 2$ u. s. f.; also sind die Coefficienten C, D, E, ... beziehlich die Binomial-Coefficienten $y_2, y_3, y_4, \ldots$, und setzen wir diese in 1), so entsteht

$$5)\ (1 + x)^y = 1 + yx + y_2 x^2 + y_3 x^3 + \ldots$$

Dies ist der binomische Satz für $(1 + x)^y$, während y nicht beschränkt erscheint. Damit ist indeß wenig gewonnen, weil Erwägungen wie die in §. 183 erheischen, die Bedeutung der Reihe näher festzustellen, wenn y nicht eine positive ganze Zahl ist.

Uebungen und Praktisches.

§. 186.

1) Welche Reihe drückt e aus, und welches ist der Zahlenwerth von e? Was ist e^x? Welche Logarithmen nennt man natürliche Logarithmen? Welches ist die Reihe für a^x, für $\ln(1 + x)$, für $\ln x$? Wie verwandelt man natürliche Logarithmen in solche, deren Basis a ist, oder umgekehrt? Was versteht man unter den Potenzen e^x, a^x im erweiterten Sinn, und welche Gesetze gelten für solche Potenzen? Was

ist $(1+m)^{\frac{1}{m}}$, was $(1+m)^{\frac{x}{m}}$, oder $(1+mx)^{\frac{1}{m}}$, wenn $m=0$ ist? Wie lauten die Reihen für $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$, wenn x Bogenmaaß, wie, wenn x Gradmaaß vorstellt? Wie drücken sich $\operatorname{Sin} x$ und $\operatorname{Cos} x$ sonst noch aus? Was verstehen wir unter $\operatorname{Sin} x$ und $\operatorname{Cos} x$ im weiteren und eigentlichen Sinn? Welche Reihen sind für $\operatorname{Cos} nx$, $\operatorname{Sin} nx$, $\operatorname{Cos} x^n$, $\operatorname{Sin} x^n$ entwickelt worden, und für welche Werthe von n? Was ist $\arcsin z$, $\arccos z$ u. s. w., und sind dies eindeutige oder mehrdeutige Zeichen? Wodurch drücken sich e^{xi}, e^{-xi} aus? Was ist $(\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x)^n$? Welche Werthe haben $\ln(+1)$, $\ln(-1)$, $\ln(+i)$, $\ln(-i)$?

2) Es ist $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{b}{a}} = \sqrt{a}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; und wenn man auf $\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ den binomischen Satz anwendet, ergiebt sich $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^3\right.$ $\left.-\frac{5}{128}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\frac{7}{256}\left(\frac{b}{a}\right)^5-\frac{21}{1024}\left(\frac{b}{a}\right)^6+\ldots\right]$.

3) $$\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{b}{a}\right)^3-\frac{10}{243}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\ldots\right].$$

4) $$\sqrt[4]{a+b} = \sqrt[4]{a}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{3}{32}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{7}{128}\left(\frac{b}{a}\right)^3-\frac{77}{2048}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\ldots\right].$$

In den vorstehenden Beispielen muß die Bedingung der Convergenz sich erfüllen.

5) Welches sind die Werthe von ln 2, ln 3, ln 5?

0,69314718 .... 1,09861228 .... 1,60943791 ....

Nach §. 149 2) oder 3)

$$\ln 2 = 2[\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5+\tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{3})^7+\ldots]$$

dann nach §. 149 3)

$$\ln 3 = \ln 2 + 2[\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{5})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5})^5 + \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{5})^7 + \ldots .]$$
$$\ln 5 = 2\ln 2 + 2[\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{9})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{9})^5 + \ldots .].$$

6) Aus $\ln 2$ und $\ln 5$ findet sich $\ln 10 = 2{,}30258509\ldots.$ Dann findet sich weiter $\frac{1}{\ln 10} = 0{,}43429448\ldots.$ Mit größerer Genauigkeit ist

$$\alpha)\ \ln 10 = 2{,}302585092994045\ldots.$$

$$\beta)\ \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434294481903251\ldots.$$

Die letzte Zahl ist der Modul des Briggschen Logarithmensystems. Mit ihr müssen die natürlichen Logarithmen multiplicirt werden, um sie in solche für die Basis 10 zu verwandeln. Und will man umgekehrt Logarithmen für die Grundzahl 10 in natürliche umformen, so muß man jene multipliciren mit der Zahl unter α).

7) Die Vegaschen Logarithmentafeln enthalten unmittelbar die Briggschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100999. Die Logarithmen der übrigen sechszifferigen Zahlen werden vermittelst der Proportionaltheile aus ihnen entnommen, auch die der siebenzifferigen u. s. w. annähernd. Die Formel 2) in §. 151 liefert die Proportionaltheile und begründet deren Anwendung.

Die Logarithmen der sechszifferigen Zahlen lassen sich nämlich vermittelst jener Formel aus den Logarithmen der fünfzifferigen Zahlen berechnen. Denn es stelle x eine fünfzifferige Zahl vor, z jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; alsdann bezeichnet $10x + z$ jede von den sechszifferigen Zahlen, welche erhalten werden, wenn man der Zahl x zur Rechten eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 anhängt, und es ist, zunächst $\mathrm{Log}\,10x$ und $\mathrm{Log}\,10(x+1)$, oder $\mathrm{Log}(10x+10)$, zu Hilfe nehmend,

$$\frac{\mathrm{Log}(10x+z) - \mathrm{Log}\,10x}{\mathrm{Log}(10x+10) - \mathrm{Log}\,10x} = \frac{z}{10}$$

oder $$\frac{\text{Log}(10x + z) - \text{Log}\,10x}{\text{Log}\,10(x + 1) - \text{Log}\,10x} = \frac{z}{10}$$

oder $$\frac{\text{Log}(10x + z) - \text{Log}\,10x}{\text{Log}(x + 1) - \text{Log}\,x} = \frac{z}{10}.$$

Hieraus folgt

$$\text{Log}(10x + z) = \text{Log}\,10x + \frac{\text{Log}(x + 1) - \text{Log}\,x}{10}z$$

oder

$$\text{Log}(10x + z) = 1 + \text{Log}\,x + \frac{\text{Log}(x + 1) - \text{Log}\,x}{10}z$$

und man hat den Logarithmus der sechsziffrigen Zahl $10x + z$ ausgedrückt durch die Logarithmen der fünfziffrigen Zahlen x und $x + 1$.

Es sei z. B. $x = 25788$, dann ist

$$\text{Log}(257880 + z) = 1 + \text{Log}\,25788 + \frac{\text{Log}\,25789 - \text{Log}\,25788}{10}z$$

oder

$$\text{Log}(257880 + z) = 1 + 4{,}4114177 + \frac{4{,}4114345 - 4{,}4114177}{10}z$$

oder

$$\text{Log}(257880 + z) = 1 + 4{,}4114177 + \frac{0{,}0000168}{10}z$$

$$\text{Log}(257880 + z) = 5{,}4114177 \quad + 0{,}00000168\,z.$$

Setzt man jetzt statt z die Ziffern 1, 2, 3, ... 9, so entsteht, 7 Decimalstellen beibehaltend,

$$\begin{aligned}
\text{Log}\,257881 &= 5{,}4114177 + 0{,}0000016\\
\text{Log}\,257882 &= 5{,}4114177 + 0{,}0000033\\
\text{Log}\,257883 &= 5{,}4114177 + 0{,}0000050\\
\text{Log}\,257884 &= 5{,}4114177 + 0{,}0000067\\
\text{Log}\,257885 &= 5{,}4114177 + 0{,}0000084\\
\text{Log}\,257886 &= 5{,}4114177 + 0{,}0000100\\
\text{Log}\,257887 &= 5{,}4114177 + 0{,}0000117\\
\text{Log}\,257888 &= 5{,}4114177 + 0{,}0020134\\
\text{Log}\,257889 &= 5{,}4114177 + 0{,}0000151.
\end{aligned}$$

In den Vegaschen Tafeln sind, mit Hinweglassung der Nullen, die Differenz 168 und die Proportionaltheile, in der

letzten Ziffer um 1 erhöht, wenn die nächst folgende größer als 5 ist, also 17, 34, 50, 67, 84, 101, 118, 134, 151 abgedruckt. Das Uebrige wird keiner Erläuterung bedürfen.

Zur Bestimmung der Logarithmen von siebenziffrigen Zahlen ergiebt sich, unter x fünfziffrige, unter z zweiziffrige Zahlen verstanden, die Gleichung

$$\mathrm{Log}(100x+z)=2+\mathrm{Log}\,x+\frac{\mathrm{Log}(x+1)-\mathrm{Log}\,x}{100}z.$$

Für die zweiziffrige Zahl z setze man ihre allgemeine Form $10r'+r$, und es entsteht

$$\mathrm{Log}(100x+z)=2+\mathrm{Log}\,x+\frac{\mathrm{Log}(x+1)-\mathrm{Log}\,x}{10}r'$$
$$+\frac{\mathrm{Log}(x+1)-\mathrm{Log}\,x}{100}r$$

und hieraus ergiebt sich ohne Weiteres das bekannte Verfahren zur Bestimmung der Logarithmen von siebenziffrigen Zahlen. U. s. f.

8) Welchen Zahlenwerth hat $\mathrm{Sin}\,\frac{9}{100}\pi$, welchen $\mathrm{Sin}\,57^{0}\;17'\;44{,}85''$?

0,27899 .... 0,84147 ....

Man wird $57^{0}\;17'\;44{,}85''$ erst in Bogenmaaß verwandeln, und dann die Reihe für Sin x anwenden.

9) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cos}\,2x &= \mathrm{Cos}\,x^2-\mathrm{Sin}\,x^2\\
&= 2\mathrm{Cos}\,x^2-1\\
&= 1-2\mathrm{Sin}\,x^2\\
\mathrm{Cos}\,3x &= \mathrm{Cos}\,x^3-3\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x^2\\
&= 4\mathrm{Cos}\,x^3-3\mathrm{Cos}\,x\\
\mathrm{Cos}\,4x &= \mathrm{Cos}\,x^4-6\mathrm{Cos}\,x^2\,\mathrm{Sin}\,x^2+\mathrm{Sin}\,x^4\\
&= 8\mathrm{Cos}\,x^4-8\mathrm{Cos}\,x^2+1\\
&= 8\mathrm{Sin}\,x^4-8\mathrm{Sin}\,x^2+1\\
\mathrm{Cos}\,5x &= \mathrm{Cos}\,x^5-10\mathrm{Cos}\,x^3\,\mathrm{Sin}\,x^2+5\mathrm{Co{:}}\,x\,\mathrm{Sin}\,x^4\\
&= 16\mathrm{Cos}\,x^5-20\mathrm{Cos}\,x^3+5\mathrm{Cos}\,x
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sin}\,2x &= 2\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x \\
\mathrm{Sin}\,3x &= 3\mathrm{Cos}\,x^2\,\mathrm{Sin}\,x - \mathrm{Sin}\,x^3 \\
&= -4\mathrm{Sin}\,x^3 + 3\mathrm{Sin}\,x \\
&= \mathrm{Sin}\,x\,(4\mathrm{Cos}\,x^2 - 1) \\
\mathrm{Sin}\,4x &= 4\mathrm{Cos}\,x^3\,\mathrm{Sin}\,x - 4\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x^3 \\
&= \mathrm{Sin}\,x\,(8\mathrm{Cos}\,x^3 - 4\mathrm{Cos}\,x) \\
&= \mathrm{Cos}\,x\,(4\mathrm{Sin}\,x - 8\mathrm{Sin}\,x^3)
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\mathrm{tg}\,2x = \frac{2\mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{tg}\,x^2}$$

$$\mathrm{tg}\,3x = \frac{3\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,x^3}{1 - 3\mathrm{tg}\,x^2}$$

$$\mathrm{tg}\,4x = \frac{4\mathrm{tg}\,x - 4\mathrm{tg}\,x^3}{1 - 6\mathrm{tg}\,x^2 + \mathrm{tg}\,x^4}$$

u. s. w.

$$\mathrm{Cotg}\,2x = \frac{\mathrm{Cotg}\,x^2 - 1}{2\mathrm{Cotg}\,x}$$

$$\mathrm{Cotg}\,3x = \frac{\mathrm{Cotg}\,x^3 - 3\mathrm{Cotg}\,x}{3\mathrm{Cotg}\,x^2 - 1}$$

$$\mathrm{Cotg}\,4x = \frac{\mathrm{Cotg}\,x^4 - 6\mathrm{Cotg}\,x^2 + 1}{4\mathrm{Cotg}\,x^3 - 4\mathrm{Cotg}\,x}$$

u. s. f.

Siehe §. 179.

10) Es ist

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Cos}\,x^2 &= \mathrm{Cos}\,2x + 1 \\
4\mathrm{Cos}\,x^3 &= \mathrm{Cos}\,3x + 3\mathrm{Cos}\,x \\
8\mathrm{Cos}\,x^4 &= \mathrm{Cos}\,4x + 4\mathrm{Cos}\,2x + 3 \\
16\mathrm{Cos}\,x^5 &= \mathrm{Cos}\,5x + 5\mathrm{Cos}\,3x + 10\mathrm{Cos}\,x \\
32\mathrm{Cos}\,x^6 &= \mathrm{Cos}\,6x + 6\mathrm{Cos}\,4x + 15\mathrm{Cos}\,2x + 10 \\
&\;\;\vdots \\
2\mathrm{Sin}\,x^2 &= -\mathrm{Cos}\,2x + 1 \\
4\mathrm{Sin}\,x^3 &= -\mathrm{Sin}\,3x + 3\mathrm{Sin}\,x
\end{aligned}$$

$$8\sin x^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$$
$$16\sin x^5 = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x$$
$$32\sin x^6 = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10.$$

11) $\operatorname{arc\,tg}(1+\sqrt{x}) + \operatorname{arc\,tg}(1-\sqrt{x}) = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{x}.$

12) $\arcsin \sin x + \arcsin \cos x = \arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi.$

13) $\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}.$

14) $\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{-x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$

15) $\frac{1}{2}\sqrt{-1}\ln\frac{2x+1-\sqrt{-3}}{2x+1+\sqrt{-3}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2x+1}.$

16) $-\sqrt{-1}\arcsin x\sqrt{-b} = \ln(\sqrt{1+bx^2} + x\sqrt{b}).$

17) $-\sqrt{-a}\ln\sqrt{-b} = \sqrt{a}\arcsin\frac{1+b}{2\sqrt{b}}.$

18) Welches sind die Werthe des Ausdrucks $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$?

$\ldots,\quad e^{-\frac{9}{2}\pi},\quad e^{-\frac{5}{2}\pi},\quad e^{-\frac{1}{2}\pi},\quad e^{\frac{3}{2}\pi},\quad e^{\frac{7}{2}\pi},\quad e^{\frac{11}{2}\pi}\ldots$

Es ist nämlich

$\ln\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,(2m+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1} = -(2m+\frac{1}{2})\pi,$
während m Null und jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt.

19) Welche Werthe hat $(-\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$?

$\ldots,\quad e^{-\frac{11}{2}\pi},\quad e^{-\frac{7}{2}\pi},\quad e^{-\frac{3}{2}\pi},\quad e^{\frac{1}{2}\pi},\quad e^{\frac{5}{2}\pi},\quad e^{\frac{9}{2}\pi}\ldots$

20) Welches sind die Werthe von $1^{\sqrt{-1}}$?

$\ldots,\quad e^{-4\pi},\quad e^{-2\pi},\quad 1,\quad e^{2\pi},\quad e^{4\pi},\ldots$

21) Die Reihe §. 178 2) läßt sich zur Berechnung der Zahl π benutzen. Man setze z. B. $x = \frac{\pi}{4}$, so ist $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45^0 = 1$, und es entsteht

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Diese Reihe nimmt sehr langsam ab und ist deshalb zur Berechnung nicht wohlgeeignet.

Für $x = \frac{\pi}{6}$ entsteht, da $tg\frac{\pi}{6} = tg30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{7 \cdot 3^3\sqrt{3}} + \dots .$$

also

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots\right]$$

eine rasch genug fallende Reihe.

Man setze

$$y + z = \frac{\pi}{4}$$

so ist

$$tg(y + z) = 1$$

also

$$\frac{tg y + tg z}{1 - tg y tg z} = 1.$$

Man setze ferner

$$tg y = \tfrac{1}{2}$$

dann ist nach der letztern Gleichung

$$tg z = \tfrac{1}{3}.$$

Nach §. 178 2) folgt dann aber

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots .$$

$$z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots .$$

also

$$y + z = \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots\right).$$

In ähnlicher Weise lassen sich noch bequemere Reihen erzielen.

Stetige Zinseszinsen.

22) Ein Kapital a trage jährlich p Prozent Zinsen. Die Zinsen werden jeden Augenblick zum Kapital geschlagen und mit verzinst; was wird aus dem Kapital in t Jahren?

$a \cdot e^{\frac{pt}{100}}$.

Bei einfachen Zinsen hat man nach n Jahren

$$\frac{100+np}{100}a = \left(1+\frac{p}{100}n\right)a$$

nach $\frac{1}{x}$ Jahr also

$$\left(1+\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{x}\right)a$$

nach $\frac{2}{x}$ Jahr bei Zins von Zins

$$\left(1+\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{x}\right)^2 a$$

u. s. w. nach $\frac{q}{x}$ Jahren bei Zins von Zins

$$\left(1+\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{x}\right)^q a$$

nach t Jahren oder $\frac{tx}{x}$ Jahren folglich

$$\left(1+\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{x}\right)^{tx} a$$

und für $x=\infty$ ist dies der verlangte Werth.

Nach dem binomischen Satz ist

$$\left(1+\frac{q}{x}\right)^x = 1+x\cdot\frac{q}{x}+\frac{x\cdot x-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{q^2}{x^2}+\frac{x\cdot x-1\cdot x-2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{q^3}{x^3}+\ldots$$

$$= 1+q+\frac{1\cdot 1-\frac{1}{x}}{1\cdot 2}q^2+\frac{1\cdot 1-\frac{1}{x}\cdot 1-\frac{2}{x}}{1\cdot 2\cdot 3}q^3+\ldots$$

also für $x=\infty$

$$\lim\left(1+\frac{q}{x}\right)^x = e^q.$$

Hiernach ist für $x = \infty$

$$\left(1 + \frac{\frac{p}{100}}{x}\right)^x = e^{\frac{p}{100}}$$

also weiter für $x = \infty$

$$\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{x}\right)^{tx} a = ae^{\frac{pt}{100}}.$$

Wenn Zinsen jeden Augenblick zum Kapital gegeben und mit verzinst werden, wollen wir solche Zinseszinsen **stetige** Zinseszinsen nennen.

23) 100 Thlr. tragen 5 Prozent stetige Zinseszinsen, was wird daraus in einem Jahre, in 2, 5, 10, 14 Jahren?

105 Thlr. 3 Sgr. $9\frac{3}{4}$ Pf.;
110 Thlr. $15\frac{1}{2}$ Sgr.;
128,4 .... Thlr.;
164,87 .... Thlr.;
201,3 .... Thlr.

24) Wie viel Prozent stetiger Zinseszinsen trägt ein Kapital a, welches in t Jahren zu b anwächst?

$$\frac{100(\mathrm{Log}\,b - \mathrm{Log}\,a)}{t\,\mathrm{Log}\,e} \text{ oder } \frac{100(\mathrm{Log}\,b - \mathrm{Log}\,a)}{0{,}4342944819\ldots t}.$$

Unter Log verstehen wir jedesmal den Logarithmus zur Basis 10.

Es ist

$$\ln e = 1$$

also nach 6)

$$\mathrm{Log}\,e = 0{,}43429\ldots$$

25) Wie lange muß ein Kapital a stehen, damit es bei p Prozent stetiger Zinseszinsen zu b anwachse?

$$\frac{100(\mathrm{Log}\,b - \mathrm{Log}\,a)}{p\,\mathrm{Log}\,e} \text{ Jahre.}$$

26) Wie lange muß ein Kapital stehen, damit es bei p Prozent stetiger Zinseszinsen zu seinem m fachen anwachse?

$$\frac{100\,\mathrm{Log}\,m}{p\,\mathrm{Log}\,e} \text{ Jahre.}$$

27) Wie viele Prozente hat ein Kapital getragen, welches bei stetigem Zinseszins in t Jahren zu seinem m fachen angewachsen ist?

$$\frac{100 \operatorname{Log} m}{t \operatorname{Log} e}.$$

28) Wie lange muß ein Kapital stehen, damit es bei 1, 2, 3, 4, 5 Prozent stetiger Zinseszinsen sich verdoppele?

69,31 ....., 34,65 ....., 23,10 ....., 17,32 ....., 13,86 ..... Jahre.

Zweiter Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Erster Lehrgang.

Zehntes Kapitel.

Vom Differenziren.

I. Einleitendes.

§. 187.

Für das gegenwärtige Kapitel setzen wir voraus, der Urveränderliche x sei zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ veränderlich, so daß also x alle reellen Werthe annehmen kann und repräsentirt.

Um alle Werthe des Urveränderlichen x zu überblicken, stellen wir uns vor, x durchlaufe stetig alle seine Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$. Je zwei unmittelbar auf einander folgende Werthe von x sind um das constante Differential dx verschieden.

Die Ausdrücke x und $x + dx$ stellen jede zwei unmittelbar auf einander folgende Werthe von x vor. Ihre Differenz $(x + dx) - x$ ist stets dieselbe, nämlich dx. — Jede drei auf einander folgenden Werthe lassen sich durch $x - dx$, x, $x + dx$ darstellen (auch durch x, $x + dx$, $x + 2dx$ u. dergl.) und wir nennen die Werthe $x - dx$ und $x + dx$ die benachbarten Werthe von x.

Ist h ein beliebiger positiver oder negativer reeller Werth, so stellen die Ausdrücke x und $x + h$ jede zwei reellen Werthe vor, welche sich um jenen positiven oder negativen Werth h unterscheiden. Während in x und $x + h$ unendlich viele, nämlich alle reellen Werthe vorliegen, welche sich um h unterscheiden, pflegt man der Kürze wegen von den Ausdrücken x und $x + h$ als von zwei Werthen zu sprechen, von welchen der eine x in

den anderen $x + h$ durch Hinzufügung des h übergeht; und diese Art sich auszudrücken führt keine Mißverständnisse herbei, sobald man nicht unbeachtet läßt, daß x unveränderlich ist.

§. 188.

Es sei f_x eine beliebige Funktion von x. Dasjenige, worin f_x übergeht, wenn $x + h$ statt x gesetzt wird, bezeichnen wir durch f_{x+h}.

Die Funktionen f_x und f_{x+h} mögen beziehlich die ursprüngliche und die durch h geänderte Funktion heißen.

§. 189.

Wir setzen

$$f_{x+h} = f_x + h \cdot f^I$$

während f^I im Allgemeinen eine Funktion von x und von h vorstellt.

Die geänderte Funktion muß nämlich in die ursprüngliche zurückfallen, wenn Null gesetzt wird statt h, und dieser Bedingung leistet die Form $f_x + hf^I$ Genüge. Daß f^I im Allgemeinen eine Funktion von x und von h sein werde, ist augenfällig, und möge besondere Beachtung finden.

Es erscheint möglich, daß auch $f_{x+h} = f_x + h^n F$ sich ergebe, eine Form, die gleichfalls der Bedingung genügt, in f_x überzugehen, wenn $h = 0$. Auch in solchem Fall denken wir $h^n F$ in hf^I umgestaltet. Besonderheiten, welche auftauchen können, lassen sich erst später erörtern. Einstweilen setzen wir voraus hf^I werde einfach Null, wenn $h = 0$ ist.

§. 190.

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$f_{x+h} - f_x = h \cdot f^I.$$

Es ist also hf^I der Unterschied zwischen der geänderten und der ursprünglichen Funktion, d. h. es ist hf^I der Werth, um welchen die ursprüngliche Funktion f_x sich geändert hat dadurch, daß $x + h$ statt x gesetzt wurde.

§. 191.

Man betrachte die Differenzen

$$(x + h) - x = h$$

und

$$f_{x+h} - f_x = h \cdot f^{I}$$

während x alle seine Werthe durchläuft, h aber, als constant, sich nicht ändert.

Die erste Differenz bleibt ungeändert, nämlich gleich h. Die andere Differenz aber erleidet im Allgemeinen Aenderungen, sobald x sich ändert, weil f^{I} im Allgemeinen eine Funktion von h und von x vorstellt. Nur in dem besonderen und möglichen Fall, daß f^{I} kein x enthält, ist auch die zweite Differenz constant.

Wenn man also verschiedene Werthe x', x'', x''', ... von x wählt, so sind die Differenzen

$$f_{x'+h} - f_{x'}$$
$$f_{x''+h} - f_{x''}$$
$$f_{x'''+h} - f_{x'''}$$

im Allgemeinen ungleich; d. h. während x', x'', x''', ... um denselben Werth h geändert werden, stimmen die Aenderungen, welche die Funktionen $f_{x'}$, $f_{x''}$, $f_{x'''}$, ... dadurch erleiden, nicht überein. Sollte indeß f^{I} kein x enthalten, so stimmen diese Differenzen überein, und die Aenderungen der Funktionen sind gleich.

§. 192.

Die Funktion f^{I} geht, wenn in ihr Null gesetzt wird statt h in eine Funktion bloß von x über. Diese Funktion von x nennen wir die erste Ableitung von der Funktion f_x nach x, schlechthin die Ableitung von f nach x und wir bezeichnen sie durch

$$\partial f_x.$$

Die Funktion f^{I} ist im Allgemeinen eine Funktion von x und von h. Im Allgemeinen werden sich in ihr Glieder finden, welche kein h enthalten, und solche, welche h oder höhere Potenzen von h zu Faktoren haben. Die ersteren von h unabhängigen Glieder machen im Allgemeinen eine Funktion von x aus, während die anderen verschwinden mit $h = 0$. Darin liegt das oben Gesagte.

Enthalten in einem besonderen Fall sämmtliche Glieder von f^I den Faktor h, so verschwindet f^I vollständig, wenn $h = 0$ gesetzt wird, und es ist

$$\partial f_x = 0.$$

Findet sich in sämmtlichen Gliedern von f^I, welche kein h enthalten, zugleich kein x, so geht f^I in einen constanten Ausdruck über, wenn Null gesetzt wird statt h, und dieser constante Ausdruck ist alsdann die Ableitung von f nach x.

Der Fall, daß f^I die Form ∞ annimmt, wenn Null statt h gesetzt wird, bleibt vorläufig ausgeschlossen.

§. 193.

Die Funktion f^I geht in ∂f_x über, wenn in ihr das constante Differential dx gesetzt wird statt h, und wenn dabei die Funktion f^I nur als endlicher Werth in Betracht kommen soll oder darf.

Nach §. 90 und §. 192.

Eben so erhellet, daß f^I in ∂f_x übergeht, wenn statt h überhaupt ein unendlich kleiner Werth gesetzt wird.

§. 194.

Die Gleichung

$$f_{x+h} = f_x + hf^I$$

gewinnt vorzügliche Wichtigkeit, wenn in ihr dx gesetzt wird statt h, und während dabei f^I nur in Bezug auf seinen endlichen Werth in Betracht kommt.

Es entsteht alsdann nach dem vorigen Paragraph

$$f_{x+dx} = f_x + dx \cdot \partial f_x.$$

(Für die Anwendungen ist zu beachten, daß in den Ausdrücken f_x, f_{x+dx}, ∂f_x einerlei Werth von x zu denken ist, nämlich derjenige, welcher ursprünglich in f_x gedacht und dann um dx geändert wurde.)

§. 195.

Aus $$f_{x+dx} = f_x + \partial f_x \cdot dx$$

folgt $$f_{x+dx} - f_x = \partial f_x \cdot dx.$$

Die Differenz $f_{x+dx} - f_x$ ist das Wachsthum, welches die Funktion f_x dadurch erfährt, daß der Werth x in ihr um dx zunimmt.

Der Ausdruck $\partial f_x \cdot dx$ ist ein Differential erster Ordnung. Dies Differential erhält, weil ∂f_x eine Funktion von x ist, mit jedem besonderen Werth von x einen besonderen Werth. Nur wenn ∂f_x kein x enthält ist $\partial f_x \cdot dx$ constant.

§. 196.

Das Wachsthum, welches eine Funktion f_x dadurch erfährt, daß x übergeht in $x + dx$, ist nach dem Bisherigen unendlich klein. Wir nennen es, an und für sich betrachtet, und so weit es sich durch ein Differential erster Ordnung ausdrückt, das erste Differential, schlechthin das Differential der Funktion f_x und bezeichnen es durch df_x.

§. 197.

Nach den beiden vorstehenden Paragraphen ist

$$df_x = \partial f_x \cdot dx$$

woraus folgt

$$\frac{df_x}{dx} = \partial f_x.$$

Der Quotient zur Linken heißt der Differential-Quotient. Sein Werth ist ∂f_x.

§. 198.

Wir haben bisher eine beliebige Aenderung, welche der Urveränderliche x erleidet, durch h bezeichnet. In manchen Fällen ist es angemessener die beliebige Aenderung des Urveränderlichen x durch Δx zu bezeichnen. Die Aenderung, welche eine Funktion f_x dadurch erleidet, daß x in $x + \Delta x$ übergeht, bezeichnet man durch Δf_x.

§. 199.

Es ist, wenn Δx sich dem Werth Null nähert und diesen Werth erreicht

$$\lim \frac{\Delta f_x}{\Delta x} = \partial f_x.$$

Denn es ist

$$f_{x+\Delta x} - f_x = \Delta f_x = \Delta x \cdot f^I$$

d. h.

$$\Delta f_x = \Delta x \cdot f^I$$

also

$$\frac{\Delta f_x}{\Delta_x} = f^I.$$

In f^I steht Δx statt h; wenn also Δx bis auf Null abnimmt, so entsteht nach §. 192

$$\lim \frac{\Delta f_x}{\Delta x} = \partial f_x.$$

§. 200.

Nach dem Bisherigen bieten sich folgende, mehr der Ansicht als der Sache nach, verschiedene Wege dar, die erste Ableitung ∂f_x einer Funktion f_x zu erhalten.

I.

Man bilde

1) die geänderte Funktion f_{x+h}
2) die Differenz $f_{x+h} - f_x$
3) den Quotienten $\frac{f_{x+h} - f_x}{h}$, indem man wirklich durch h

dividirt, und setze

4) nach vollzogener Division Null statt h.

Die Funktion von x, welche dann hervorgegangen, bildet die erste Ableitung ∂f_x von f_x.

Es ist nämlich

$$f_{x+h} - f_x = h \cdot f^I$$

also

$$\frac{f_{x+h} - f_x}{h} = f^I$$

und f^I geht in ∂f_x über, wenn man Null setzt statt h.

Es sei z. B. $f_x = ax^3$.

Dann ist

$$f_{x+h} = ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$$

$$f_{x+h} - f_x = 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$$

$$\frac{f_{x+h} - f_x}{h} = 3ax^2 + 3axh + ah^2$$

also für $h = 0$

$$\partial f_x = 3ax^2.$$

II.

Man entwickele den Quotienten

$$\frac{f_{x+dx} - f_x}{dx}$$

so weit er endlich ist.

Ist z. B. $f_x = ax^3$, so entsteht wie oben

$$\frac{f_{x+dx} - f_x}{dx} = 3ax^2 + 3ax \cdot dx + adx^2$$

mithin, wenn man rechts nur den endlichen Werth behält, die Differentiale verschwinden läßt

$$\partial f_x = 3ax^2.$$

III.

Man bilde

$$\lim \frac{\Delta f_x}{\Delta x}$$

während Δx abnimmt bis auf Null.

IV.

Man bilde den Quotienten

$$\frac{df_x}{dx}$$

welches, namentlich in den Fällen der Anwendung, öfters leicht durch Nebenbetrachtungen geschehen kann.

Welchen der Wege man einschlage, ist der Sache nach gleichgiltig. In den Anwendungen bietet bald der eine, bald der andere mehr Bequemlichkeit oder Klarheit.

§. 201.

Die Funktionen f_x und ∂f_x, und mehr noch die Funktion f_x und ihr Differential df_x stehen, wie die Folge lehren wird, in vielen höchst fruchtbaren Beziehungen zu einander, für welche namentlich die Geometrie und die Mechanik reiche Gebiete ungemein vielseitiger Anwendbarkeit eröffnen. Die Benützung der Funktionen f_x und ∂f_x, oder der Funktion f_x und ihres Differentials df_x, hängt davon ab, wenn eine der Funktionen f_x und ∂f_x

gegeben ist, die andere zu ermitteln. Der vorige Paragraph enthält Vorschriften für das Bilden der Funktion ∂f_x aus der gegebenen Funktion f_x; aber durch Gesetze, deren Entwickelung uns zunächst beschäftigen wird, läßt sich das Bilden der Funktion ∂f_x aus der Funktion f_x wesentlich erleichtern; zugleich werden diese Gesetze die erste Grundlage abgeben für die umgekehrte Operation, die Funktion f_x zu bestimmen, wenn die Funktion ∂f_x gegeben ist.

Der Gegenstand der Differential-Rechnung besteht in dem Bilden der Funktion ∂f_x aus der Funktion f_x, oder in dem Bilden des Differentials $df_x = \partial f_x \cdot dx$. Eine Funktion f_x wird differenzirt, wenn man ihre Ableitung ∂f_x bildet, oder ihr Differential $df_x = \partial f_x \cdot dx$.

II. Einfache allgemeine Gesetze.

§. 202.

Die Ableitung jedes constanten Ausdruckes a ist gleich Null.

Betrachtet man a als f_x, so wird diese Funktion, als kein x enthaltend, nicht geändert, wenn x in $x + h$ übergeht. Es ist also

$$f_x = a, \text{ und } f_{x+h} = a$$
$$f_{x+h} - f_x = hf^{\mathrm{I}} = 0$$

deshalb $f^{\mathrm{I}} = 0$ und dann offenbar $\partial f_x = 0$, d. h. $\partial a = 0$.

§. 203.

Es ist $\partial(f_x \pm \phi_x) = \partial f_x \pm \partial \phi_x$.

Denn es ist

$$f_{x+h} \pm \phi_{x+h} = f_x + hf^{\mathrm{I}} \pm (\phi_x + h\phi^{\mathrm{I}})$$
$$(f_{x+h} \pm \phi_{x+h}) - (f_x \pm \phi_x) = hf^{\mathrm{I}} \pm h\phi^{\mathrm{I}}$$

und wenn man diese Gleichung durch h dividirt, und darauf $h = 0$ setzt, entsteht

$$\partial(f_x \pm \phi_x) = \partial f_x \pm \partial \phi_x.$$

§. 204.

Es ist $\partial(f_x \phi_x) = f_x \cdot \partial\phi_x + \phi_x \cdot \partial f_x$.

Denn es ist

$$f_{x+h}\phi_{x+h} = (f_x + hf^I)(\phi_x + h\phi^I)$$
$$= f_x\phi_x + hf_x\phi^I + h\phi_x f^I + h^2 f^I \phi^I$$
$$f_{x+h}\phi_{x+h} - f_x\phi_x = hf_x\phi^I + h\phi_x f^I + h^2 f^I \phi^I$$

und durch h dividirt, und darauf $h = 0$ gesetzt

$$\partial f_x \phi_x = f_x \partial\phi_x + \phi_x \partial f_x.$$

§. 205.

Es ist $\partial(a \cdot f_x) = a \cdot \partial f_x$.

Denn es ist $\partial(a \cdot f_x) = a\partial f_x + f_x \partial a$, und ∂a ist Null.

§. 206.

Es ist $\partial \frac{f_x}{\phi_x} = \frac{\phi_x \partial f_x - f_x \partial \phi_x}{\phi_x{}^2}$.

Man hat $\frac{f_{x+h}}{\phi_{x+h}} = \frac{f_x + hf^I}{\phi_x + h\phi^I}$

also $\frac{f_{x+h}}{\phi_{x+h}} - \frac{f_x}{\phi_x} = \frac{h\phi_x f^I - hf_x\phi^I}{(\phi_x + h\phi^I)\phi_x}$

daher, wenn man durch h dividirt und dann Null setzt statt h

$$\partial \frac{f_x}{\phi_x} = \frac{\phi_x \partial f_x - f_x \partial \phi_x}{\phi_x{}^2}.$$

§. 207.

Zusatz.

Es ist 1) $\partial \frac{a}{f_x} = - \frac{a\partial f_x}{f_x{}^2}$

2) $\partial \frac{f_x}{a} = \frac{\partial f_x}{a}$.

Beides folgt aus dem vorigen Paragraphen und aus §. 202.

III. Ableitungen der Grundfunktionen.

§. 208.

Es ist $$1)\ \partial x^n = nx^{n-1}$$
$$2)\ \partial x = 1.$$

Es ist

$$\frac{(x + dx)^n - x^n}{dx} = \frac{\left(1 + \frac{dx}{x}\right)^n - 1}{\frac{dx}{x^n}}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{dx}{x}\right)^n - 1}{\frac{dx}{x}} x^{n-1}.$$

$\frac{dx}{x}$ befindet sich zwischen -1 und $+1$, wir dürfen also den binomischen Satz anwenden, und es entsteht, giltig für jeden reellen Werth von n

$$\frac{(x + dx)^n - x^n}{dx} = \frac{1 + n\frac{dx}{x} + n_2\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \dots - 1}{\frac{dx}{x}} x^{n-1}$$

$$= \left(n + n_2\frac{dx}{x} + \dots\right) x^{n-1}$$

oder, wenn wir die unendlich kleinen Werthe verschwinden lassen

$$\frac{(x + dx)^n - x^n}{dx} = nx^{n-1}$$

2) folgt aus 1).

Beispiele.

1) $\partial x^3 = 3x^2.$

2) $\partial x^{-2} = -2x^{-3}.$

3) $\partial \frac{1}{x^4} = \partial x^{-4} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}.$

4) $\partial x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$.

5) $\partial \sqrt{x} = \partial x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6) $\partial \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \partial x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$.

§. 209.

Es ist 1) $\partial a^x = a^x \cdot \ln a$.

2) $\partial e^x = e^x$.

Es ist

$$a^x = 1 + (\ln a)x + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} x^3 + \ldots.$$

Hieraus folgt, wenn man §. 203, §. 202, §. 205 und den vorigen Paragraphen anwendet

$$\partial a^x = 0 + \ln a + \frac{(\ln a)^2}{2!} 2x + \frac{(\ln a)^3}{3!} 3x^2 + \ldots.$$

$$= \ln a \left[1 + (\ln a)x + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \ldots\right]$$

oder $\partial a^x = a^x \cdot \ln a$.

Nach 1) ist jetzt

$$\partial e^x = e^x \cdot \ln e$$

und es ist $\ln e = 1$, also $\partial e^x = e^x$.

§. 210.

Es ist $\partial \ln x = \frac{1}{x}$.

Nach §. 149 3) ist

$$\ln(x+h) = \ln x + 2\left[\frac{h}{2x+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^5 + \ldots\right]$$

oder

$$\ln(x+h) - \ln x = 2\left[\frac{h}{2x+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^5 + \ldots\right]$$

und wenn man diese Gleichung durch h dividirt und darauf $h = 0$ setzt, folgt

$$\partial \ln x = \frac{1}{x}.$$

§. 211.

Es ist $$\partial \overset{a}{\mathrm{Log}}\, x = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Es ist nach §. 150

$$\overset{a}{\mathrm{Log}}\, x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

folglich $$\partial \overset{a}{\mathrm{Log}}\, x = \partial \frac{\ln x}{\ln a}$$

oder nach §. 207 2)

$$\partial \overset{a}{\mathrm{Log}}\, x = \frac{\partial \ln x}{\ln a}$$

und, wenn man den vorigen Paragraphen anwendet,

$$\partial \overset{a}{\mathrm{Log}}\, x = \frac{1}{x \ln a}.$$

§. 212.

Es ist $$1)\ \partial \mathrm{Sin}\, x = \mathrm{Cos}\, x$$
$$2)\ \partial \mathrm{Cos}\, x = -\mathrm{Sin}\, x.$$

Nach §. 156 ist

$$\mathrm{Sin}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

also, wenn man §. 203, §. 207 2) und §. 208 anwendet,

$$\partial \mathrm{Sin}\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$= \mathrm{Cos}\, x.$$

Ferner ist

$$\mathrm{Cos}\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

folglich unter Anwendung von §. 203, §. 202, §. 207 2) und §. 208.

$$\partial \mathrm{Cos}\, x = -\ x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots$$
$$= -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$
$$= -\mathrm{Sin}\, x.$$

§. 213.

Es ist

$$1)\ \partial \mathrm{tg}\,x = \mathrm{Sec}\,x^2$$
$$2)\ \partial \mathrm{Cotg}\,x = -\mathrm{Cosec}\,x^2$$
$$3)\ \partial \mathrm{Sec}\,x = \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{Sec}\,x$$
$$4)\ \partial \mathrm{Cosec}\,x = -\mathrm{Cotg}\,x\,\mathrm{Cosec}\,x$$
$$5)\ \partial \mathrm{Sinv}\,x = \mathrm{Sin}\,x$$
$$6)\ \partial \mathrm{Cosv}\,x = -\mathrm{Cos}\,x.$$

Es ist nämlich

$$\partial \mathrm{tg}\,x = \partial \frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,x}$$

oder nach §. 206

$$\partial \mathrm{tg}\,x = \frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial \mathrm{Sin}\,x - \mathrm{Sin}\,x\,\partial \mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Cos}\,x^2}$$
$$= \frac{\mathrm{Cos}\,x^2 + \mathrm{Sin}\,x^2}{\mathrm{Cos}\,x^2}\ \text{(vor. Paragraph.)}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{Cos}\,x^2} = \mathrm{Sec}\,x^2.$$

Die übrigen Formeln ergeben sich ähnlich, indem man Cotg x, Sec x u. s. f. durch Sin x, Cos x ausdrückt.

§. 214.

Wir heben ausdrücklich hervor, daß wegen der Gleichung

$$df_x = \partial f_x \cdot dx$$

zur Bildung des Differentials einer Funktion jedesmal das Bilden der Ableitung erforderlich und ausreichend ist.

So ist z. B.

$$\partial(f_x + \phi_x) = \partial f_x + \partial \phi_x$$

also
$$d(f_x + \phi_x) = (\partial f_x + \partial \phi_x)dx$$

ferner
$$\partial(f_x \phi_x) = f_x \partial \phi_x + \phi_x \partial f_x$$

also
$$d(f_x \phi_x) = (f_x \partial \phi_x + \phi_x \partial f_x)dx$$

ferner
$$\partial \mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,x$$

also
$$d\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,x \cdot dx$$

u. s. w.

§. 215.

Ist $f_x = 0$
so ist $\partial f_x = 0$
und dann auch

$$df_x = \partial f_x dx = 0.$$

Denn alsdann ist $\partial f_x = \partial 0_x$ und da 0 constant ist, so folgt das Gesetz aus §. 202.

IV. Funktionen mehrerer Variabeln.

§. 216.

Es sei f eine Funktion mehrerer Urveränderlichen x, y, z .... Die constanten Differentiale dx, dy, dz .... dieser Veränderlichen sind dann von einander eben so zu unterscheiden, wie die Veränderlichen selbst. Denn in den Fällen der Anwendung werden x, y, z .... sich entweder auf ungleichartige Größen beziehen, wie z. B. Zeit, Druck, u. s. f. oder es wird Grund vorliegen, die Abhängigkeit der Funktion von jedem der Veränderlichen gesondert zu erhalten und darzustellen.

§. 217.

Es sei f eine Funktion mehrerer Veränderlichen x, y, z u. s. f. Die Ableitung dieser Funktion nach x wird gedacht und gebildet, während man f bloß als Funktion von x, also die übrigen Ausdrücke y, z u. s. f. wie constant betrachtet, und wir bezeichnen diese Ableitung durch ∂f_x. Die Ableitung derselben Funktion nach y wird gebildet, wenn man f bloß als Funktion von y, also x, z u. s. w. als constant behandelt; und wir bezeichnen diese Ableitung durch ∂f_y. U. s. w.

Jede dieser Ableitungen ist im Allgemeinen selbst wiederum eine Funktion von x, y, z u. s. f. Von jeder solchen Ableitung kann daher weiter die Ableitung nach jedem einzelnen der Veränderlichen gefordert werden. Die Bezeichnung bleibt vorläufig die bisherige. Die Ableitung nach y von ∂f_x z. B. bezeichnen wir einstweilen durch $\partial(\partial f_x)_y$.

§. 218.

Von einer Funktion mehrerer Veränderlichen kommen verschiedene Differentiale in Betracht.

Es sei z. B. f eine Funktion zweier Urveränderlichen x und y, so sind drei Differentiale der Funktion zu unterscheiden. Die unendlich kleine Aenderung, welche f dadurch erleidet, daß bloß x um sein Differential dx wächst, nennt man das partielle Differential von f nach x, und wir bezeichnen es durch df_x; die unendlich kleine Aenderung, welche f erleidet, wenn bloß y um sein Differential dy wächst, heißt das partielle Differential von f nach y, und wir bezeichnen es durch df_y; die unendlich kleine Aenderung erster Ordnung, welche f erleidet, wenn x sich um dx und zugleich y um dy ändert, nennt man das vollständige oder totale Differential der Funktion f, und wir bezeichnen es durch $df_{x,y}$.

Ist f eine Funktion dreier Veränderlichen x, y, z, so kommen sieben verschiedene Differentiale der Funktion in Betracht: drei entstehen, wenn bloß x, oder bloß y, oder allein z sich um sein Differential ändert, wiederum drei, wenn x und y, oder x und z, oder y und z um ihre Differentiale geändert werden, endlich noch eines, wenn x, y und z gleichzeitig um ihre Differentiale wachsen. Das letzte ist das totale Differential der Funktion, die übrigen heißen partielle. U. s. w.

§. 219.

Das Produkt dx dy ist ein Differential zweiter Ordnung.

Denn es muß mit $\frac{1}{dy}$ d. h. mit ∞ multiplicirt werden, um auf das Differential dx erster Ordnung zurückzukommen.

Eben so erkennt man die Produkte $dx \cdot dy \cdot dz$, $dx^2 dy$ als Differentiale dritter Ordnung; u. s. f.

§. 220.

Ist f eine Funktion der beiden Veränderlichen x und y, so ist

$$df_{x,y} = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy$$

oder was dasselbe sagt

$$df_{x,y} = df_x + df_y.$$

In der Funktion f der beiden Veränderlichen x und y lasse man zuerst bloß x übergehen in $x + dx$, und es entsteht

$$f_{x+dx} = f + dx \cdot \partial f_x.$$

In dieser Gleichung gehe ferner y über in $y + dy$. Der Ausdruck zur Linken geht dadurch über in

$$f_{x+dx,\, y+dy}.$$

Der Ausdruck f geht über in

$$f + dy \cdot \partial f_y.$$

Der Ausdruck ∂f_x geht über in

$$\partial f_x + dy\, \partial(\partial f_x)_y.$$

Diese Werthe substituire man oben; das liefert

$$f_{x+dx,\, y+dy} = f + dy \cdot \partial f_y + dx \cdot \partial f_x + dx \cdot dy\, \partial(f_x)_y$$

oder, indem das Differential zweiter Ordnung verschwindet

$$f_{x+dx,\, y+dy} - f = dy \cdot \partial f_y + dx \cdot \partial f_x$$

oder

$$df_{x,\, y} = \partial f_x dx + \partial f_y dy$$

und das ist das Gesetz.

§. 221.

Ist f eine Funktion der drei Veränderlichen x, y, z, so ist

$$df_{x,\, y,\, z} = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy + \partial f_z \cdot dz$$

oder, was dasselbe sagt

$$df_{x,y,\, z} = df_x + df_y + df_z.$$

Man erhält wie im vorigen Paragraph, und indem man sofort die Differentiale zweiter Ordnung verschwinden läßt, nach und nach

$$f_{x+dx} = f + dx \cdot \partial f_x$$

$$f_{x+dx,y+dy} = f + dy \cdot \partial f_y + dx\, \partial f_x$$

$$f_{x+dx,\, y+dy,\, z+dz} = f + dz\, \partial f_z + dy\, \partial f_y + dx\, \partial f_x$$

also

$$f_{x+dx,y+dy,\, z+dz} - f = dz\, \partial f_z + dy\, \partial f_y + dx\, \partial f_x$$

oder

$$df_{x,y,\, z} = \partial f_x dx + \partial f_y dy + \partial f_z dz.$$

V. Mittelbare Funktion.

§. 222.

Es sei f eine Funktion von ϕ, und ϕ eine Funktion von x. Der Ausdruck f kommt dann in doppelter Weise als eine Funktion in Betracht, nämlich als Funktion f_ϕ von dem Ausdruck ϕ, und andererseits als Funktion f_x von x. Während f als Funktion von x angesehen wird, kann man entweder beachten, daß x vermittelst ϕ in f vorkommt, oder man kann diesen Umstand außer Acht lassen. Im ersten Fall werde f eine **mittelbare** Funktion von x genannt, im anderen eine **unmittelbare** Funktion von x.

Es ist für die Funktion an sich gleichgiltig und Sache unserer Willkür, f als mittelbare oder als unmittelbare Funktion von x anzusehen; denn es ist f eine mittelbare Funktion von x, sobald wir beachten, daß x vermittelst ϕ in f erscheint, dagegen ist f eine unmittelbare Funktion von x, wenn wir den in f vorkommenden Ausdruck ϕ nicht als einen besonderen Ausdruck festhalten, ihn im Gegentheil als solchen übersehen und lediglich beachten, daß überhaupt x in f enthalten ist.

Der Urveränderliche x kann sich um jeden beliebigen Werth h ändern, wenn nur $x + h$ in den Gränzen bleibt, die etwa dem x sind gestellt worden.

Geht die Funktion ϕ über in $\phi + k$, so ist k nicht willkürlich, sondern stellt nur die Werthe vor, um welche ϕ seiner Natur nach sich ändern kann dadurch, daß x in ihm übergeht in $x + h$. Und sinkt k herab zu $d\phi$, so ist dies das Differential der Funktion ϕ, welches nach dem allgemeinen Gesetz sich ausdrückt durch $\partial\phi_x \cdot dx$.

Nach §. 193 geht die Funktion f^I in die Ableitung über nicht bloß wenn dx, sondern wenn überhaupt nur ein unendlich kleiner Werth dort statt h gesetzt wird. Kommt daher f als Funktion von ϕ in Betracht, und ist die Ableitung von f nach ϕ herzustellen, so wird sie eben so gebildet, wie wenn ϕ urveränderlich wäre.

§. 223.

Ist f eine Funktion von ϕ, und ϕ eine Funktion von x, und kommt x nur vermittelst ϕ in f vor, nicht noch außerdem, so ist

$$\partial f_x = \partial f_\phi \partial \phi_x$$

oder
$$df_x = \partial f_\phi \cdot \partial \phi_x \cdot dx.$$

Man betrachte f einerseits als unmittelbare Funktion von x, andererseits als Funktion von ϕ und es ist

$$f_x = f_\phi.$$

Geht nun x über in $x + dx$, so geht ϕ über in $\phi + d\phi$ und es folgt

$$\begin{aligned} f_{x+dx} &= f_{\phi+d\phi} \\ &= f_\phi + \partial f_\phi d\phi \\ &= f_\phi + \partial f_\phi \partial \phi_x dx \\ f_{x+dx} - f_\phi &= \partial f_\phi \partial \phi_x dx \end{aligned}$$

oder, da f willkürlich als f_x oder f_ϕ darf angesehen werden

$$\frac{f_{x+dx} - f_x}{dx} = \partial f_\phi \partial \phi_x$$

oder
$$\partial f_x = \partial f_\phi \partial \phi_x$$

und dies war zu erweisen.

Das eben dargelegte Gesetz kommt sehr oft zur Anwendung; denn als Funktion ϕ muß jeder Ausdruck betrachtet werden, welcher nicht das einfache x ist.

Ist z. B.

$$f = x^n$$

so ist
$$\partial f_x = nx^{n-1}.$$

Ist andererseits

$$f = (3x)^n$$

so ist 3x als ϕ zu betrachten, und

$$\begin{aligned} \partial f_x &= n(3x)^{n-1} \partial(3x) \\ &= 3 \cdot n(3x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Oder, ist

$$f = (-x)^n$$

so ist $-1 \cdot x$ als ϕ aufzufassen, und

$$\begin{aligned} \partial f_x &= n(-x)^{n-1} \partial(-1 \cdot x) \\ &= -n(-x)^{n-1}. \end{aligned}$$

§. 224.

Ist f eine Funktion von ϕ und ϕ eine Funktion von x und kommt x nur vermittelst ϕ in f vor, nicht noch außerdem, so ist

$$1)\quad \frac{\partial f_x}{\partial \phi_x} = \partial f_\phi$$

$$2)\quad \frac{\partial f_x}{\partial f_\phi} = \partial \phi_x.$$

Nach dem vorigen Paragraph.

§. 225.

Ist f eine Funktion von ϕ und ψ, sind ϕ und ψ Funktionen von x, und kommt x nur vermittelst der Funktionen ϕ und ψ in f vor, nicht noch außerdem, so ist

$$\partial f_x = \partial f_\phi \partial \phi_x + \partial f_\psi \partial \psi_x.$$

Man betrachte f einerseits als unmittelbare Funktion von x, andererseits als Funktion von ϕ und ψ, und es ist

$$f_x = f_{\phi, \psi}$$

oder, indem man §. 220 anwendet,

$$df_x = \partial f_\phi d\phi + \partial f_\psi d\psi$$

oder, da ϕ und ψ Funktionen von x sind,

$$df_x = \partial f_\phi \partial \phi_x dx + \partial f_\psi \partial \psi_x dx$$

und daraus folgt, mit dx dividirend

$$\partial f_x = \partial f_\phi \partial \phi_x + \partial f_\psi \partial \psi_x.$$

§. 226.

Und ist f eine Funktion von ϕ, ψ und χ, während ϕ, ψ und χ Funktionen von x sind, und erscheint x nicht außerdem noch in f, so ist

$$\partial f_x = \partial f_\phi \partial \phi_x + \partial f_\psi \partial \psi_x + \partial f_\chi \partial \chi_x.$$

Ergiebt sich wie das Gesetz im vorigen Paragraph.

§. 227.

Ist f eine Funktion von ϕ und von x, während ϕ eine Funktion von x ist, und betrachten wir f als unmittelbare Funktion von allem x, welches überhaupt in f vorkommt, so bezeichnen wir diese Funktion durch f_x, betrachten wir aber die Funk-

tion f bloß als Funktion desjenigen x, welches nicht in ϕ enthalten ist (wobei ϕ als ein constanter Ausdruck angesehen, also das x in ϕ übersehen wird), so bezeichnen wir die Funktion durch $f_{(x)}$. Die Bedeutung der Ableitungen ∂f_x und $\partial f_{(x)}$ ist hiernach festgestellt.

§. 228.

Ist f eine Funktion von ϕ und von x, und ist dabei ϕ eine Funktion von x, so ist

$$\partial f_x = \partial f_\phi \, \partial \phi_x + \partial f_{(x)}.$$

Erhellet aus §. 225, wenn man $\psi_x = x$ setzt und beachtet, daß alsdann $\partial \psi_x = \partial x = 1$ ist.

§. 229.

Und ist f eine Funktion von ϕ, ψ und x, während ϕ und ψ Funktionen von x vorstellen, so ist

$$\partial f_x = \partial f_\phi \, \partial \phi_x + \partial f_\psi \, \partial \psi_x + \partial f_{(x)}.$$

Folgt aus §. 226.

§. 230.

Ist f eine Funktion von ϕ und von x, dabei ϕ eine Funktion von x, und ist

$$f_{\phi, x} = 0$$

so ist

$$\partial f_x = \partial f_\phi \, \partial \phi_x + \partial f_{(x)} = 0.$$

Man betrachte f als unmittelbare Funktion von x und es erhellet der Satz aus §. 215.

§. 231.

Und ist f eine Funktion von ϕ, ψ und x, während ϕ und ψ Funktionen von x vorstellen, und ist

$$f_{\phi, \psi, x} = 0$$

so ist

$$\partial f_x = \partial f_\phi \, \partial \phi_x + \partial f_\psi \, \partial \psi_x + \partial f_{(x)} = 0.$$

VI. Implicite Funktion.

§. 232.

Ist gegeben die Gleichung

$$f_{x,y} = 0$$

so ist dadurch y bestimmt als Funktion von x, und umgekehrt x als Funktion von y.

Denn würde oder könnte man y entwickeln aus der Gleichung, so würde es hervorgehen als eine Funktion von x. Und die Entwickelung von x würde dasselbe als Funktion von y liefern.

§. 233.

Sind gegeben die beiden Gleichungen

$$f_{x,y,z} = 0$$
$$F_{x,y,z} = 0$$

so sind dadurch je zwei der drei Ausdrücke x, y, z als Funktionen des dritten bestimmt; vorausgesetzt, die Gleichungen seien unabhängig von einander.

Denn denkt man zwei jener Ausdrücke entwickelt, so werden sie als Funktionen des dritten sich darstellen.

§. 234.

Ist gegeben $y = \phi_x$

so sagt man, y sei explicit als Funktion von x gegeben. Ist dagegen y nur vermöge einer Gleichung wie etwa

$$f_{x,y} = 0$$

als Funktion von x bestimmt, so sagt man y sei implicit gegeben als Funktion von x.

§. 235.

Es sei gegeben die Gleichung $f_{x,y} = 0$.

Der Gleichung gemäß werde y als Funktion ϕ von x bloß gedacht; und diese bloß gedachte Funktion stelle man sich unter y in der oberen Gleichung vor. Bei solcher Vorstellung ist $f_{x,y}$ eine Funktion von y und von x, und y eine Funktion von x.

Aus der oberen Gleichung folgt dann nach §. 228 und 230

$$\partial f_y \partial y_x + \partial f_x = 0$$

während ∂f_x hier die Ableitung von f nach demjenigen x bedeutet, welches nicht in y befindlich ist, d. h. nach demjenigen x, welches geradezu in f erscheint.

Die letzte Gleichung liefert

$$\partial y_x = -\frac{\partial f_x}{\partial f_y}$$

und hierdurch ist ∂y_x gegeben, ohne daß y explicit als Funktion von x vorläge.

Betrachten wir der gegebenen Gleichung gemäß umgekehrt x als Funktion von y, so folgt wie zuvor

$$\partial f_x \partial x_y + \partial f_y = 0$$

und daraus

$$\partial x_y = -\frac{\partial f_y}{\partial f_x}.$$

§. 236.

Ist demnach durch die Gleichung

$$f_{x,y} = 0$$

jeder der Ausdrücke x und y implicit als Funktion des anderen gegeben, so ist

$$1)\quad \partial y_x = -\frac{\partial f_x}{\partial f_y}$$

$$2)\quad \partial x_y = -\frac{\partial f_y}{\partial f_x}.$$

Hieraus folgt, indem man multiplicirt

$$3)\quad \partial y_x \cdot \partial x_y = 1$$

also weiter

$$\partial y_x = \frac{1}{\partial x_y}$$

$$\partial x_y = \frac{1}{\partial y_x}.$$

§. 237.

Sind durch die Gleichungen

$$f_{x,y,z} = 0$$

$$F_{x,y,z} = 0$$

je zwei der drei Ausdrücke x, y, z als Funktionen des dritten implicit gegeben, so lassen sich die Ableitungen herstellen. Betrachtet man z. B. x und y als Funktionen von z, so folgt

$$\partial f_x \partial x_z + \partial f_y \partial y_z + \partial f_z = 0$$
$$\partial F_x \partial x_z + \partial F_y \partial y_z + \partial F_z = 0$$

und aus diesen Gleichungen können ∂x_z und ∂y_z entwickelt werden.

§. 238.

1) Es sei gegeben

$$1)\quad f_{x,y} = 0$$

während x und y Funktionen von t vorstellen. Dann ist auch $f_t = 0$ und $\partial f_t = 0$, d. h. wegen §. 225

$$\partial f_x \partial x_t + \partial f_y \partial y_t = 0$$

und hieraus folgt

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = -\frac{\partial f_x}{\partial f_y}$$

oder

$$\frac{\partial x_t}{\partial y_t} = -\frac{\partial f_y}{\partial f_x}.$$

Und da wegen der Gleichung 1) y als Funktion von x und x als Funktion von y gedacht werden kann, so sind die Quotienten $\frac{\partial y_t}{\partial x_t}$ und $\frac{\partial x_t}{\partial y_t}$ nach §. 236 auch beziehlich ∂y_x und ∂x_y.

2) Und ist

$$1)\quad f_{x,y,z} = 0$$
$$2)\quad \phi_{x,y,z} = 0$$

während x, y und z als Funktionen von t gedacht werden, so sind auch f_t und ϕ_t gleich Null, eben so ∂f_t und $\partial \phi_t$, d. h.

$$\partial f_x \partial x_t + \partial f_y \partial y_t + \partial f_z \partial z_t = 0$$
$$\partial \phi_x \partial x_t + \partial \phi_y \partial y_t + \partial \phi_z \partial z_t = 0.$$

Und hieraus können die Quotienten $\frac{\partial x_t}{\partial z_t}, \frac{\partial y_t}{\partial z_t}, \frac{\partial x_t}{\partial y_t}, \frac{\partial z_t}{\partial y_t}, \frac{\partial y_t}{\partial x_t}, \frac{\partial z_t}{\partial x_t}$ entwickelt werden, die, insofern durch die Gleichungen 1) und 2) je zwei der drei Ausdrücke x, y, z als Funktionen des dritten sich ansehen lassen, beziehlich ∂x_z, ∂y_z, ∂x_y, ∂z_y, ∂y_x, ∂z_x liefern.

§. 239.

Sind x und y urveränderlich, und ist

$$f_{x,y} = 0$$

so ist $$df_{x,y} = 0.$$

Es ist $f_{x,y} = 0$ bei jedem der Werthe von x und y; folglich ist

$$f_{x+dx,y+dy} = 0$$

dann auch $$f_{x+dx,y+dy} - f_{x,y} = 0$$

d. h. $$df_{x,y} = 0.$$

Aus

$$df_{x,y} = df_x + df_y = \partial f_x dx + \partial f_y dy = 0$$

folgt weiter

$$\partial f_x = 0 \text{ und } df_x = 0$$
$$\partial f_y = 0 \text{ und } df_y = 0.$$

§. 240.

Ist gegeben

$$f_{x,y,z} = 0$$

so ist jeder der Ausdrücke x, y, z implicit gegeben als Funktion der beiden übrigen.

§. 241.

Es sei gegeben

$$f_{x,y,z} = 0$$

und es werde z betrachtet als implicite Funktion der Urvariabeln x und y.

Man hat nach §. 220 und §. 239

$$df_{x,y} = \partial f_x dx + \partial f_y dy = 0$$
$$\partial f_x = \partial f_z \partial z_x + \partial f_x = 0$$
$$\partial f_y = \partial f_z \partial z_y + \partial f_y = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen gewähren ∂z_x und ∂z_y und dann ist

$$dz_{x,y} = \partial z_x dx + \partial z_y dy$$

d. h. man hat alsdann das totale Differential der impliciten Funktion z.

§. 242.

Es sei gegeben

$$f_{v,x,y,z} = 0$$
$$F_{v,x,y,z} = 0$$

und man betrachte v und x als urvariabel, y und z als implicit gegebene Funktionen von v und x.

Man hat

$$\partial f_v dv + \partial f_x dx = 0$$
$$\partial F_v dv + \partial F_x dx = 0$$

oder

$$[\partial f_y \partial y_v + \partial f_z \partial z_v + \partial f_v]dv + [\partial f_y \partial y_x + \partial f_z \partial z_x + \partial f_x]dx = 0$$
$$[\partial F_y \partial y_v + \partial F_z \partial z_v + \partial F_v]dv + [\partial F_y \partial y_x + \partial F_z \partial z_x + \partial F_x]dx = 0.$$

Jede der eingeklammerten Summen ist Null. Das liefert vier Gleichungen, aus welchen ∂y_v, ∂y_x, ∂z_v, ∂z_x sich entnehmen lassen, und dann ist

$$dy = \partial y_v dv + \partial y_x dx$$
$$dz = \partial z_v dv + \partial z_x dx$$

wodurch die Differentiale der implicit gegebenen Funktionen y und z vorliegen.

VII. Höhere Ableitungen und Differentiale.

§. 243.

Die Ableitung ∂f_x einer Funktion f_x ist selbst eine Funktion von x. Es kann daher ∂f_x wie eine ursprüngliche Funktion angesehen und davon wiederum die Ableitung gebildet werden. Diese erste Ableitung von ∂f_x nennen wir die zweite Ableitung von f_x und bezeichnen sie durch $\partial^2 f_x$. Die Ableitung von $\partial^2 f_x$ nennen wir die dritte Ableitung von f_x und bezeichnen sie durch $\partial^3 f_x$, u. s. f.

§. 244.

Das Differential df_x einer Funktion f_x ist, weil es sich ausdrückt durch $\partial f_x dx$ selbst eine Funktion von x, und es kann von ihm weiter das Differential gebildet werden. Dies nennen

wir das zweite Differential der Funktion f_x und bezeichnen es durch $d^2 f_x$.

§. 245.

Es ist

$$d^2 f_x = \partial^2 f_x \cdot dx^2$$

und deshalb

$$\frac{d^2 f_x}{dx^2} = \partial^2 f_x.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} d^2 f_x &= df_{x+dx} - df_x \\ &= \partial f_{x+dx} \cdot dx - \partial f_x dx \\ &= (\partial f_x + dx \cdot \partial^2 f_x) dx - \partial f_x dx \end{aligned}$$

also

$$d^2 f_x = \partial^2 f_x dx^2.$$

Das zweite Differential einer Funkion f_x ist demnach ein Differential zweiter Ordnung, und wegen der Gleichung

$$d^2 f_x = df_{x+dx} - df_x$$

ist es die Differenz zwischen den benachbarten Differentialen erster Ordnung df_{x+dx} und df_x.

§. 246.

Von dem zweiten Differential $d^2 f_x = \partial^2 f_x dx$ kann wiederum das Differential gebildet werden. Dies ist dann das dritte Differential der Funktion und wird bezeichnet durch $d^3 f_x$.

§. 247.

Es ist

$$d^3 f_x = \partial^3 f_x dx^3$$

und deshalb

$$\frac{d^3 f_x}{dx^3} = \partial^3 f_x.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} d^3 f_x &= d^2 f_{x+dx} - d^2 f_x \\ &= \partial^2 f_{x+dx} dx^2 - \partial^2 f_x dx^2 \\ &= (\partial^2 f_x + dx \partial^3 f_x) dx^2 - \partial^2 f_x dx^2 \\ &= \partial^3 f_x dx^3. \end{aligned}$$

So läßt sich weiter fortschreiten; und es ist

$$d^n f_x = \partial^n f_x dx^n.$$

§. 248.

Die Quotienten $\frac{df_x}{dx}$, $\frac{d^2f_x}{dx^2}$, $\frac{d^3f_x}{dx^3}$ u. s. f. heißen beziehlich der erste, zweite, dritte u. s. f. Differential-Quotient oder Differential-Coefficient der Funktion f_x.

§. 249.

Ist f eine Funktion der beiden Urveränderlichen x und y, so ist

$$\partial(\partial f_x)_y = \partial(\partial f_y)_x.$$

Es ist $\partial f_x = \frac{f_{x+dx,y} - f_{x,y}}{dx}$

also $$\partial(\partial f_x)_y = \frac{f_{x+dx,y+dy} - f_{x,y+dy} - f_{x+dx,y} + f_{x,y}}{dx \cdot dy}.$$

Der Ausdruck zur Rechten ist symmetrisch. Er geht also auch hervor, wenn man zuerst ∂f_y bildet und daraus $\partial(\partial f_y)_x$. Es erhellet demnach das Gesetz.

§. 250.

Ist f eine Funktion dreier Urveränderlichen x, y, z, so ist

$$\partial[\partial(\partial f_x)_y]_z = \partial[\partial(\partial f_y)_x]_z = \partial[\partial(\partial f_x)_z]_y = \ldots.$$

Erhellet leicht aus dem vorigen Paragraph.

§. 251.

Und weil in den Fällen der beiden vorangehenden Paragraphen die Ordnung des Differenzirens gleichgiltig ist, so wird sie ferner nicht vorgeschrieben werden, und wir bezeichnen durch $\partial^{n,q} f_{x,y}$ dasjenige, welches entsteht, wenn f überhaupt n mal nach x differenzirt wird, und q mal nach y. U. s. w.

§. 252.

Die höheren Differentiale von Funktionen mehrerer Veränderlichen sind, wie ihre ersten, entweder partiell oder total.

§. 253.

Ist f eine Funktion der beiden Urvariabeln x und y, so ist

$$d(df_x)_y = d(df_y)_x.$$

Denn es ist

$$d(df_x)_y = \partial(\partial f_x \cdot dx)_y dy = \partial(\partial f_x)_y \cdot dx \cdot dy$$

und

$$d(df_y)_x = \partial(\partial f_y \cdot dy)_y dx = \partial(\partial f_y)_x \cdot dx \cdot dy$$

und nach §. 249 ist

$$\partial(\partial f_x)_y = \partial(\partial f_y)_x.$$

Erweiterungen, entsprechend §. 250, sind leicht zu überblicken.

§. 254.

Statt $d(df_x)_y$ oder $d(df_y)_x$ schreiben wir in der Folge $d^{1,1}f_{x,y}$. Und weiter schreiben wir $d^{n,q}f_{x,y}$ u. dergl. m. entsprechend §. 251.

§. 255.

Nach den vorstehenden Paragraphen ist

$$d^{1,1}f_{x,y} = \partial^{1,1}f_{x,y} dx \cdot dy$$

und deshalb

$$\frac{d^{1,1}f_{x,y}}{dx\,dy} = \partial^{1,1}f_{x,y}.$$

Erweiterungen sind leicht.

§. 256.

Ist f eine Funktion der beiden Urveränderlichen x und y, so ist

$$1)\quad d^2f_{x,y} = d^2f_x + 2d^{1,1}f_{x,y} + d^2f_y.$$

Man hat nämlich

$$df_{x,y} = df_x + df_y.$$

Deshalb weiter

$$d^2f_{x,y} = d^2f_x + d^{1,1}f_{y,x} + d^{1,1}f_{x,y} + d^2f_y,$$

oder

$$d^2f_{x,y} = d^2f_x + 2d^{1,1}f_{x,y} + d^2f_y.$$

In gleicher Weise folgt aus 1)

$$2)\quad d^3f_{x,y} = d^3f_x + 3d^{2,1}f_{x,y} + 3d^{1,2}f_{x,y} + d^3f_y.$$

U. m. dergl.

§. 257.

Die Formeln

$$df_{x,y} = df_x + dfy$$

$$d^2f_{x,y} = d^2f_x + 2d^{1,1}f_{x,y} + d^2f_y$$

$$d^3f_{x,y} = d^3f_x + 3d^{2,1}f_{x,y} + 3d^{1,2}f_{x,y} + d^3f_y \text{ u. s. w.}$$

erhalten, wenn man rechts die Differentiale durch die Ableitungen ausdrückt, folgende Gestalt

$$df_{x,y} = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y dy$$

$$d^2 f_{x,y} = \partial^2 f_x \cdot dx^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} f_{x,y} dx \cdot dy + \partial^2 f_y \cdot dy^2$$

$$d^3 f_{x,y} = \partial^3 f_x \cdot dx^3 + 3\partial^{2,1} f_{x,y} dx^2 \cdot dy + 3\partial^{1,2} f_{x,y} dx \cdot dy^2 + \partial^3 f_x dy^3$$

u. s. f.; und, wenn man die Ableitungen durch Differentialquotienten ersetzt

$$df_{x,y} = \frac{df_x}{dx} dx + \frac{df_y}{dy} dy$$

$$d^2 f_{x,y} = \frac{d^2 f_x}{dx^2} dx^2 + 2\frac{d^{1,1} f_{x,y}}{dx \cdot dy} dx \cdot dy + \frac{d^2 f_y}{dy^2} dy^2$$

$$d^3 f_{x,y} = \frac{d^3 f_x}{dx^3} dx^3 + 3\frac{d^{2,1} f_x}{dx^2 dy} dx^2 dy + 3\frac{d^{1,2} f_{x,y}}{dx dy^2} dx \cdot dy^2 + \frac{d^3 f_y}{dy^3} dy^3$$

u. s. f.

§. 258.

Es sei f Funktion von ϕ, und ϕ Funktion von x, während x nur vermittelst ϕ in f vorkommt. Wir wollen $\partial^2 f_\phi$ durch Ableitungen von f und ϕ nach x ausdrücken.

Es ist nach §. 223

$$\alpha)\quad \partial f_x = \partial f_\phi \partial \phi_x.$$

Wir nehmen von beiden Seiten die Ableitung nach x, indem wir §. 204 anwenden und §. 223 wohl beachten. Es entsteht

$$\beta)\quad \partial^2 f_x = \partial f_\phi \partial^2 \phi_x + \partial \phi_x \partial^2 f_\phi \partial \phi_x.$$

$$= \partial f_\phi \partial^2 \phi_x + \partial^2 f_\phi \partial \phi_x{}^2$$

oder, für ∂f_ϕ den Werth aus α) setzend

$$\partial^2 f_x = \frac{\partial f_x}{\partial \phi_x} \partial^2 \phi_x + \partial^2 f_\phi \partial \phi_x{}^2$$

und daraus ergiebt sich

$$\gamma)\quad \partial^2 f_\phi = \frac{\partial \phi_x \partial^2 f_x - \partial f_x \partial^2 \phi_x}{\partial \phi_x{}^3}.$$

Oder: Es ist nach α)

$$\partial f_\phi = \frac{\partial f_x}{\partial \phi_x}$$

also nach §. 206 und §. 223

$$\partial^2 f_\phi \partial\phi_x = \frac{\partial\phi_x \partial^2 f_x - \partial f_x \partial^2 \phi_x}{\partial\phi_x{}^2}$$

folglich

$$\partial^2 f_\phi = \frac{\partial\phi_x \partial^2 f_x - \partial f_x \partial^2 \phi_x}{\partial\phi_x{}^3}.$$

Um $\partial^3 f_\phi$ durch Ableitungen von f und ϕ nach x ausgedrückt herzustellen, nimmt man wiederum von β) die Ableitung nach x und verfährt ähnlich wie zuerst; oder man nimmt sofort von γ) die Ableitung nach x. U. s. w.

§. 259.

Es sei gegeben

$$f_{x,y} = 0.$$

Wir betrachten y als implicite Funktion von x und wollen $\partial^2 y_x$ herstellen.

Zuvörderst haben wir

$$\alpha)\quad \partial f_y \partial y_x + \partial f_x = 0.$$

Deshalb weiter

$$\partial[\partial f_y \partial y_x + \partial f_x]_y \partial y_x + \partial[\partial f_y \partial y_x + \partial f_x]_x = 0$$

oder, indem beachtet wird, daß ∂y_x kein y enthält, also $\partial(\partial y_x)_y = 0$ ist,

(Es ist nämlich unter y die Funktion ϕ_x zu denken, welche sich ergeben würde, wenn man y aus $f_{x,y} = 0$ entwickelte.)

$$[\partial^2 f_y \partial y_x + \partial^{1,1} f_{x,y}]\partial y_x + \partial^{1,1} f_{x,y} \partial y_x + \partial f_y \partial^2 y_x + \partial^2 f_x = 0$$

oder

$$\partial^2 f_y \partial y_x{}^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \partial y_x + \partial f_y \partial^2 y_x + \partial^2 f_x = 0.$$

Daraus ist

$$\partial^2 y_x = -\frac{\partial^2 f_x + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \partial y_x + \partial^2 f_y \partial y_x{}^2}{\partial f_y}$$

oder, wenn man statt ∂y_x den Werth aus α) setzt

$$\partial^2 y_x = -\frac{\partial^2 f_x \partial f_y - 2\partial f_x \partial f_y \partial^{1,1}{}_{x,y} + \partial f_x{}^2 \partial^2 f_y}{\partial f_y{}^3}.$$

Oder: Nach α) ist

$$\partial y_x = -\frac{\partial f_x}{\partial f_y}.$$

Daher nach §. 206

$$\partial^2 y_x = -\frac{\partial f_y \partial(\partial f_x)_x - \partial f_x \partial(\partial f_y)_x}{\partial f_y{}^2}$$

$$= -\frac{\partial f_y(\partial^{1,1} f_{x,y} \partial y_x + \partial^2 f_x) - \partial f_x(\partial^2 f_y \partial y_x + \partial^{1,1} f_{x,y})}{\partial f_y{}^2}$$

$$= -\frac{\partial f_y \partial^2 f_x + \partial f_y \partial^{1,1} f_{x,y} \partial y_x - \partial f_x \partial^2 f_y \partial y_x - \partial f_x \partial^{1,1} f_{x,y}}{\partial f_y{}^3}$$

oder, den Werth für ∂y_x setzend

$$\partial^2 y_x = -\frac{\partial^2 f_x \partial f_y{}^2 - 2\partial f_x \partial f_y \partial^{1,1} f_{x,y} + \partial f_x{}^2 \partial^2 f_y}{\partial f_y{}^2}.$$

Die dritte Ableitung läßt sich gleichfalls in solchen Weisen erzielen. U. m. dergl.

§. 260.

Uebersicht zu gewähren, stellen wir die nothwendigsten Gesetze hier zusammen. Wegen des häufigen Gebrauchs haben wir die Erweiterung nach §. 223 an den geeigneten Stellen hinzugefügt.

1) $\partial a = 0.$

2) $\partial(f_x \pm \phi_x) = \partial f_x \pm \partial \phi_x.$

3) $\partial(f_x \cdot \phi_x) = f_x \partial \phi_x + \phi_x \partial f_x$

$\partial(a f_x) = a \cdot \partial f_x.$

4) $\partial \frac{f_x}{\phi_x} = \frac{\phi_x \partial f_x - f_x \partial \phi_x}{\phi_x{}^2}$

$\partial \frac{a}{\phi_x} = -\frac{a \partial \phi_x}{\phi_x{}^2}$

$\partial \frac{f_x}{a} = \frac{\partial f_x}{a}.$

5) $\partial x^n = n x^{n-1}$

$\partial x = 1$

$\partial f_x{}^n = n f_x{}^{n-1} \partial f_x.$

6) $\partial a^x = a^x \ln a$

$\partial a^{\phi x} = a^{\phi x} \ln a \cdot \partial \phi_x$

$\partial e^x = e^x$

$\partial e^{\phi x} = e^{\phi x} \partial \phi_x.$

7) $\partial \ln x = \frac{1}{x}$

$\partial \ln \phi_x = \frac{1}{\phi_x}\partial\phi_x = \frac{\partial\phi_x}{\phi_x}.$

8) $\partial \overset{a}{\mathrm{Log}}\, x = \frac{1}{x \ln a}$

$\partial \overset{a}{\mathrm{Log}}\, \phi_x = \frac{\partial\phi_x}{\phi_x \ln a}.$

9) $\partial \mathrm{Sin}\, x = \mathrm{Cos}\, x$

$\partial \mathrm{Sin}\, \phi_x = \mathrm{Cos}\, \phi_x \cdot \partial\phi_x.$

10) $\partial \mathrm{Cos}\, x = - \mathrm{Sin}\, x$

$\partial \mathrm{Cos}\, \phi_x = - \mathrm{Sin}\, \phi_x \partial\phi_x.$

11) $\partial \mathrm{tg}\, x = \mathrm{Sec}\, x^2$

$\partial \mathrm{tg}\, \phi_x = \mathrm{Sec}\, \phi_x{}^2 \partial\phi_x.$

12) $\partial \mathrm{Cotg}\, x = - \mathrm{Cosec}\, x^2$

$\partial \mathrm{Cotg}\, \phi_x = - \mathrm{Cosec}\, \phi x^2 \partial\phi_x.$

13) $\partial \mathrm{Sec}\, x = \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{Sec}\, x$

$\partial \mathrm{Sec}\, \phi_x = \mathrm{tg}\, \phi_x \mathrm{Sec}\, \phi_x \partial\phi_x.$

14) $\partial \mathrm{Cosec}\, x = - \mathrm{Cotg}\, x\, \mathrm{Cosec}\, x$

$\partial \mathrm{Cosec}\, \phi_x = - \mathrm{Cotg}\, \phi_x \mathrm{Cosec}\, \phi_x \partial\phi_x.$

15) $\partial \mathrm{Sinv}\, x = \mathrm{Sin}\, x$

$\partial \mathrm{Sinv}\, \phi_x = \mathrm{Sin}\, \phi_x \partial\phi_x.$

16) $\partial \mathrm{Cosinv}\, x = - \mathrm{Cos}\, x$

$\partial \mathrm{Cosinv}\, \phi_x = - \mathrm{Cos}\, \phi_x \partial\phi_x.$

§. 261.

Es ist

1) $\partial \mathrm{arc} \sin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\partial \mathrm{arc} \sin \phi_x = \frac{\partial\phi_x}{\sqrt{1 - \phi_x{}^2}}.$

2) $\partial \mathrm{arc} \cos x = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\partial \mathrm{arc} \cos \phi_x = - \frac{\partial\phi_x}{\sqrt{1 - \phi_x{}^2}}$

$$3)\quad \partial \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\partial \operatorname{arc} \operatorname{tg} \phi_x = \frac{\partial \phi_x}{1+\phi_x{}^2}.$$

$$4)\quad \partial \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\partial \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \phi_x = -\frac{\partial \phi_x}{1+\phi_x{}^2}.$$

$$5)\quad \partial \operatorname{arc} \sec x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\partial \operatorname{arc} \sec \phi_x = \frac{\partial \phi_x}{\phi_x\sqrt{\phi_x{}^2-1}}.$$

$$6)\quad \partial \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\partial \operatorname{arc} \operatorname{cosec} \phi_x = -\frac{\partial \phi_x}{\phi_x\sqrt{\phi_x{}^2-1}}.$$

$$7)\quad \partial \operatorname{arc} \operatorname{sinv} x = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$$

$$\partial \operatorname{arc} \operatorname{sinv} \phi_x = \frac{\partial \phi_x}{\sqrt{\phi_x(2-\phi_x)}}.$$

$$8)\quad \partial \operatorname{arc} \operatorname{cosinv} x = -\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$$

$$\partial \operatorname{arc} \operatorname{cosinv} \phi_x = -\frac{\partial \phi_x}{\sqrt{\phi_x(2-\phi_x)}}.$$

Man setze

$$\operatorname{arc} \sin x = y$$

dann ist $$x = \sin y$$

und $$x - \sin y = 0.$$

Man hat jetzt $f_{x,y} = 0$, und es ist ∂y_x zu bestimmen. Nach §. 236 ist

$$\partial y_x = -\frac{\partial f_x}{\partial f_y}.$$

Es ist aber

$$\partial f_x = \partial(x - \operatorname{Sin} y)_x = \partial x - 0 = 1$$

$$\partial f_y = \partial(x - \operatorname{Sin} y)_y = 0 - \partial \operatorname{Sin} y = -\operatorname{Cos} y.$$

Diese Werthe substituire man, und es entsteht

$$\partial y_x = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,y}$$

oder

$$\partial \arcsin x = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,y}$$

oder, da $x = \mathrm{Sin}\,y$, also $\mathrm{Cos}\,y = \sqrt{1 - x^2}$ ist,

$$\partial \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Hieraus folgt weiter nach §. 223

$$\partial \arcsin \phi_x = \frac{\partial \phi_x}{\sqrt{1 - \phi_x{}^2}}.$$

Das sind die Formeln unter 1). Eben so ergeben sich die übrigen.

Oder man setze

$$\arcsin x = y$$

und es ist

$$x = \mathrm{Sin}\,y$$

$$\partial x_y = \partial \mathrm{Sin}\,y = \mathrm{Cos}\,y$$

und nach §. 236 3) hat man sofort

$$\partial y_x = \frac{1}{\partial x_y} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,y}$$

u. s. w. wie oben.

VIII. Die Taylorsche Reihe.

§. 262.

Es sei f eine Funktion von x, und wir lassen x übergehen in $x + h$. Der Ausdruck $x + h$ kann betrachtet werden als Funktion ϕ von x, auch als Funktion ϕ von h; und demgemäß f als Funktion von diesem ϕ, das wir ansehen als Funktion von x, oder von h.

Die Ableitung von f nach $(x + h)$ werde bezeichnet durch $\partial f_{(x+h)}$.

Nach §. 223 ist

$$\partial (f_{x+h})_x = \partial f_{(x+h)} \partial (x+h)_x.$$

Es ist aber $\partial(x+h)_x = 1$, also

$$1)\quad \partial(f_{x+h})_x = \partial f_{(x+h)}.$$

Eben so folgt

$$2)\quad \partial(f_{x+h})_h = \partial f_{(x+h)}.$$

Daher ist überhaupt

$$\partial(f_{x+h})_x = \partial(f_{x+h})_h = \partial f_{(x+h)}.$$

§. 263.

Es sei ψ eine Funktion von h. Es gehe ψ in Null über, wenn $h = 0$ ist, d. h. es sei $\psi_0 = 0$. Ferner sei $\partial\psi_h$ stets positiv, oder stets negativ, wenn in ihm statt h alle Werthe von 0 bis zu einem bestimmten h gesetzt werden. Alsdann ist ψ_h für diesen bestimmten Werth von h selbst beziehlich etwas Positives oder etwas Negatives.

Man denke in ψ statt h alle Werthe von 0 bis zu dem bestimmten h gesetzt: und es ist ψ zuerst 0, und wächst darauf stets um $d\psi_h = \partial\psi_h dh$, d. h. stets um etwas Positives oder um etwas Negatives, und daraus erhellet die Behauptung.

§. 264.

Es sei f eine Funktion von x. Wir lassen x übergehen in $x+h$, und stellen uns die Aufgabe f_{x+h} durch eine Reihe wiederzugeben, welche nach den Potenzen von h fortschreitet.

Die Aufgabe zu lösen setzen wir

$$f_{x+h} = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots.$$

unter A, B, C .... unbekannte Ausdrücke verstanden, welche natürlich kein h enthalten, sondern Funktionen bloß von x sind, und versuchen, diese Ausdrücke zu bestimmen.

Die Reihe muß in f_x übergehen, wenn h zu Null wird; deshalb ist $A = f_x$. Und wir setzen demgemäß

$$\alpha)\quad f_{x+h} = f_x + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + \ldots.$$

Von dieser Gleichung nehmen wir die Ableitung nach x. Es entsteht mit Bezug auf §. 262

$$\beta)\quad \partial f_{(x+h)}$$
$$= \partial f_x + \partial B_x \cdot h + \partial C_x \cdot h^2 + \partial D_x \cdot h^3 + \partial E_x \cdot h^4 + \ldots.$$

Wir nehmen ferner von α) die Ableitung nach h; und das liefert mit Bezug auf §. 262

$$\gamma)\quad \partial f_{(x+h)} = B + 2Ch + 3Dh^2 + 4Eh^3 + \ldots.$$

Auf β) und γ) folgt nun aber

$$B = \partial f_x$$
$$C = \frac{\partial Bx}{2} = \frac{\partial^2 f_x}{2!}$$
$$D = \frac{\partial Cx}{3} = \frac{\partial^3 f_x}{3!}$$
$$E = \frac{\partial Dx}{4} = \frac{\partial^4 f_x}{4!}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Diese Werthe substituiren wir in α) und es entsteht

$$1)\quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \frac{\partial^2 f_x}{2!}h^2 + \frac{\partial^3 f_x}{3!}h^3 + \frac{\partial^4 f_x}{4!}h^4 + \ldots$$

Dies ist die Taylorsche Reihe.

Wenn in einem besonderen Fall nicht sämmtliche Ableitungen endliche Formen erhalten, sondern deren eine oder mehrere die Form ∞ annehmen, so besteht in solchem Fall die Taylorsche Reihe nicht.

Die Taylorsche Reihe ist begränzt und bricht ab mit dem Gliede $\frac{\partial^n f_x}{n!}h^n$, wenn $\partial^n f_x$ constant, also jede folgende Ableitung Null ist. Ist keine von den Ableitungen constant, so schreiten sie ohne Ende fort und die Reihe ist unendlich. In dem letzten Fall ist eine Restbestimmung nothwendig.

Wir setzen zu dem Ende

$$f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \frac{\partial^2 f_x}{2!}h^2 + \ldots \frac{X}{n!}h^n$$

unter X eine Funktion von x verstanden, und trachten, zuvörderst zwei Gränzen P und Q für X zu erlangen. Es sei deshalb

$$f_{x+h} > f_x + h\partial f_x + \frac{h^2}{2!}\partial^2 f_x + \ldots + \frac{h^n}{n!}P$$

$$f_{x+h} < f_x + h\partial f_x + \frac{h^2}{2!}\partial^2 f_x + \ldots + \frac{h^n}{n!}Q$$

oder

$$\alpha)\begin{cases} f_{x+h} - f_x - h\partial f_x - \frac{h^2}{2!}\partial^2 f_x - \ldots - \frac{h^n}{n!}P > 0 \\ f_{x+h} - f_x - h\partial f_x - \frac{h^2}{2!}\partial^2 f_x - \ldots - \frac{h^n}{n!}Q < 0. \end{cases}$$

Die Ausdrücke zur Linken werden zu Null, wenn $h = 0$. Betrachten wir sie daher als Funktionen von h, so gehen nach §. 263 die Bedingungen α) in Erfüllung, wenn die Ableitungen der Ausdrücke nach h für alle Werthe desselben von 0 bis zu dem in ihnen gedachten h beziehlich positiv sind oder negativ, d. h. wenn

$$\beta)\begin{cases} \partial f_{(x+h)} - \partial f_x - h\partial^2 f_x - \ldots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}P > 0 \\ \partial f_{(x+h)} - \partial f_x - h\partial^2 f_x - \ldots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}Q < 0. \end{cases}$$

Auch diese Ausdrücke werden zu Null, wenn man Null statt h setzt, und die Bedingungen β) werden erfüllt, sobald die Ableitungen der Ausdrücke nach h beziehlich positiv sind oder negativ für jeden Werth von 0 bis h, d. h. sobald

$$\gamma)\begin{cases} \partial^2 f_{(x+h)} - \partial^2 f_x - \ldots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}P > 0 \\ \partial^2 f_{x+h} - \partial^2 f_x - \ldots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}Q < 0. \end{cases}$$

In Bezug auf diese Ausdrücke gilt dasselbe, u. s. f. bis entsteht

$$\partial^n f_{(x+h)} - P > 0$$
$$\partial^n f_{(x+h)} - Q < 0$$

oder, da $\partial^n f_{(x+h)}$ entsteht, wenn man $\partial^n f_x$ bildet und darin $x+h$ setzt statt x,

$$\partial^n f_{x+h} - P > 0$$
$$\partial^n f_{x+h} - Q < 0.$$

Diese Bedingungen aber werden erfüllt, sobald man unter P den kleinsten, und unter Q den größten derjenigen Werthe sich vorstellt, welche $\partial^n f_{x+h}$ annimmt, während statt h alle Werthe von 0 bis zu dem bestimmten h gesetzt werden. Die Funktion X muß nun zwischen diesen Gränzwerthen sich finden, also gleich $\partial^n f_{x+\mu h}$ sein, unter μ einen Werth zwischen 0 und 1 verstanden, dessen genauere Bestimmung erst in bestimmten Fällen zu unternehmen ist. Demnach haben wir

$$2)\quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x h + \frac{\partial^2 f_x}{2!} h^2 + \ldots. + \frac{\partial^n f_{x+\mu h}}{n!} h^n.$$

§. 265.

Ist f eine Funktion von x, so verstehen wir unter $\partial^n f_a$ dasjenige, welches entsteht, wenn man die nte Ableitung von f nach x bildet und dann in ihr a setzt statt x.

§. 266.

Es sei f eine Funktion von x, und es ist

$$1)\quad f_x = f_a + \partial f_a (x-a) + \frac{\partial^2 f_a}{2!}(x-a)^2 + \frac{\partial^3 f_a}{3!}(x-a)^3 + \ldots.$$

unter a einen beliebigen Werth verstanden, und

$$2)\quad f_x = f_0 + \partial f_0 x + \frac{\partial^2 f_0}{2!} x^2 + \frac{\partial^3 f_0}{3!} x^3 + \ldots.$$

Die erste Gleichung entspringt aus §. 264 1) wenn man dort a statt x und x — a statt h setzt. 2) entsteht aus 1) wenn Null gesetzt wird statt a.

Dies sind die Maclaurinschen Reihen.

§. 267.

Es sei $f_x = x^n$

dann ist $\partial f_x = n x^{n-1}$

$\partial^2 f_x = n(n-1)x^{n-2}$

$\partial^3 f_x = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ u. s. w.

und die Taylorsche Reihe §. 264 1) liefert

$$(x+h)^n = x^n + n x^{n-1} h + n_2 x^{n-2} h^2 + n_3 x^{n-3} h^3 + \ldots.$$

übereinstimmend mit der binomischen Reihe.

Es sei andererseits

$$f_x = \operatorname{Sin} x$$

und es ist

$$\partial f_x = \operatorname{Cos} x$$

$$\partial^2 f_x = -\operatorname{Sin} x$$

$$\partial^3 f_x = -\operatorname{Cos} x$$

$$\partial^4 f_x = \operatorname{Sin} x$$

u. s. f.

und die Reihe 2) des vorigen Paragraphen liefert

$$\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

Es sei ferner

$$f_x = \ln x$$

dann ist

$$\partial f_x = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\partial^2 f_x = -x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\partial^3 f_x = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$\partial^4 f_x = -2 \cdot 3x^{-4} = \frac{2 \cdot 3}{x^4}$$

u. s. f.

Für $x = 0$ nehmen alle diese Ableitungen die Form ∞ an; daher besteht die Reihe 2) im vorigen Paragraphen für diesen besonderen Werth von x nicht. Bedienen wir uns aber der Reihe 1) des vorigen Paragraphen, und setzen $a = 1$, so entsteht

$$\ln x = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots.$$

und daraus $1 + x$ statt x setzend

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

welches die Reihe α) in §. 149 ist.

U. m. dergl.

Wenn man, was leicht geschehen kann, und im Anhange zum gegenwärtigen Kapitel sich durchgeführt findet, die Ableitungen von x^n, a^x, $\ln x$, $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$ ohne Hilfe der Reihen bestimmt, welche im neunten Kapitel sind entwickelt worden, so können diese Reihen hier ursprünglich gewonnen werden. Die

Erweiterungen, welche dort Statt gefunden haben, mußten dann hier ihre Stelle erhalten.

Für mancherlei Untersuchungen ist die Entwickelung der Funktionen in Reihen, wie sie durch die Taylorsche oder Maclaurinsche Reihe sich bewirken läßt, von Wichtigkeit.

§. 268.

Es sei f eine Funktion der beiden Urveränderlichen x und y. Es gehe x über in x + h, y in y + k. Vermittelst des Taylorschen Satzes kann $f_{x+h,\,y+k}$ in eine Reihe verwandelt werden, welche nach den Potenzen und Produkten von h und k fortschreitet.

Man lasse zuerst x übergehen in x + h. Es entsteht

$$f_{x+h,\,y} = f + \partial f_x h + \partial^2 f_x \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \frac{h^3}{3!} + \dots.$$

Weiter lasse man y übergehen in y + k. Dadurch entsteht zur Linken

$$f_{x+h,\,y+k}$$

und die Funktionen zur Rechten gehen der Reihe nach über in

$$f_{x,y} + \partial f_y k + \partial^2 f_y \frac{k^2}{2!} + \dots.$$

$$\partial f_x + \partial^{1,1} f_{x,y} k + \partial^{1,2} f_{x,y} \frac{k^2}{2!} + \partial^{1,3} f_{x,y} \frac{k^3}{3!} + \dots.$$

$$\partial^2 f_x + \partial^{2,1} f_{x,y} k + \partial^{2,2} f_{x,y} \frac{k^2}{2!} + \partial^{2,3} f_{x,y} \frac{k^3}{3!} + \dots \text{ u. s. w.}$$

Diese Werthe substituire man oben, und es entsteht:

$$f_{x+h,\,y+k}$$

$$\begin{aligned}
= f_{x,y} &+ \partial f_x h + \partial^2 f_x \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \frac{h^3}{3!} + \partial^4 f_x \frac{h^4}{4!} + \dots \\
&+ \partial f_y k + \partial^{1,1} f_{x,y} hk + \partial^{2,1} f_{x,y} \frac{h^2 k}{2!\,1!} + \partial^{3,1} f_{x,y} \frac{h^3 k}{3!\,1!} + \dots \\
&+ \partial^2 f_y \frac{k^2}{2!} + \partial^{1,2} f_{x,y} \frac{hk^2}{1!\,2!} + \partial^{2,2} f_{x,y} \frac{h^2 k^2}{2!\,2!} + \dots \\
&+ \partial^3 f_y \frac{k^3}{3!} + \partial^{1,3} f_{x,y} \frac{hk^3}{1!\,3!} + \dots \\
&+ \partial^4 f_y \frac{k^4}{4!} + \dots \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Läßt man bei der Funktion $f_{x,y,z}$ dreier Veränderlichen x, y, z, diese beziehlich in $x + h$, $y + k$, $z + l$ übergehen, so kann das Entstehende ebenfalls in eine Reihe verwandelt werden, die nach den Potenzen und Produkten von h, k und l fortschreitet. Wendet man zunächst die letzte Entwickelung an, setzt darauf $z + l$ statt z, und benutzt den Taylorschen Satz, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} f_{x+h,y+k,z+l} = f_{x,y,z} &+ \partial f_x h + \partial^2 f_x \frac{h^2}{2!} + \dots \\ &+ \partial f_y k + \partial^2 f_y \frac{k^2}{2!} + \dots \\ &+ \partial f_z l + \partial^2 f_x \frac{l^2}{2!} + \dots \\ &+ \partial^{1,1} f_{x,y} hk + \dots \\ &+ \partial^{1,1} f_{x,z} hl + \dots \\ &+ \partial^{1,1} f_{y,z} kl + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Aehnliche Entwickelungen sind bei Funktionen mit beliebig vielen Veränderlichen ausführbar. Sie bilden den Taylorschen Satz für zwei, drei und mehr Veränderliche.

Uebungen und Praktisches.

§. 269.

1) Was verstehen wir unter der Ableitung ∂f_x, und unter dem Differential df_x einer Funktion f_x, und wie drückt sich df_x aus? Wie bildet man die Ableitung der Summe, der Differenz, des Produktes, des Quotienten zweier Funktionen; wie die Ableitung von x^n, a^x, $\ln x$, $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{Cotg} x$, $\operatorname{Sec} x$, $\operatorname{Cosec} x$, $\operatorname{Sinv} x$, $\operatorname{Cosinv} x$? Wie lautet der Taylorsche Satz? Wem ist $\partial(\partial f_x)_y$ gleich, wem $\partial(\partial^2 f_x)_y$? Wenn f eine Funktion von ϕ, und ϕ eine Funktion von x ist, wie findet sich ∂f_x? Wie findet sich daher $\partial(fx^n)$, $\partial a^{\phi x}$, $\partial \ln \phi_x$, $\partial \operatorname{Sin} \phi_x$ u. s. w., u. s. w.? Wenn f eine Funktion von ϕ und ψ ist, während ϕ und ψ Funk-

tionen sind von x, wie drückt sich ∂f_x aus? Und wie drückt sich ∂f_x aus, wenn f eine Funktion von ϕ, ψ und x ist, während dabei ϕ und ψ Funktionen sind von x? Was verstehen wir unter dem zweiten, dritten Differential einer Funktion f_x, und wie drücken sich diese Differentiale aus? Und wenn f eine Funktion zweier, dreier Urveränderlichen ist, was verstehen wir unter ihren Partial-Differentialen, unter ihren vollständigen? Wie drücken sich $df_{x,y}$, $df_{x,y,z}$, $d^2f_{x,y}$, $d^3f_{x,y,z}$ aus? Wie lautet die Taylorsche Reihe?

2) Es ist nur nöthig, das Bilden der ersten Ableitung einzuüben, da jede folgende Ableitung aus der nächst vorangehenden eben so erhalten wird, wie die erste Ableitung aus der ursprünglichen Funktion.

3) $\partial ax = a \cdot \partial x = a \cdot 1 = a.$

4) $\partial ax^n = a\partial x^n = anx^{n-1}.$

5) $\partial(a + bx) = \partial a + \partial bx = 0 + b = b.$

6) $\partial(a + bx + cx^2 + gx^3) = b + 2cx + 3gx^2.$

7) $\partial(1 \pm x) = \pm 1.$

8) $\partial(-8 + x^5) = 5x^4.$

9) $\partial(3 - 5x + 3x^7) = -5 + 21x^6.$

10) $\partial\dfrac{cx^3}{d} = \dfrac{3cx^2}{d}.$

11) $\partial\dfrac{a}{b - cx^n} = \dfrac{acnx^{n-1}}{(b - cx^n)^2}.$

12) $\partial\dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 7x^2} = \dfrac{-x^6 - 7x^4 + 4x^3 - 14x}{(x^4 - 7x^2)^2}.$

13) $\partial\dfrac{1 + x}{1 - x} = \dfrac{2}{(1 - x)^2}.$

14) $\partial\dfrac{3x^4}{1 - x^2} = \dfrac{(2 - x^2)6x^3}{(1 - x^2)^2}.$

15) $\partial(a + bx)^m = m(a + bx)^{m-1}\partial(a + bx) = m(a + bx)^{m-1}b.$

16) $\partial\sqrt[n]{x} = \partial x^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$

17) $\partial\sqrt{x^2 - a^2} = \partial(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$

18) $\partial\sqrt{a+bx-cx^2} = \frac{b-2cx}{2\sqrt{a+bx-cx^2}}$.

19) $\partial\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

20) $\partial(3x^3 - 2\sqrt{x}) = 9x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

21) $\partial\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

22) $\partial\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$.

23) $\partial\sqrt[3]{\frac{ax^2-b}{x^5}} = \frac{(-3ax^2+5b)\sqrt[3]{x}}{3x^3\sqrt[3]{(ax^2-b)^2}}$.

24) $\partial(a+x)(b+x) = a+b+2x$.

25) $\partial(a+x)(b-x)(x-c) = ac+ab-bc$
$+ 2(b+c-a)x - 3x^2$.

26) $\partial x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

27) $\partial\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2-x^2} = \frac{(3a^2+x^2)x}{(a^2-x^2)^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

28) $\partial\ln x^q = \frac{q}{x}$.

29) $\partial\ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$.

30) $\partial\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

31) $\partial\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x^2}$.

32) $\partial(\ln x)^n = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$.

33) $\partial\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{x\sqrt{1-x^2}}$.

34) $\partial \frac{1}{a} \ln \frac{x}{\sqrt{a + cx^2}} = \frac{1}{x(a + cx^2)}.$

35) $\partial \frac{1}{2\sqrt{ac}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{c}}{\sqrt{a} - x\sqrt{c}} = \frac{1}{a - cx^2}.$

36) $\partial(\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sec} x) = \operatorname{Sin} x \operatorname{Tg} x^2.$

37) $\partial \frac{x - \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x + 2 \operatorname{Sin} x^3 \operatorname{Cos} x}{8} = \operatorname{Sin} x^2 \operatorname{Cos} x^2.$

38) $\partial\left(\frac{\operatorname{Sin} x}{8} - \frac{\operatorname{Sin} 3x}{48} - \frac{\operatorname{Sin} 5x}{80}\right) = \operatorname{Sin} x^2 \operatorname{Cos}^3.$

39) $\partial(-\tfrac{1}{3}\operatorname{Sec} x \operatorname{Cosec} x^3 - \tfrac{8}{3}\operatorname{Cotg} 2x) = \operatorname{Sec} x^2 \operatorname{Cosec} x^4.$

40) $\partial(x - \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x) = 2 \operatorname{Sin} x^2.$

41) $\partial \frac{2 + 3 \operatorname{Cos} 2x^2}{30} \operatorname{Sin} 2x^3 = \operatorname{Sin} 2x^2 \operatorname{Cos} 2x^3.$

42) $\partial \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{Sin} x}{1 - \operatorname{Sin} x}} = \operatorname{Sec} x.$

43) $\partial \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{a + b} + \sqrt{b - a} \operatorname{Tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{a + b} - \sqrt{b - a} \operatorname{Tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{a + b \operatorname{Cos} x}.$

44) $\partial \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^2) = \frac{x}{1 + x^4}.$

45) $\partial \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \cos(1 - x) = \frac{1}{\sqrt{2x(2 - x)}}.$

46) $\partial \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1 + x + x^2}.$

47) $\partial \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{\tfrac{3}{2}} \operatorname{tg} x) = \frac{1}{2 + \operatorname{Sin} x^2}.$

48) $\partial \frac{1}{4b}\left[\ln \frac{1 + bx}{1 - bx} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} bx\right] = \frac{1}{1 - b^4 x^4}.$

49) $\partial \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc} \sin \frac{2cx - b}{\sqrt{4ac + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a + bx - cx^2}}.$

50) $\partial \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln \frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{\sqrt{1 + x^4}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}\right] = \frac{1}{1 + x^4}.$

51) $\partial\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]=\frac{1}{1+x^3}.$

52) $\partial[\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{1+x}+\frac{3}{4}(x-3)\sqrt[3]{1+x}+\frac{6}{7}(x-6)\sqrt[6]{1+x}$

$$-6\ln(\sqrt[6]{1+x}-1)]=\frac{x-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}.$$

53) $\partial\ln(\ln x)=\frac{1}{x\ln x}.$

54) $\partial\ln(\operatorname{Sin} x)=\operatorname{Cotg} x.$

55) $\partial\operatorname{Sin}(\ln x)=\frac{\operatorname{Cos}(\ln x)}{x}.$

56) $\partial x^x=x^x(1+\ln x).$

Nach §. 225, indem man $x^x = f_{\phi,\psi}$ setzt, den Dignand x als ϕ, den Exponenten x als ψ betrachtend.

57) $\partial\ln x^{\ln x}=\ln x^{\ln x}\frac{1+\ln(\ln x)}{x}.$

58) $\partial f_x{}^{\phi^x}=f_x{}^{\phi^x}\left[\frac{\phi_x}{f_x}\partial f_x+\ln f_x\cdot\partial\phi_x\right].$

---

59) Es sei $y^2-2axy+x^2=b$, dann ist

$$\partial y_x=\frac{ay-x}{y-ax}.$$

Man bilde $f_{x,y}=y^2-2axy+x^2-b=0$, betrachte y als Funktion von x und wende §. 236 an.

60) $a\operatorname{Sin} y+b\operatorname{Cos} x-c=0$

$$\partial y_x=\frac{b\operatorname{Sin} x}{a\operatorname{Cos} y}=\frac{b\operatorname{Sin} x}{\sqrt{a^2-(c-b\operatorname{Cos} x)^2}}.$$

Der erste Ausdruck ergiebt sich nach §. 236. Aus der gegebenen Gleichung folgt $\operatorname{Sin} y=\frac{c-b\operatorname{Cos} x}{a}$, und wenn man hiernach $\operatorname{Cos} y$ herstellt, und den Werth in dem ersten Ausdruck substituirt, geht der zweite hervor, welcher ∂y_x

ist, bloß als Funktion von x. — Der zweite Ausdruck entsteht auch, wenn man aus der gegebenen Gleichung

$$y = \arcsin\frac{c - b\cos x}{a}$$

folgert, und dann nach x die Ableitung bildet.

61) $\frac{x}{y} = \frac{\ln y}{\ln x}$

$\partial y_x = \frac{1 + \ln x}{1 + \ln y}.$

62) $y = \ln x$

$dx_y = x = e^y.$

63) $y = \ln(1 + x^2) + \operatorname{arc\,tg} x$

$\partial x_y = \frac{1 + x^2}{1 + 2x}.$

64) $y = \sin z \cos z$

$x = \sin z - \cos z$

$\partial y_x = \cos z - \sin z.$

Man bildet zuerst ∂y_z und ∂x_z, und hat alsdann $\frac{\partial y_z}{\partial x_z} = \partial x_z$.

65) $y = \sin z - z\cos z$

$x = z\sin z + \cos z$

$\partial y_x = \operatorname{tg} z.$

66) $y = r - r\cos\frac{z}{r}$

$x = z - r\sin\frac{z}{r}$

$\partial y_x = \operatorname{Cotg}\frac{z}{2r}$

$\partial^2 y_x = -\frac{1}{4r\sin\frac{z}{2r}^4}.$

---

67) $d\sin x = \cos x \cdot dx$

$d^2\sin x = -\sin x \cdot dx^2.$

68) $dxy = xdy + ydx.$

69) $d \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$

70) $d\sqrt{x}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}dx + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}dy$

$$d^2\sqrt{x}\sqrt[3]{y} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}dx^2 + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}dxdy - \frac{2}{9}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}dy^2$$

$$d^3\sqrt{x}\sqrt[3]{y} = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{3}}dx^3 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{2}{3}}dx^2dy - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}dxdy^2 + \frac{10}{27}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{8}{3}}dy^3.$$

---

71) $\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \ldots.$

$$\arccos x = \frac{1}{2}\pi - x - \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 - \ldots.$$

Die Reihen ergeben sich durch Maclaurins Satz. Ein anderer Weg ist folgender. Man setze

$$\arcsin x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots.$$

(die Reihe kann nicht ein Glied ohne x enthalten, da sie für $x = 0$ verschwinden muß) und nehme die Ableitung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots.$$

Es ist aber $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, und nach dem binomischen Satz

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \ldots.$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten liefert jetzt die Werthe von A, B, C, D .... — Will man die zweite Reihe in dieser Weise herleiten, so ist anzusetzen

$$\arccos x = \frac{1}{2}\pi + Ax + Bx^2 + \ldots.$$

weil $\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$ ist.

Anhang.

Bestimmung der Differentiale der Grundfunktionen ohne Benutzung der Reihen.

I.

Nach §. 135 ist

$$\lim(1+p)^{\frac{1}{p}} = e$$

für $p = 0$; und dies läßt sich aus dem binomischen Satz entnehmen, wenn derselbe bloß für positive ganze Exponenten erwiesen ist.

II.

Es ist

$$\lim(1-q)^{-\frac{1}{q}} = \lim(1+p)^{\frac{1}{p}} = e$$

für $p = q = 0$.

Man setze

$$1 - q = \frac{1}{1+z}$$

und es folgt

$$\lim(1-q)^{-\frac{1}{q}} = \lim(1+z)^{\frac{1}{z}}(1+z)$$

für $q = 0$ und $z = 0$, und daraus erhellet die Behauptung.

III.

Es ist

$$\ln(1 \pm \alpha) = \pm \alpha$$

wenn α unendlich klein ist.

Ergiebt sich sofort aus II.

IV.

Es ist

$$\partial x^n = n x^{n-1}.$$

Man hat

$$\frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} = \frac{\left(1+\frac{dx}{x}\right)^n - 1}{\frac{dx}{x}} x^{n-1}$$

oder, wenn man, je nachdem n positiv oder negativ ist,

$$\left(1+\frac{dx}{x}\right)^n = 1 \pm \alpha$$

setzt, wobei α unendlich klein ist

$$\frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} = \frac{\pm\alpha}{\frac{dx}{x}} x^{n-1}.$$

Es folgt aber

$$n \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \ln(1 \pm \alpha)$$

oder, wegen III

$$n\frac{dx}{x} = \pm\alpha$$

$$\frac{\pm\alpha}{\frac{dx}{x}} = n$$

also, wenn man substituirt, für jedes reelle n

$$\partial x^n = nx^{n-1}.$$

V.

Es ist

$$\partial \ln x = \frac{1}{x}.$$

Man hat

$$\frac{\ln(x+dx) - \ln x}{dx} = \frac{\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right)}{dx}$$

$$= \frac{\frac{dx}{x}}{dx}$$

$$= \frac{1}{x}.$$

VI.

Es ist

$$\partial a^x = a^x \ln a.$$

Man hat

$$\frac{a^{x+dx} - a^x}{dx} = \frac{a^{dx} - 1}{dx} a^x$$

oder $$a^{dx} = 1 + \alpha$$

setzend, wobei α unendlich klein ist

$$\frac{a^{x+dx} - a^x}{dx} = \frac{\alpha}{dx} a^x.$$

Nun folgt

$$dx \ln a = \ln(1 + \alpha) = \alpha$$

also $$\frac{\alpha}{dx} = \ln a$$

und wenn man diesen Werth substituirt entsteht die Behauptung.

VII.

Es ist

$$\partial \mathrm{Sin}\, x = \mathrm{Cos}\, x.$$

Man hat

$$\frac{\mathrm{Sin}(x + dx) - \mathrm{Sin}\, x}{dx} = \frac{\mathrm{Cos}\left(x + \frac{dx}{2}\right)\mathrm{Sin}\frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}}$$

oder da $\mathrm{Sin}\frac{dx}{2} = \frac{dx}{2}$

$$\partial \mathrm{Sin}\, x = \mathrm{Cos}\, x.$$

Eben so ergiebt sich $\partial \mathrm{Cos}\, x = - \mathrm{Sin}\, x.$

VIII.

Stellt man hierauf die Gesetze für die mittelbaren Funktionen auf, so lassen sich aus diesen leicht die Gesetze

$$\partial(f_x \pm \phi_x) = \partial f_x \pm \partial \phi_x$$
$$\partial(f_x \phi_x) = f_x \partial \phi_x + \phi_x \partial f_x$$
$$\partial \frac{f_x}{\phi_x} = \frac{\phi_x \partial f_x - f_x \partial \phi_x}{\phi_x{}^2}$$

entnehmen.

Elftes Kapitel.

Vom Gang der Funktionen und von den größten und kleinsten Werthen.

§. 270.

Die Untersuchungen des gegenwärtigen Kapitels beziehen sich lediglich auf reelle Werthe.

§. 271.

Wir haben bisher die reellen Werthe dergestalt geordnet und vorgestellt, daß sie mit $-\infty$ beginnen, stets um dx wachsend fortschreiten, und endigen mit $+\infty$.

Jeder einzelne Werth kommt zunächst an und für sich in Betracht; wird hier aber auch angesehen werden als Uebergangswerth zwischen dem ihm vorangehenden Werth und dem ihm folgenden, sobald die Werthreihe oder ein Theil derselben von einem Urveränderlichen x durchlaufen wird, oder von einem Abhängigveränderlichen f_x.

Der Werth Null hat als Uebergangswerth ein besonderes Gewicht, weil er den Uebergang zwischen den negativen Werthen und den positiven ausmacht.

§. 272.

Man betrachte die Funktion

$$\frac{1}{x}$$

während x die Werthe

$$-\infty, \; -\ldots -dx, \; 0, \; +dx, \; +\ldots+\infty$$

durchläuft. Die Funktion durchläuft dabei zuerst alle negativen Werthe von 0 bis $-\infty$, springt über in $+\infty$ und geht dann durch die positiven Werthe fallend weiter bis 0.

Diese Erscheinung, welche bei vielen anderen Gelegenheiten sich wiederholt, führt darauf, die oben erwähnte Anordnung nicht

§. 276.

Es sei f eine Funktion von x. Ist bei dem besonderen Werth x′ von x

$$f_{x'-dx} < f_{x'} < f_{x'+dx}$$

so sagen wir, die Funktion f sei bei dem Werth x′ von x im Steigen; ist dagegen

$$f_{x'-dx} > f_{x'} > f_{x'+dx}$$

so sagen wir die Funktion sei bei dem Werth x′ im Fallen.

Ist bei dem besonderen Werth x′ von x

$$f_{x'-dx} < f_{x'} > f_{x'+dx}$$

so heißt der Werth $f_{x'}$ ein größter Werth, ein Maximum der Funktion; und ist

$$f_{x'-dx} > f_{x'} < f_{x'+dx}$$

so wird $f_{x'}$ ein kleinster Werth, ein Minimum der Funktion genannt.

§. 277.

Eine Funktion f_x befindet sich bei dem Werthe x′ von x im Steigen oder im Fallen, je nachdem ihre Ableitung ∂f_x für den Werth x′ von x einen positiven Werth erhält oder einen negativen.

Es sei zuerst

$$\partial f_{x'} > 0$$

dann ist

$$f_{x'+dx} = f_{x'} + \partial f_{x'} dx$$
$$f_{x'-dx} = f_{x'} - \partial f_{x'} dx$$

also

$$f_{x'-dx} < f_{x'} < f_{x'+dx}.$$

Ist dagegen

$$\partial f_{x'} < 0$$

so hat man

$$f_{x'+dx} = f_{x'} - \partial f_{x'} dx$$
$$f_{x'-dx} = f_{x'} + \partial f_{x'} dx$$

folglich

$$f_{x'-dx} > f_{x'} > f_{x'+dx}.$$

Es erhellet demnach der Satz.

§. 278.

Ist die Ableitung ∂f_x einer Funktion f_x positiv für alle Werthe von x von a bis b, so steigt die Funktion fortdauernd, während x von a bis b fortschreitet, d. h. sie geht im Zahlenkreise in steigender Richtung fort.

Ist dagegen die Ableitung negativ für alle Werthe von x von a bis b, so befindet sich die Funktion im Fallen, während x von a bis b fortschreitet, sie bewegt sich im Zahlenkreise in fallender Richtung.

Bei solchem Fortschreiten kann die Funktion einerlei Vorzeichen behalten, oder es wechseln indem sie durch 0 oder durch ∞ geht.

§. 279.

Behält die Ableitung ∂f_x einer Funktion f_x, während x innerhalb beliebiger Gränzen fortschreitet, nicht einerlei Vorzeichen, sondern geht sie aus dem Positiven ins Negative über, oder aus dem Negativen ins Positive, so wechselt die Funktion die Richtung ihres Fortschritts im Zahlenkreise, und geht beziehlich aus dem Steigen ins Fallen über, oder aus dem Fallen ins Steigen. Und wechselt die Ableitung mehrmals ihr Vorzeichen, so wechselt die Funktion eben so oft die Richtung ihres Ganges.

§. 280.

Steigt eine Funktion f_x bis zu irgend einem Werthe g, der positiv oder negativ, Null oder Unendlich sein kann, und fällt darauf von g ab, so ist dieser Werth g ein Maximum der Funktion. Fällt die Funktion dagegen bis zu irgend einem Werth k, der positiv oder negativ, Null oder Unendlich sein mag, und steigt sie darauf von k ab, so ist k ein Minimum.

Eine Funktion kann mehrmals die Richtung ihres Ganges wechseln, daher auch mehrere größte oder kleinste Werthe erhalten.

§. 281.

Ist G ein größter Werth der Funktion f_x, und erhält f_x keinen größeren Werth, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ fort-

schreitet, so nennen wir G das absolute Maximum der Funktion. Und ist K ein kleinster Werth der Funktion f_x, und nimmt sie nicht einen noch kleineren Werth an während des gedachten Ganges von x, so heiße K das absolute Minimum der Funktion.

§. 282.

Jeder Werth aus dem Zahlenkreise, den eine in ihm sich bewegende Funktion annimmt, ist entweder Uebergangswerth, oder größter oder kleinster Werth der Funktion, oder Gränzwerth.

Die Funktion $a + bx$ z. B. bewegt sich von $\mp \infty$ bis $\pm \infty$, je nachdem b positiv ist oder negativ, und es sind $\mp \infty$ $\pm \infty$ ihre Gränzwerthe.

Ist der Werth Null Maximum einer Funktion, so steigt sie aus dem Negativen in Null, und tritt dann fallend ins Negative zurück; ist Null Minimum einer Funktion, so fällt sie aus dem Positiven in Null, und tritt dann steigend zurück ins Positive.

Ist der Werth $+\infty$ Maximum einer Funktion, so steigt sie im Positiven bis $+\infty$, und fällt darauf ins endliche Positive zurück; ist $-\infty$ Minimum, so fällt sie im Negativen bis $-\infty$, und steigt darauf zurück ins Negativ-Endliche.

§. 283.

Der Uebersicht und Kürze wegen werden wir fortab öfter schreiben

$$f_{x'} = +$$

u. dergl. m., um anzudeuten, die Funktion f_x erhalte für den besonderen Werth x′ von x einen positiven Werth, und

$$\partial f_{x'} \ldots\ldots + 0 -$$

u. dergl. m. um auszudrücken die Funktion ∂f_x sei gleich Null für den Werth x′, während sie für die benachbarten Werthe $x' - dx$ und $x' + dx$ beziehlich etwas Positives und etwas Negatives ist.

§. 284.

1) Eine Funktion f_x ist ein Maximum für den besonderen Werth x′ von x, wenn

$$\partial f_{x'} \ldots\ldots + 0 -$$

oder wenn $\quad \partial f_{x'} \ldots\ldots + \infty -$

d. h. wenn die erste Ableitung der Funktion für den Werth x′ von x entweder Null ist oder unendlich, und dabei aus dem Positiven übergeht ins Negative.

Denn die Funktion f geht alsdann bei dem Werthe x′ von x aus dem Steigen über ins Fallen.

2) Eine Funktion f_x ist ein Minimum für den besonderen Werth x′ von x, wenn

$$\partial f_{x'} \ldots . - 0 +$$

oder wenn

$$\partial f_{x'} \ldots . - \infty +$$

d. h. wenn die erste Ableitung der Funktion für den Werth x′ von x entweder Null ist oder unendlich, und dabei aus dem Negativen ins Positive übergeht.

Denn die Funktion f geht alsdann bei dem Werthe x′ von x aus dem Fallen über ins Steigen.

§. 285.

1) Eine Funktion f_x ist ein Maximum für den besonderen Werth x′ von x, wenn

$$\partial f_{x'} = 0$$

und

$$\partial^2 f_{x'} = -$$

oder wenn

$$\partial f_{x'} = \infty$$

und

$$\partial^2 f_{x,} = +.$$

Im ersten Fall geht die erste Ableitung fallend durch Null, also aus dem Positiven über ins Negative; im anderen geht sie steigend durch ∞, also auch aus dem Positiven ins Negative. Es erhellet demnach das Gesetz aus dem vorigen Paragraphen.

2) Eine Funktion f_x ist ein Minimum für den besonderen Werth x′ von x, wenn

$$\partial f_{x'} = 0$$

und

$$\partial^2 f_{x'} = +$$

oder wenn

$$\partial f_{x'} = \infty$$

und

$$\partial^2 f_{x'} = -.$$

Im ersten Fall geht die erste Ableitung steigend durch 0, im anderen fallend durch ∞, in beiden Fällen also aus dem

Negativen ins Positive, und es erhellet die Behauptung aus dem vorigen Paragraphen.

§. 286.

Wenn für den Werth x' von x nicht bloß die erste Ableitung, sondern auch die zweite oder mehrere der folgenden in Null übergehen, so erfolgt die Beurtheilung der Sachlage nach Anleitung der folgenden Beispiele.

$$\begin{aligned} & f_{x'} \text{ steigt} \\ \partial f_{x'} &= 0 \ldots\ldots + 0 + \text{Min.} \\ \partial^2 f_{x'} &= 0 \ldots\ldots - 0 + \\ \partial^3 f_{x'} &= +. \end{aligned}$$

Da nämlich $\partial^3 f_{x'} = +$, so geht $\partial^2 f_{x'}$ steigend durch seinen Werth 0, demnach aus $-$ über $+$; deshalb ist $\partial f_{x'}$ Minimum bei seinem Werthe Null, und hat $+ 0 +$ nach §. 283; die Funktion endlich steigt nun bei $x' - dx$ und weiter bei $x' + dx$, schreitet also steigend im Zahlenkreise vor.

Aehnlich beurtheilt man die folgenden Fälle, indem man von unten nach oben vorgeht:

$$\begin{aligned} & f_{x'} \text{ fällt} \\ \partial f_{x'} &= 0 \ldots\ldots - 0 - \text{Max} \\ \partial^2 f_{x'} &= 0 \ldots\ldots + 0 - \\ \partial^3 f_{x'} &= - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_{x'} = \text{Min.} \\ \partial f_{x'} &= 0 \ldots\ldots - 0 + \\ \partial^2 f_{x'} &= 0 \ldots\ldots + 0 + \\ \partial^3 f_{x'} &= 0 \ldots\ldots - 0 + \\ \partial^4 f_{x'} &= + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_{x'} = \text{Max.} \\ \partial f_{x'} &= 0 \ldots\ldots + 0 - \\ \partial^2 f_{x'} &= 0 \ldots\ldots - 0 - \\ \partial^3 f_{x'} &= 0 \ldots\ldots + 0 - \\ \partial^4 f_{x'} &= - \end{aligned}$$

u. s. w.

§. 287.

Sind für den Werth x' von x die ersten $2n + 1$ Ableitungen gleich Null, und ist die nächst folgende $\mp$, so ist die Funktion beziehlich ein Minimum oder ein Maximum.

Sind die ersten $2n$ Ableitungen gleich Null und ist die nächst folgende $\pm$, so ist die Funktion beziehlich im Steigen oder im Fallen.

Erhellet nach dem vorigen Paragraphen.

§. 288.

Wenn für den Werth x' von x nicht bloß die erste Ableitung, sondern zugleich die zweite oder mehrere der folgenden Ableitungen unendlich werden, so erfolgt die Beurtheilung der Sachlage nach §. 285 indem man die Vorzeichen bestimmt, welche die erste Ableitung bei den Werthen $x' - dx$ und $x' + dx$ gewinnt; oder nach §. 276 indem man $f_{x' \mp dx}$ mit $f_{x'}$ zu vergleichen trachtet.

Ergeben sich bei der ersteren Weise die Vorzeichen der Ableitung nicht ungleich, so bedingt $+\infty+$ Steigen der Funktion, $-\infty-$ Fallen.

§. 289.

Auch vermittelst der Taylorschen Reihe lassen sich die erlangten Resultate im Ganzen genommen herleiten, wie folgt:

§. 290.

1) Eine Funktion f_x ist im Wachsthum oder im Abnehmen für den besonderen Werth x_I von x, je nachdem die erste Ableitung ∂f_x einen positiven oder einen negativen Werth annimmt, wenn x_I statt x in ihr gesetzt wird.

Ist ∂f_{x_I} positiv, so ist

$$f_{x_I + dx} = f_{x_I} + \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 + \ldots.$$

und

$$f_{x_I - dx} = f_{x_I} - \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 + \ldots.$$

Wenn nun, wie wir voraussetzen, keine der Ableitungen unendlich ist, so macht die Summe des zweiten Gliedes und aller folgenden der erstern Reihe etwas Positives aus, die Summe des zweiten Gliedes und aller ihm folgenden der unteren Reihe dagegen etwas Negatives. Folglich ist

$$f_{x_I - dx} < f_{x_I} < f_{x_I + dx}.$$

Ist ∂f_{x_I} negativ, so ist

$$f_{x_I + dx} = f_{x_I} - \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 + \ldots.$$

$$f_{x_I - dx} = f_{x_I} + \partial f_{x_I} dx + \ldots.$$

und es folgt

$$f_{x_I - dx} > f_{x_I} > f_{x_I + dx}.$$

2) Eine Funktion f_x ist ein Größtes oder ein Kleinstes für den besonderen Werth x_I von x, wenn ihre erste Ableitung in Null übergeht für den Werth x_I von x, nicht aber die zweite, und je nachdem diese zweite Ableitung einen negativen oder einen positiven Werth annimmt.

Es ist

$$f_{x_I + dx} = f_{x_I} + \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 + \frac{\partial^4 f_{x_I}}{3!} dx^3 + \ldots.$$

$$f_{x_I - dx} = f_{x_I} - \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 - \frac{\partial^3 f_{x_I}}{3!} dx^3 + \ldots.$$

Ist nun $\partial f_{x_I} = 0$, und $\partial^2 f_{x_I}$ etwas Negatives, so ist in beiden Reihen die Summe aller Glieder, welche dem ersten folgen, etwas Negatives, folglich

$$f_{x_I} > f_{x_I + dx}$$

zugleich $$f_{x_I} > f_{x_I - dx}$$

und f_{x_I} ein Maximum. Ist aber $\partial f_{x_I} = 0$, und $\partial^2 f_{x_I}$ positiv, so ist in beiden Reihen die Summe aller Glieder, welche dem ersten folgen, positiv, also

$$f_{x_I} < f_{x_I + dx}$$

zugleich $$f_{x_I} < f_{x_I - dx}$$

und f_{x_I} ein Minimum.

Geht sowohl die erste Ableitung ∂f_x als die zweite $\partial^2 f_x$ in Null über, für den Werth x_I, nimmt aber die dritte Ableitung $\partial^3 f_x$

einen positiven oder einen negativen Werth an, so ist die Funktion f_x im ersten Fall im Wachsthum, im anderen im Abnehmen für den Werth x_I von x. — Gehen die erste Ableitung, die zweite und die dritte in Null über, und nimmt die vierte einen negativen oder einen positiven Werth an, wenn x_I statt x gesetzt wird, so ist die Funktion beziehlich ein Maximum oder ein Minimum für den Werth x_I von x u. s. w., welches alles die Ansicht der Reihen darlegt.

§. 291.

Aufgabe. Es sei eine Funktion f_x von x gegeben, man soll entscheiden, ob die Funktion für besondere Werthe ihres Urveränderlichen ein Größtes oder ein Kleinstes werde, und, wenn das der Fall ist, diese besonderen Werthe bestimmen.

Auflösung. Die vorangegangenen Sätze leiten auf folgendes Verfahren:

1) Man bilde ∂f_x und $\partial^2 f_x$.

2) Man setze

$$\partial f_x = 0$$

betrachte x als unbekannt, und entwickele aus dieser Gleichung alle Werthe von x. Die Werthe, welche sich ergeben, seien durch x_I, x_{II}, x_{III} .... bezeichnet.

3) Man setze den einen dieser Werthe, x_I, statt x in $\partial^2 f_x$, und prüfe, ob $\partial^2 f_x$ dabei einen positiven oder einen negativen Werth annimmt, oder in Null übergeht. Nimmt $\partial^2 f_x$ einen positiven Werth an, so ist f_{x_I} ein Minimum; nimmt $\partial^2 f_x$ einen negativen Werth an, so ist f_{x_I} ein Maximum. Geht aber $\partial^2 f_x$ in Null über, so bilde man

4) die Ableitung $\partial^3 f_x$, setze in dieser x_I statt x, und prüfe, ob $\partial^3 f_x$ dadurch einen positiven oder einen negativen Werth erhält, oder in Null übergeht. Erhält $\partial^3 f_x$ einen positiven oder einen negativen Werth, so ist f_{x_I} beziehlich im Steigen oder im Fallen. Geht aber $\partial^3 f_x$ in Null über, so bilde man

5) $\partial^4 f_x$, setze in dieser Ableitung x_I statt x, und prüfe, ob $\partial^4 f_x$ dabei einen positiven oder einen negativen Werth annimmt, oder in Null übergeht. U. s. w. wie in 3).

6) Hat sich entschieden, daß f_{x_I} ein Maximum oder ein Minimum oder keins von beiden sei, so verfahre man mit jedem der Werthe x_{II}, x_{III} ...., wie man in 3), 4), 5) mit x_I verfahren ist.

7) Man untersuche endlich, ob Werthe von x bestehen, für welche die erste Ableitung unendlich wird, und untersuche ob für diese die Funktion einen größten oder kleinsten Werth erhält.

§. 292.

Es sei f eine Funktion der beiden Urveränderlichen x und y; und x_I und y_I seien zwei besondere Werthe von x und y. Ist

$$\partial f_{x_I} = 0, \quad \partial f_y = 0$$

und
$$(\partial^{1,1} f_{x_I, y_I})^2 - \partial^2 f_{x_I} \cdot \partial^2 f_{y_I} < 0$$

so ist die Funktion f für die Werthe x_I und y_I ein Größtes oder ein Kleinstes, je nachdem die Werthe

$$\partial^2 f_{x_I} \text{ und } \partial^2 f_{y_I}$$

beide negativ sind oder beide positiv.

Wir setzen $dx = zdy$. Damit dies aber die völlige Unabhängigkeit der Urvariabeln x und y nicht beeinträchtige, denken wir z nicht als einen bestimmten Werth, sondern unbestimmt, veränderlich.

Nach Taylors Satz ist dann

$$f_{x_I+dx,\, y_I+dy} = f_{x_I y_I} + (\partial f_{x_I} + \partial f_{y_I} \cdot z)dx + \tfrac{1}{2}(\partial^2 f_{x_I} + 2\partial^{1,1} f_{x_I, y_I} \cdot z + \partial^2 f_{y_I} \cdot z^2)dx^2 + \ldots.$$

und es leuchtet, wie bei den früheren Untersuchungen, ein, daß f_{x_I, y_I} ein Maximum oder ein Minimum ist, sobald

$$1) \quad \partial f_{x_I} + \partial f_{y_I} \cdot z = 0$$

und je nachdem

$$2) \quad \partial^2 f_{x_I} + 2\partial^{1,1} f_{x_I, y_I} \cdot z + \partial^2 f_y \cdot z^2$$

negativ ist oder positiv.

Die Gleichung 1) in Erfüllung zu bringen für das unbestimmte, veränderliche z, muß

$$\partial f_{x_I} = 0$$

sein und zugleich

$$\partial f_{y_I} = 0.$$

Es bleibt noch die Betrachtung des Ausdrucks unter 2) übrig, den wir der Kürze wegen durch

$$A + 2Bz + Cz^2$$

vorstellen wollen. Er soll negatig ausfallen oder positiv, also nicht gleich Null, für jeden Werth von z; und dies geht in Erfüllung, wenn die Gleichung

$$A + 2Bz + Cz^2 = 0$$

für z imaginaire Werthe liefert. Aus ihr entspringt

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}.$$

Dies ist imaginair, sobald

$$B^2 - AC < 0$$

und das geht nur in Erfüllung, wenn A und C beide positiv sind oder beide negativ.

Ist f ein Größtes oder Kleinstes für x_1 und y_1, so ist sie nothwendig auch ein solches für x_1 allein oder y_1 allein; daher entsprechen $A < 0$ und $C < 0$ dem Maximum der Funktion, $A > 0$, $B > 0$ dem Minimum.

Darin liegen die Bedingungen des Satzes.

Diese Bedingungen können auch allein nach der Ansicht entwickelt werden, daß die Funktion für jeden der Veränderlichen ein Maximum oder Minimum sein muß.

§. 293.

Man sagt eine Funktion sei stetig innerhalb der Gränzen a und b, wenn sie sich stets um unendlich Kleines ändert, während ihr Urveränderlicher von a bis b fortschreitet. Dazu ist erforderlich, daß ihre erste Ableitung nicht unendlich werde für einen der Werthe des Urveränderlichen von a bis b.

§. 294.

Ist die Funktion f_x stetig innerhalb der Gränzen a und b, so ist

$$f_b - f_a = \partial f_a dx + \partial f_{a+dx} dx + \partial f_{a+2dx} dx + \ldots + \partial f_{b-dx} dx$$

oder: insofern im letzten Gliede dx gegen b verschwindet,

$$f_b - f_a = df_a dx + \partial f_{a+dx} dx + \partial f_{a+2dx} dx + \partial f_{a+3dx} dx + \ldots + \partial f_b dx.$$

Es ist nämlich

$$f_b - f_a = f_{a+dx} - f_a + f_{a+2dx} - f_{a+dx} + f_{a+3dx} - f_{a+2dx} + \ldots \\ + f_b - f_{b-dx}$$

denn zur Rechten heben sich alle Glieder bis auf $-f_a$ und f_b.

Daraus folgt

$$f_b - f_a = \frac{f_{a+dx} - f_a}{dx}dx + \frac{f_{a+2dx} - f_{a+dx}}{dx}dx + \ldots \\ + \frac{f_b - f_{b-dx}}{dx}dx$$

und das ist das Gesetz.

Die Werthe ∂f_a, ∂f_{a+dx}, ... werden übrigens erhalten, indem man ∂f_x bildet, und darin statt x die Werthe a, a + dx ... setzt.

Wir finden uns zu der Bemerkung veranlaßt, daß die Differenz $f_b - f_a$ immer besteht, die Funktion f mag innerhalb der Gränzen a und b stetig sein oder nicht; aber sie kann durch die rechts stehende Summe nur ausgedrückt werden, wenn die Funktion stetig ist.

§. 295.

Schließlich wollen wir die Funktionen

$$ax + b$$
$$ax^2 + bx + c$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + g$$

einer näheren Betrachtung unterwerfen, während der Urveränderliche x stetig wachsend alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

1) Es sei

$$f_x = ax + b$$

und es ist $\partial f_x = a$.

Es sei a positiv. Dann ist $-\infty$ der erste Werth der Funktion, $+\infty$ ihr letzter. Die erste Ableitung ist von x unabhängig, also stets positiv, nämlich $+a$. Die Funktion befindet sich daher bei allen Werthen von x im Wachsthum, und sie durchläuft stetig wachsend alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$. — Ist a negativ, so beginnt die Funktion mit $+\infty$, und endigt mit $-\infty$, und sie durchläuft, beständig abnehmend, ihre Werthe, da jetzt die Ab-

leitung negativ, die Funktion also fortdauernd im Abnehmen ist. — Die Funktion hat keinen größten oder kleinsten Werth, d. h. keinen, der größer ist als seine beiden benachbarten Werthe oder kleiner. Die Werthe $-\infty$ und $+\infty$ sind ihre Gränzwerthe.

Die Funktion ist Null für $x = -\frac{b}{a}$. Ist a positiv, so durchläuft die Funktion alle Werthe von $-\infty$ bis 0, während x von $-\infty$ bis $-\frac{b}{a}$ steigt, die Funktion wird Null für $x = -\frac{b}{a}$, und durchläuft dann weiter alle Werthe von 0 bis $+\infty$, während x von $-\frac{b}{a}$ bis $+\infty$ zunimmt. Ist a dagegen negativ, so durchläuft die Funktion die Werthe von $+\infty$ bis 0, und weiter von 0 bis $-\infty$, während x beziehlich von $-\infty$ bis $+\frac{b}{a}$, und weiter von $+\frac{b}{a}$ bis $+\infty$ anwächst.

2) Es sei

$$f_x = ax^2 + bx + c$$

dann ist

$$\partial f_x = 2ax + b$$

$$\partial^2 f_x = 2a.$$

Die Funktion hat, wenn x unendlich groß ist, einerlei Vorzeichen mit ihrem ersten Gliede; denn zunächst verschwindet c gegen die anderen Glieder, und weiter ist $ax^2 + bx = x(ax + b)$, und wenn x unendlich groß ist, so verschwindet b gegen ax.

Es sei a positiv. Dann beginnt die Funktion mit $+\infty$, und endigt mit demselben Werth. Nach der vorigen Nummer geht, während x die Werthe

$$-\infty \ldots\ldots -\frac{b}{2a} \ldots\ldots +\infty$$

durchläuft, die erste Ableitung beziehlich durch die Werthe

$$-\infty \ldots\ldots \quad 0 \quad \ldots\ldots +\infty.$$

Die zweite Ableitung ist positiv. Für den Werth $-\frac{b}{2a}$ von x ist die erste Ableitung 0, die zweite positiv, die Funktion also ein

Minimum. Und während x von $-\infty$ bis $-\frac{b}{2a}$ fortschreitet, und weiter bis $+\infty$, nimmt die Funktion fortdauernd ab von $+\infty$ bis zu ihrem Minimum, und steigt dann wiederum fortdauernd bis $+\infty$. — Ist a dagegen negativ, so ist die Funktion für $x = +\frac{b}{2a}$ ein Maximum. Die Funktion steigt alsdann von $-\infty$ bis zu ihrem Maximum und fällt darauf bis $-\infty$, während x beziehlich von $-\infty$ bis $+\frac{b}{2a}$ und weiter bis $+\infty$ zunimmt. — Im ersten Fall ist das Minimum zugleich das absolute Minimum, im anderen das Maximum absolutes Maximum. Die Werthe $+\infty$ und $-\infty$ sind Gränzwerthe.

Hat die Funktion $ax^2 + bx + c$ ein Minimum, und ist dies Minimum positiv oder Null, so ist die Funktion für alle Werthe von x positiv; im ersten Fall nimmt die Funktion den Werth Null nicht an, im anderen erhält sie ihn einmal, nämlich wenn sie das Minimum erreicht. Hat die Funktion ein Minimum, und ist das Minimum negativ, so fällt die Funktion von $+\infty$ durch Null gehend bis zu dem negativen Minimum, und steigt darauf, abermals durch Null gehend, bis $+\infty$; sie nimmt dann also für zwei verschiedene Werthe von x den Werth Null an. — Hat die Funktion ein Maximum und ist das Maximum negativ oder Null, so ist die Funktion für alle Werthe von x negativ; im ersten Fall nimmt die Funktion den Werth Null nicht an, im anderen erreicht sie ihn einmal, nämlich im Maximum. Hat die Funktion ein Maximum, und ist das Maximum positiv, so geht die Funktion zweimal durch Null.

3) Es sei

$$f_x = ax^3 + bx^2 + cx + g$$

dann ist

$$\partial f_x = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Es sei a positiv. Die Funktion beginnt dann mit $-\infty$ und endigt mit $+\infty$. Die Ableitung ist die zuvor betrachtete Funktion. Ist ∂f_x stets positiv, so steigt f_x von $-\infty$ dauernd bis $+\infty$. Hat ∂f_x ein Minimum, das an sich negativ ist, so

bewegt sich ∂f_x zuerst in positiven Werthen dann in negativen, zuletzt wiederum in positiven. Die Funktion wird dann also zuerst steigen, dann fallen, dann wiederum dauernd steigen. Dabei gewinnt sie ein Maximum und ein Minimum; aber keins derselben ist absolut. U. s. w.

Uebungen und Praktisches.

§. 296.

1) Was heißt es, eine Funktion f_x sei bei einem Werth x_1 von x im Wachsthum, im Abnehmen, oder ein Größtes, oder ein Kleinstes? Wenn eine Funktion f_x für den Werth a von x ein Größtes ist, kann sie dann für andere Werthe von x noch größer sein, oder kann sie kleiner sein als f_b, während sie ein kleinstes ist für den Werth b von x? Was verstehen wir unter dem absoluten Maximum oder Minimum einer Funktion? Für welche Werthe von x steht eine Funktion f_x im Wachsthum, im Abnehmen, ist sie ein Größtes, ein Kleinstes? Wann ist $f_{x,y}$ ein Größtes oder ein Kleinstes?

---

2) Welchen Gang nimmt die Funktion $2x^3 - 3x^2 - 36x$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ anwächst?

Die Funktion beginnt mit $-\infty$, wächst bis $+44$, nimmt darauf ab bis -81 und wächst von hier an bis $+\infty$.

Es ist nämlich

$$\partial f_x = 6x^2 - 6x - 36$$
$$\partial^2 f_x = 12x - 6.$$

Aus

$$6x^2 - 6x - 36 = 0$$

ergiebt sich $\quad x = 3$

und $\quad x = -2.$

Für den Werth 3 von x geht $\partial^2 f_x$ in $+30$ über, für

den Werth -2 von x geht $\partial^2 f_x$ über in -30. Daher ist die gegebene Funktion ein Maximum, wenn -2 statt x gesetzt wird, und ein Minimum, wenn man $+3$ setzt statt x; und die Substitution dieser Werthe liefert $+44$ als größten, -81 als kleinsten Werth der Funktion.

Während nun x die Werthe

$$-\infty \ldots\ldots\ldots -2 \ldots\ldots\ldots +3 \ldots\ldots\ldots +\infty$$

durchläuft, nimmt ∂f_x beziehlich den Gang

$$+\infty \ldots + \ldots 0 \ldots - \ldots 0 \ldots + \ldots\ldots +\infty$$

und nun erhellet, daß die Funktion geht, wie es angegeben ist.

3) Welchen Gang nimmt die Funktion $3x - 5x^2 + 2$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst?

Die Funktion beginnt mit $-\infty$, wächst bis $+2\frac{9}{20}$, und nimmt darauf ab bis $-\infty$. Hier ist also das relative Maximum $2\frac{9}{20}$ zugleich absolutes Maximum.

4) Welchen Gang nimmt die Funktion $12x - 6x^2 - 15x^3$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst?

Die Funktion beginnt mit $+\infty$, fällt bis $-\frac{56}{9}$, steigt darauf bis $+\frac{72}{25}$ und nimmt hierauf ab bis $-\infty$.

5) Welchen Gang nimmt die Funktion $\frac{x-1}{x^2+1}$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst?

Die Funktion beginnt mit 0, fällt bis $-\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$, steigt darauf bis $+\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$ und fällt hierauf bis 0.

Um zu finden, welchen Werth die Funktion für $x = \infty$ annimmt, setze man $\frac{1}{z}$ statt x, multiplicire Zähler und Nenner mit z^2 und setze dann $z = 0$. In dieser Weise läßt sich häufig der Werth einer Funktion für $x = \infty$ erkennen.

6) In der Geometrie, Mechanik u. s. w. werden oft größte oder kleinste Werthe gefordert. Darunter sind absolut größte oder

kleinste Werthe verstanden, die nicht unendlich sind. Unter unseren relativ größten oder kleinsten Werthen befinden sich jedesmal die endlichen absolut größten oder kleinsten Werthe, wenn solche bestehen, aber es ist nicht umgekehrt ein relativ größter oder kleinster Werth jedesmal zugleich absoluter. In solchen Fällen muß man sich daher besonders überzeugen, ob ein gefundenes relatives Maximum oder Minimum zugleich absolutes ist. Gewöhnlich entscheidet sich die Frage sehr einfach, indem man den geometrischen u. s. w. Gegenstand betrachtet, während die veränderliche Größe, von der er abhängt, alle ihre Werthe durchläuft; läßt diese Betrachtung Zweifel übrig, so muß man den Gang der Funktion untersuchen.

Als Beispiel werde der normale Cylinder bestimmt vom Inhalt a und der kleinsten Oberfläche.

Der Radius der Grundebene sei x, die Höhe y. Dann ist

$$1)\quad \pi x^2 y = a$$

und die Oberfläche drückt sich aus durch

$$2\pi x^2 + 2\pi xy$$

oder, wenn wir für πxy den Werth aus 1) setzen, durch

$$2\pi x^2 + 2\frac{a}{x}.$$

Dieser Ausdruck sei, da der Faktor 2 gemeinschaftlich ist, durch $2f_x$ bezeichnet.

Betrachten wir den Gegenstand zunächst rein analytisch, so kommt es darauf an, zu entscheiden, ob und für welchen Werth von x die Funktion

$$f_x = \pi x^2 + \frac{a}{x}$$

einen endlichen absolut kleinsten Werth annehme. Es ist

$$\partial f_x = 2\pi x - \frac{a}{x^2}$$

$$\partial^2 f_x = 2\pi + \frac{2a}{x^3}.$$

Aus $$2\pi x - \frac{a}{x^2} = 0$$

folgt $$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}.$$

Die zweite Ableitung ist für diesen Werth von x positiv, also die Funktion ein Minimum. — Während nun x die Werthe von $-\infty$ bis negativ Unendlichklein durchläuft, dann den Werth 0 annimmt und steigt bis $+\infty$, durchläuft die Funktion alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$, springt dann, für $x = 0$, über in $+\infty$, nimmt ab bis auf ihr Minimum und steigt darauf bis $+\infty$. Bei dieser Betrachtung ist das Minimum kein absolutes, denn die Funktion durchläuft bei den negativen Werthen von x auch alle Werthe, welche kleiner sind als das Minimum.

Gehen wir aber auf die geometrische Aufgabe zurück, so kommen allein die positiven Werthe von x in Betracht, und während x von 0 bis $+\infty$ anwächst, durchläuft die Funktion stets abnehmend alle Werthe von $+\infty$ bis zu ihrem Minimum, und von da ab fortdauernd zunehmend alle Werthe bis $+\infty$. Das Minimum ist also in Bezug auf die Aufgabe ein absolutes, und der durch jenen Werth von x bestimmte Cylinder hat unter allen vom Inhalt a die kleinste Oberfläche.

Nur der klareren Einsicht wegen ist die Funktion betrachtet worden, auch während x die negativen Werthe durchläuft. Die geometrische Aufgabe erfordert die Betrachtung der Funktion bloß während x von 0 bis $+\infty$ anwächst. In aller Kürze und am einfachsten kommt man zum Ziel, wenn man den Cylinder verfolgt, während der Radius x von unendlich klein zunimmt bis unendlich groß.

7) Ein Gefäß in der Form eines rechtwinkeligen Parallelepipedums, oben offen, soll den Inhalt a und die Höhe h erhalten; man soll die Abmessungen x und y der Grundebene so bestimmen, daß die Oberfläche des Gefäßes am kleinsten ausfalle.

Die Oberfläche des Gefäßes ist,

$$1)\quad xy + 2xh + 2yh.$$

Diese Funktion enthält nicht die Bedingung, daß der Inhalt des Gefäßes a sein soll. Wir nehmen daher die Gleichung zu Hilfe

$$2)\quad xyh = a$$

und eliminiren den Veränderlichen y. Dadurch entsteht

$$\frac{a}{h} + 2xh + 2\frac{a}{x}$$

eine Funktion, welche die Oberfläche unter der Bedingung ausdrückt, daß der Inhalt a sei, und welche nur den einen Urveränderlichen x enthält. Wir bezeichnen diese Funktion durch f_x; und es folgt

$$\partial f_x = 2h - \frac{2a}{x^2}.$$

Aus $$2h - \frac{2a}{x^2} = 0$$

ergiebt sich $$x = \sqrt{\frac{a}{h}}.$$

Aus 2) ist $$y = \frac{a}{hx}$$

oder, wenn wir für x den Werth setzen,

$$y = \sqrt{\frac{a}{h}}.$$

Es ist also $x = y$.

Die Oberfläche eines Gefäßes von der Form eines rechtwinkeligen Parallelepipedums, welches oben offen sein, den Inhalt a und die Höhe h erhalten soll, wird demnach am kleinsten, wenn man zur Grundebene ein Quadrat nimmt; und es erhält den Inhalt a, wenn die Seite dieses Quadrats gleich $\sqrt{\frac{a}{h}}$ genommen wird.

Daß die Oberfläche für $x = y = \sqrt{\frac{a}{h}}$ am kleinsten ausfalle, giebt sich bei der Betrachtung des Körpers kund.

Die zweite Ableitung $\partial^2 f_x$ ist übrigens

$$\frac{4a}{x^3}$$

und aus $\partial f_x = 0$ ergiebt sich $x = +\sqrt{\frac{a}{h}}$ und $x = -\sqrt{\frac{a}{h}}$.

Bei unserer stereometrischen Aufgabe ist nur der erste von diesen Werthen zulässig, und für ihn wird $\partial^2 f_x$ positiv, also f_x ein Minimum. — Wäre die analytische Aufgabe gestellt gewesen, die größten und kleinsten Werthe der oberen Funktion f_x zu ermitteln, so hätte der zweite Werth von x, nämlich $-\sqrt{\frac{a}{h}}$, eben so wohl beachtet werden müssen, und für ihn wird $\partial^2 f_x$ negativ, also f_x ein Maximum. Eben so wird dieser zweite Werth zu beachten sein bei irgend einer andern speziellen Aufgabe, die negative Werthe von x gestattet, und die auf die eben erwähnte analytische Aufgabe führt.

8) Ein Gefäß von der Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedums, und oben offen, soll den Inhalt a erhalten; man soll die Abmessungen desselben angeben, so, daß die Oberfläche des Gefäßes am kleinsten ausfalle.

Bei einer gegebenen Höhe h muß nach 7) zur Grundebene des Gefäßes ein Quadrat genommen werden, damit die Oberfläche am kleinsten ausfalle. Daher muß auch bei der im gegenwärtigen Fall zu bestimmenden Höhe y die Grundebene ein Quadrat sein. Die Seite der Grundebene sei durch x bezeichnet. Die Oberfläche drückt sich alsdann aus durch

$$x^2 + 4xy$$

und es ist

$$x^2 y = a.$$

Hieraus folgt

$$1)\quad y = \frac{a}{x^2}$$

und wenn wir diesen Werth oben substituiren, entsteht für die Oberfläche die Funktion

$$x^2 + 4\frac{a}{x}$$

welche f_x bezeichnen mag.

Nun ist $\partial f_x = 2x - 4\frac{a}{x^2}$.

Aus $2x - 4\frac{a}{x^2} = 0$

folgt $x = \sqrt[3]{2a}$.

Es ist nach 1)

$$y = \frac{a}{x^2}$$

oder wenn wir für x den Werth setzen,

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a}.$$

Ein Gefäß von der Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedums, und oben offen, hat also die geringste Oberfläche, wenn seine Grundebene ein Quadrat, und seine Höhe gleich der Hälfte von der Seite dieses Quadrates ist. Und ist die Seite der Grundebene gleich $\sqrt[3]{2a}$, so ist a der Inhalt des Gefäßes.

9) Die Oberfläche eines Gefäßes, welches die Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedums hat, und oben offen ist, soll b sein; wie müssen die Abmessungen desselben genommen werden, damit der Inhalt am größten ausfalle?

Bezeichnen x und y die Abmessungen der Grundebene, und ist z die Höhe, so ist $x = y = \sqrt{\frac{b}{3}}$ und $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{3}}$ zu nehmen. Die Resultate ergeben sich durch Untersuchungen, ähnlich denen in 7) und 8), oder auch unmittelbar aus 8); denn hat das Gefäß bei einem gegebenen Inhalt a die kleinste Oberfläche, so hat es bei dieser Oberfläche den größten Inhalt. Die Abmessungen des Gefäßes, welches bei der Oberfläche b den größten Inhalt hat, stehen daher

in demselben Verhältniß zu einander, in welchem die Abmessungen des Gefäßes stehen, welches die kleinste Oberfläche hat bei dem Inhalt a; und aus dem Verhältniß der Abmessungen ergeben sich leicht die Werthe von x, y, z.

10) Ein rechtwinkeliges Parallelepipedum soll den Inhalt a haben, wie sind seine Abmessungen zu nehmen, damit seine Oberfläche am kleinsten werde?

Es muß die Gestalt eines Würfels erhalten.

11) Ein Gefäß von der Form eines normalen Cylinders, und oben offen, soll den Inhalt a erhalten, der Boden soll die Stärke b haben, die Wand die Stärke c; wie müssen die Abmessungen genommen werden, damit das wenigste Material zu dem Gefäß erforderlich sei?

Der Halbmesser von den Grundebenen des innern hohlen Raumes sei x, die Höhe des hohlen Raumes sei y. Alsdann ist

$$1)\quad \pi x^2 y = a$$

und das Volumen des Materials drückt sich aus

$$2)\quad \pi(x+c)^2(y+b) - a.$$

Aus 1) werde y entwickelt, und der Werth, welcher sich ergiebt, in 2) substituirt; dadurch entsteht für das Volumen des Materials die Funktion

$$\pi(x+c)^2\left(\frac{a}{\pi x^2}+b\right) - a$$

welche f_x bezeichnen möge. Durch eine leichte Reduction ergiebt sich

$$f_x = \frac{a(x+c)^2}{x^2} + b\pi(x+c)^2 - a.$$

Hieraus folgt

$$\partial f_x = \frac{2ax^2(c+x) - 2ax(c+x)^2}{x^4} + 2b\pi(c+x)$$

$$= \frac{-2a(c+x)c}{x^3} + 2b\pi(c+x)$$

$$= \frac{2(b\pi x^3 - ac)(c+x)}{x^3}.$$

Aus $$\partial fx = 0$$

ergiebt sich $$x = \sqrt[3]{\frac{ac}{b\pi}}.$$

(Der andere Werth $x = -c$ ist im vorliegenden Fall nicht brauchbar.)

Aus 1) ist $$y = \frac{a}{\pi x^2}$$

und wenn wir statt x den Werth setzen, entsteht

$$y = \frac{b}{c}\sqrt[3]{\frac{ac}{b\pi}}.$$

Es verhält sich also $x:y = c:b$.

12) Ein normaler Kegel soll den Inhalt a erhalten, wie sind seine Abmessungen zu nehmen, damit seine Oberfläche am kleinsten ausfalle.

Der Radius der Grundebene sei x, die Höhe y. Alsdann ist

$$1)\quad \tfrac{1}{3}\pi x^2 y = a$$

und die Oberfläche drückt sich aus durch

$$2)\quad \pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Aus 1) folgt

$$3)\quad y = \frac{3a}{\pi x^2}.$$

Diesen Werth substituire man in 2); das liefert für die Oberfläche die Funktion

$$\pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + \frac{9a^2}{\pi^2 x^4}}$$

oder $$\pi x^2 + \frac{1}{x}\sqrt{\pi^2 x^6 + 9a^2}$$

welche f_x bezeichnen mag. Es ist

$$\partial f_x = 2\pi x + \frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}6x^5\pi^2}{\sqrt{\pi^2 x^6 + 9a^2}} - \frac{1}{x^2}\sqrt{\pi^2 x^6 + 9a^2}$$

$$= \frac{2\pi x^3\sqrt{\pi^2 x^6 + 9a^2} + 2\pi^2 x^6 - 9a^2}{x^2\sqrt{\pi^2 x^6 + 9a^2}}.$$

Aus
$$\partial f_x = 0$$
folgt
$$2\pi x^3\sqrt{\pi^2 x^6 + 9a^2} = 9a^2 - 2\pi^2 x^6$$
oder quadrirt
$$4\pi^4 x^{12} + 36a^2\pi^2 x^6 = 81a^4 - 36a^2\pi^2 x^6 + 4\pi^4 x^{12}$$
$$8\pi^2 x^6 = 9a^2$$
und hieraus $x = \sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3a}{\pi}}$.

Substituiren wir diesen Werth von x in 3), so entsteht
$$y = 2\sqrt[3]{\frac{3a}{\pi}}.$$
Es verhält sich demnach
$$x:y = 1:2\sqrt{2}.$$

Etwas bequemer löst sich diese Aufgabe, wenn man die Abmessungen des normalen Kegels sucht, welcher bei der gegebenen Oberfläche b den größten Inhalt darbietet.

Denn bezeichnet wieder x den Radius der Grundebene, y die Höhe, so ist
$$1)\quad \pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2} = b$$
und der Inhalt wird ausgedrückt durch
$$2)\quad \tfrac{1}{3}\pi x^2 y.$$
Aus 1) folgt
$$y = \sqrt{\left(\frac{b - \pi x^2}{\pi x}\right)^2 - x^2}$$
oder
$$3)\quad y = \frac{\sqrt{b^2 - 2b\pi x^2}}{\pi x}$$
und setzt man diesen Werth in 2) statt y, so ergiebt sich für den Inhalt die Funktion
$$\tfrac{1}{3}x\sqrt{b^2 - 2b\pi x^2}$$
oder
$$\tfrac{1}{3}\sqrt{b(bx^2 - 2\pi x^4)}.$$
Der letzte Ausdruck gewinnt offenbar seinen größten Werth, wenn der Ausdruck
$$bx^2 - 2\pi x^4$$

seinen größten Werth hat. Es ist

$$\partial(bx^2 - 2\pi x^4) = 2bx - 8\pi x^3.$$

Aus $2bx - 8\pi x^3 = 0$

folgt $$x = \sqrt{\frac{b}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{\pi}}.$$

Dieser Werth von x werde in 3) substituirt; das liefert

$$y = \sqrt{\frac{2b}{\pi}}.$$

Und es verhält sich wie oben

$$x:y = -\tfrac{1}{2}:\sqrt{2} = 1:2\sqrt{2}.$$

13) Es ist ein Kreis gegeben und ein Winkel α; man soll den Winkel α als Peripheriewinkel in den Kreis tragen, so, daß die Summe der Sehnen, welche von den Schenkeln abgeschnitten werden, ein Größtes oder ein Kleinstes sei.

Der Radius des Kreises sei r. Von der Spitze des Peripheriewinkels α werde ein Durchmesser gezogen, und angenommen, der Peripheriewinkel habe eine solche Lage, daß der Durchmesser innerhalb seiner Winkelebene falle. Der Winkel, welchen der Durchmesser mit dem einen Schenkel bildet, sei x, alsdann ist der Winkel, welchen der Durchmesser mit dem anderen Schenkel bildet, $\alpha - x$, die Sehne auf dem ersten Schenkel drückt sich aus durch $2r\mathrm{Cos}x$, die vom anderen durch $2r\mathrm{Cos}(\alpha - x)$ und die Summe der Sehnen ist

$$2r[\mathrm{Cos}x + \mathrm{Cos}(\alpha - x)].$$

Diese Funktion hat ihren größten oder kleinsten Werth, wenn der Faktor $\mathrm{Cos}x + \mathrm{Cos}(\alpha - x)$ seinen größten oder kleinsten Werth hat. Es sei $\mathrm{Cos}x + \mathrm{Cos}(\alpha - x)$ durch f_x bezeichnet. Dann ist

$$\partial f_x = -\mathrm{Sin}x + \mathrm{Sin}(\alpha - x)$$

$$\partial^2 f_x = -\mathrm{Cos}x - \mathrm{Cos}(\alpha - x).$$

Aus $\partial f_x = 0$

folgt $\mathrm{Sin}(\alpha - x) = \mathrm{Sin}x$

also $\alpha - x = x$

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Für $x = \frac{\alpha}{2}$ ist $\partial^2 f_x$ negativ, also die Funktion f_x und mit ihr die Summe der Sehnen ein Maximum.

14) Es ist ein Kreis gegeben und ein Winkel α; man soll den Winkel α als Peripheriewinkel in den Kreis tragen, so, daß das Produkt der Sehnen, welche von den Schenkeln abgeschnitten werden, ein Größtes oder Kleinstes sei.

Der Radius des Kreises sei r. Von der Spitze des Peripheriewinkels α werde wie in der vorigen Nummer ein Durchmesser gezogen, welcher mit dem einen Schenkel den Winkel x, mit dem anderen den Winkel $\alpha - x$ bilde. Das Produkt der Sehnen drückt sich alsdann aus durch

$$4r^2 \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos}(\alpha - x)$$
$$= 4r^2 f_x.$$

Es ist

$$\partial f_x = \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin}(\alpha - x) - \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}(\alpha - x)$$
$$= \operatorname{Sin}(\alpha - 2x)$$
$$\partial^2 f_x = -2\operatorname{Cos}(\alpha - 2x).$$

Aus $\operatorname{Sin}(\alpha - 2x) = 0$

folgt $\alpha - 2x = 0$

$$x = \frac{\alpha}{2}$$

und da für diesen Werth $\partial^2 f_x$ negativ ausfällt, so ist f_x und mit f_x das Produkt der Sehnen ein Maximum.

15) Es ist ein Kreis gegeben und ein Winkel α; man soll den Winkel α als Peripheriewinkel in den Kreis tragen, so, daß der innerhalb der Winkelebene von α liegende Theil des Kreises ein Größtes oder Kleinstes werde.

Der Halbmesser des Kreises sei r. Aus der Spitze des Peripheriewinkels α werde ein Durchmesser gezogen, und angenommen, er bilde mit dem einen Schenkel den Winkel x, mit dem andern den Winkel $\alpha - x$. Nach den nicht zusammenstoßenden Endpunkten der Sehnen ziehe man Radien. Der Winkel, welchen diese bilden, ist 2α. Der Theil des Kreises, welcher innerhalb der Winkelebene von α liegt, erscheint jetzt zerlegt in einen Kreisausschnitt, dessen Mittel-

punktswinkel 2α ist, und in zwei Dreiecke. Unter α Bogenmaaß für den Halbmesser 1 verstanden (wie hier jedesmal), ist der Inhalt des Kreisausschnitts gleich $r^2\alpha$; die Inhalte der beiden Dreiecke sind $r^2 \operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x$ und $r^2\operatorname{Sin}(\alpha-x)\operatorname{Cos}(\alpha-x)$. Der Inhalt des erwähnten Theiles vom Kreise ist daher

$$r^2[\alpha + \operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x + \operatorname{Sin}(\alpha - x)\operatorname{Cos}(\alpha - x)]$$
$$= \tfrac{1}{2}r^2[2\alpha + \operatorname{Sin}2x + \operatorname{Sin}(2\alpha - 2x)]$$
$$= \tfrac{1}{2}r^2 f_x.$$

Es ist

$$\partial f_x = 2\operatorname{Cos}2x - 2\operatorname{Cos}(2\alpha - 2x)$$
$$\partial^2 f_x = -4\operatorname{Sin}2x - 4\operatorname{Sin}(2\alpha - 2x).$$

Aus

$$\partial f_x = 0$$

folgt

$$\operatorname{Cos}2x = \operatorname{Cos}(2\alpha - 2x)$$
$$x = \alpha - x$$
$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

16) Die vier Seiten eines Vierecks sollen a, b, c, d sein, wie müssen die Winkel des Vierecks genommen werden, damit der Inhalt am größten ausfalle?

Der Winkel, welchen die Seiten a und b bilden, sei x, der x gegenüberliegende, also von c und d gebildete Winkel sei y; der Inhalt des Vierecks drückt sich alsdann aus durch

$$1)\quad \tfrac{1}{2}ab\operatorname{Sin}x + \tfrac{1}{2}cd\operatorname{Sin}y$$

und es sind die Werthe von x und y zu ermitteln, für welche diese Funktion ein Maximum ist. Um den einen Veränderlichen zu beseitigen, setzen wir die Gleichung an

$$a^2 + b^2 - 2ab\operatorname{Cos}x = c^2 + d^2 - 2cd\operatorname{Cos}y.$$

Aus ihr folgt

$$2)\quad 2cd\operatorname{Cos}y = c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\operatorname{Cos}x$$

und hieraus

$$\operatorname{Sin}y = \frac{1}{2cd}\sqrt{4c^2d^2 - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\operatorname{Cos}x)^2}.$$

Diesen Werth substituiren wir in 1) und erhalten für den Inhalt

$$\tfrac{1}{2}[ab\,\mathrm{Sin}\,x + \tfrac{1}{2}\sqrt{4c^2d^2 - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{Cos}\,x)^2}] = \tfrac{1}{2}f_x.$$

Nun ist

$$\partial f_x = ab\,\mathrm{Cos}\,x + \frac{ab(c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{Cos}\,x)\mathrm{Sin}\,x}{\sqrt{4c^2d^2 - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{Cos}\,x)^2}}$$

und bei dem Viereck, welches den größten Inhalt hat, ist dieser Ausdruck Null. Substituiren wir aus 2) den Werth von $c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{Cos}\,x$, so entsteht

$$ab\,\mathrm{Cos}\,x + \frac{ab \cdot 2cd\,\mathrm{Cos}\,y \cdot \mathrm{Sin}\,x}{\sqrt{4c^2d^2 - 4c^2d^2\,\mathrm{Cos}\,y^2}} = 0$$

oder $$ab\left(\mathrm{Cos}\,x + \frac{\mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Sin}\,y}\right) = 0$$

oder $$\frac{ab(\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,y + \mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Sin}\,x)}{\mathrm{Sin}\,y} = 0$$

daher ist $$\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,y + \mathrm{Cos}\,y\,\mathrm{Sin}\,x = 0$$

d. h. $$\mathrm{Sin}(x + y) = 0$$

also $$x + y = 180^{\circ}.$$

Und hieraus erhellet, daß das größte Viereck von allen, welche die Seiten a, b, c, d haben, dasjenige ist, welches in einem Kreise liegt.

Andere Entwickelung. Man setze

$$\alpha)\quad f_x = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Sin}\,x + \tfrac{1}{2}cd\,\mathrm{Sin}\,y$$

indem man y als Funktion von x betrachtet, implicit gegeben durch die Gleichung

$$\beta)\quad a^2 + b^2 - 2ab\,\mathrm{Cos}\,x - c^2 - d^2 + 2cd\,\mathrm{Cos}\,y = 0.$$

Aus β) folgt, nach x differenzirend,

$$-2cd\,\mathrm{Sin}\,y\,\partial y_x + 2ab\,\mathrm{Sin}\,x = 0$$

oder $$\gamma)\quad \partial y_x = \frac{ab\,\mathrm{Sin}\,x}{cd\,\mathrm{Sin}\,y}$$

aus α) $$\partial f_x = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Cos}\,x + \tfrac{1}{2}cd\,\mathrm{Cos}\,y\,\partial y_x$$

oder, den Werth nach γ) setzend,

$$\partial f_x = \tfrac{1}{2}ab\frac{\mathrm{Sin}(x + y)}{\mathrm{Sin}\,y}.$$

Diese Ableitung gleich Null gesetzt liefert wie zuvor

$$\mathrm{Sin}(x+y)=0.$$

17) Man denke einen Kreis und eine unendliche gerade Linie PQ. Der Radius des Kreises sei r, die Entfernung seines Mittelpunktes von der geraden Linie PQ sei a. Man denke eine zweite gerade Linie CD, welche den Kreis in den Punkten C und D schneidet und mit der Linie PQ parallel ist. Von den Punkten C und D denke man Normalen CP und DQ auf PQ gefällt. In welcher Entfernung vom Mittelpunkt muß die Linie CD gedacht werden, damit das Rechteck CDQP ein Maximum sei?

Die Entfernung ist $\frac{a \pm \sqrt{a^2+8r^2}}{4}$, und ist $a<r$, so gelten beide Vorzeichen, ist aber $a \gtreqqless r$ so gilt nur —.

18) Unter allen Kugelausschnitten von dem Inhalt a denjenigen zu bestimmen, dessen Oberfläche ein Kleinstes ist.

Der Halbmesser der Kugel sei x, die Höhe des Kugelausschnitts y; alsdann ist

$$1)\quad \tfrac{2}{3}\pi x^2 y = a$$

und die Oberfläche des Kugelausschnitts drückt sich aus durch

$$2)\quad 2\pi xy + \pi x\sqrt{2xy - y^2}.$$

Aus 1) folgt

$$3)\quad y = \frac{3a}{2\pi x^2}.$$

Dieser Werth werde in 2) substituirt; das liefert für die Oberfläche den Ausdruck

$$\frac{3a}{x} + \pi x\sqrt{\frac{3a}{\pi x} - \frac{9a^2}{4\pi^2 x^4}}$$

oder

$$\frac{6a + \sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}{2x}$$

welchen f_x bezeichnen mag.

Es ist nun

$$\partial f_x = \frac{2x \cdot \frac{1}{2} \cdot 36a\pi x^2}{4x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}} - \frac{12a + 2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}{4x^2}$$

$$= \frac{18a\pi x^3 - 6a\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2} - 12a\pi x^3 + 9a^2}{2x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}$$

oder

$$4)\quad \partial f_x = \frac{3a}{2} \cdot \frac{2\pi x^3 + 3a - 2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}{x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}.$$

Aus

$$\partial f_x = 0$$

folgt

$$2\pi x^3 + 3a = 2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}$$

oder, wenn man quadrirt,

$$4\pi^2 x^6 - 36a\pi x^3 + 45a^2 = 0$$

$$x^6 - \frac{9a}{\pi}x^3 + \frac{45a^2}{4\pi^2} = 0$$

und hieraus

$$x = \sqrt[3]{\frac{9a}{2\pi} \pm \sqrt{\frac{81a^2}{4\pi^2} - \frac{45a^2}{4\pi^2}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9a}{2\pi} \pm \frac{6a}{2\pi}}$$

also

$$5)\quad x = \sqrt[3]{\frac{15a}{2\pi}}$$

und

$$6)\quad x = \sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}}.$$

Zu dem ersten Werth erhält man aus 3)

$$7)\quad y = \frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}} = \frac{1}{5}x.$$

Zu dem zweiten Werthe von x

$$8)\quad y = \sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}} = x.$$

Um zu entscheiden, ob die Oberfläche des Kugelausschnitts für die zusammengehörigen Werthe von x und y ein Größtes oder ein Kleinstes sei, werde die zweite Ableitung gebildet. Den Zähler in 4)

$$2\pi x^3 + 3a - 2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}$$

bezeichne man durch z; alsdann ist

$$\partial^2 fx = \frac{3a}{2} \cdot \left[\frac{x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}\left(6\pi x^2 - \frac{36a\pi x^2}{\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}\right)}{x^4(12a\pi x^3 - 9a^2)} - \frac{z \cdot \partial(x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2})}{x^4(12a\pi x^3 - 9a^2)} \right].$$

Man bedarf dieser Ableitung nur für die Werthe von x unter 5) und 6). Für diese Werthe von x wird wegen der Gleichung $\partial f_x = 0$ der Ausdruck z zu Null, und mit ihm das Glied von ∂f_x, welches z enthält. Für die Werthe von x unter 5) und 6) ist daher

$$\partial^2 f_x = \frac{3a}{2} \cdot \frac{x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}\left(6\pi x^2 - \frac{36a\pi x^2}{\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}\right)}{x^4(12a\pi x^3 - 9a^2)}$$

$$= 3\pi \cdot \frac{\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2} - 6a}{4\pi x^3 - 3a}$$

und, wenn man hierin statt x den Werth $\sqrt[3]{\frac{15a}{2\pi}}$ setzt, entsteht $+\frac{\pi}{3}$, setzt man dagegen für x den Werth $\sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}}$, so entsteht -3π. Für den ersten Werth von x und den dazu gehörenden von y ist demnach die Oberfläche des Kugelausschnitts ein Minimum, für die zweiten zusammengehörenden Werthe dagegen ein Maximum. Bei den ersten zusammengehörigen Werthen verhält sich

$$x : y = 5 : 1$$

bei den zweiten $\quad x : y = 1 : 1$

bei den zweiten ist also der Kugelausschnitt eine Halbkugel.

19) Es ist ein normaler Kegel gegeben, der Radius der Grundebene sei r, die Höhe h; man soll aus dem Kegel den Cylinder vom größten Mantel, und den von der größten Oberfläche schneiden.

Der vom größten Mantel wird erhalten, wenn man seine Höhe gleich $\frac{1}{2}h$ nimmt, alsdann wird der Radius seiner Grundebene $\frac{1}{2}r$. Der von der größten Oberfläche geht hervor, wenn man seine Höhe gleich $\frac{1}{2}h\frac{h-2r}{h-r}$ nimmt, der Radius seiner Grundebene ist alsdann $\frac{1}{2}h\frac{r}{h-r}$.

20) Aus einer Kugel 1) den Cylinder vom größten Inhalt, 2) den vom größten Mantel, 3) den von der größten Oberfläche zu schneiden.

Bezeichnet r den Radius der Kugel, x den Radius von der Grundebene des Cylinders, y die Höhe desselben, so ist

1) $x = r\sqrt{\tfrac{2}{3}} \quad y = 2r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$

2) $x = r\sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad y = 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

3) $x = r\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{5}})} \quad y = 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{5}})}$.

Die zweite Ableitung wird hier für beide Werthe von x negativ, allein die erste wird nur für $x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ zu Null, wenn $\sqrt{r^2-x^2}$ positiv genommen wird, wie es nothwendig ist. Für $x = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ muß $\sqrt{r^2-x^2}$ in der Ableitung negativ genommen werden, um sie zu Null zu machen, und das entspricht nicht der Aufgabe.

21) Für welche Werthe von x wird die Funktion $f_x = b + \sqrt[3]{(2ax-x^2)^2}$ ein Maximum oder ein Minimum?

Es ist $$\partial f_x = \frac{4}{3}\cdot\frac{a-x}{\sqrt[3]{2ax-x^2}}$$

und $$\partial^2 f_x = -\frac{4}{3}\cdot\frac{2ax-x^2+\frac{2}{3}(a-x)^2}{(2ax-x^2)\sqrt[3]{(2ax-x^2)^2}}.$$

Aus $\quad \partial f_x = 0$

folgt $\quad a - x = 0$

$$x = a.$$

Für diesen Werth ist die zweite Ableitung negativ, also die gegebene Funktion ein Maximum.

Die erste Ableitung ∂f_x erhält die Form ∞, sowohl wenn x gleich 0, als auch, wenn x gleich 2a gesetzt wird.

Substituiren wir in der Ableitung für x die Werthe $0 \mp dx$, so entsteht

$$\tfrac{4}{3}\frac{a}{\sqrt[3]{\mp 2adx}} \text{ oder } \mp \tfrac{4}{3}\frac{a}{\sqrt[3]{2adx}}$$

das ist beziehlich $-\infty$ und $+\infty$. Dieselben Ausdrücke ergeben sich, wenn wir $2a \mp dx$ substituiren. In beiden Fällen ist also

$$\partial f_x \ldots . - \infty +$$

in beiden Fällen daher die Funktion ein Minimum.

Auf dem anderen Wege die Entscheidung zu treffen, vergleichen wir $f(0+h)$ und $f(0-h)$ mit $f0$, h unendlich klein angenommen. Es ist aber

$$f0 = b$$

$$f(0+h) = b + (2ah - h^2)^{\frac{2}{3}}$$

oder, wenn wir den binomischen Satz anwenden,

$$f(0+h) = b + (2a)^{\frac{2}{3}} \cdot h^{\frac{2}{3}} - \tfrac{2}{3}(2ah)^{\frac{2}{3}-1} h^2 + \ldots .$$

und

$$f(0-h) = b + [2a(-h) - h^2]^{\frac{2}{3}}$$

$$= b + (2a)^{\frac{2}{3}} h^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}(2ah)^{\frac{2}{3}-1} h^2 + \ldots .$$

und es erhellet, daß

$$f(0+h) > f0$$

und zugleich

$$f(0-h) > f0$$

also die gegebene Funktion ein Minimum ist für $x = 0$. Um zu entscheiden, ob die gegebene Funktion für $x = 2a$ ein Größtes oder Kleinstes sei, muß $f2a$ mit $f(2a+h)$

und $f(2a - h)$ verglichen werden, während h unendlich klein ist. Es ist aber

$$f2a = b$$

$$f(2a \pm h) = b + (\pm 2ah - h^2)^{\frac{2}{3}}$$
$$= b + (2a)^{\frac{2}{3}} h^{\frac{2}{3}} \mp \ldots$$

folglich

$$f(2a \pm h) > f2a$$

also die gegebene Funktion auch ein Minimum für $x = 2a$.

22) Es sei die Funktion $f_x = c + \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$ gegeben; für welche Werthe von x nimmt sie einen größten oder kleinsten Werth an?

Es ist

$$\partial f_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

und $$\partial^2 f_x = -\frac{ab}{(2ax - x^2)\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Aus $$\partial f_x = 0$$
folgt $$a - x = 0$$
oder $$x = a.$$

Für diesen Werth von x ist die zweite Ableitung negativ oder positiv, je nachdem die Wurzel in ihr positiv oder negativ genommen wird. Die gegebene Funktion ist daher für $x = a$ ein Minimum, wenn die Wurzel in ihr den negativen Werth vorstellt, und ein Maximum, wenn die Wurzel positiv zu nehmen ist.

Die erste Ableitung ∂f_x erhält die Form ∞, sobald x gleich 0 oder gleich 2a genommen wird.

Substituiren wir $0 \mp dx$ statt x in der Ableitung, so entsteht

$$\frac{b}{\sqrt{\pm 2adx}}$$

und $2a \mp dx$ liefert

$$\frac{-b}{\sqrt{\pm 2adx}}.$$

Im ersten Fall ist der Ausdruck $+\infty$ für $+dx$, und imaginair für $-dx$; im anderen ist der Ausdruck $-\infty$ für $+dx$, imaginair für $-dx$. Es findet daher kein größter oder kleinster Werth Statt, sondern ein Uebergang aus dem Reellen ins Imaginaire.

Auf dem anderen Wege zu verfahren, vergleichen wir $f0$ mit $f(0 \pm h)$, und $f2a$ mit $f(2a \pm h)$, unter h unendlich Kleines verstanden. Es ist

$$f0 = c$$

$$f(0 \pm h) = c + \frac{b}{a}\sqrt{2a(\pm h) - h^2} = c + \frac{b}{a}[2a(\pm h) - h^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= c + \frac{b}{a}\left[(2a)^{\frac{1}{2}} \cdot (\pm h)^{\frac{1}{2}} - \ldots\right]$$

$$= c + \frac{b}{a}\left[(2a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pm h} - \ldots\right].$$

Es ist also $f(0-h)$ imaginair. $f0$ kann daher mit dem nächsten Werthe $f(0-h)$ nicht verglichen werden, und ist deshalb weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Eben so findet sich, daß $f2a$ keine Vergleichung mit $f(2a+h)$ gestattet. Die Werthe $f0$ und $f2a$ sind Gränzwerthe, insofern die Funktion für Werthe von x, welche kleiner sind als 0, oder größer als $2a$, imaginair ist.

23) Eine Zahl a in drei Theile zu theilen, so, daß deren Produkt ein Größtes sei.

Jeder der Theile ist $\frac{1}{3}a$.

Zwei der Theile seien x und y, dann ist der dritte $a - x - y$; und es soll

$$f_{x,y} = xy(a - x - y)$$

ein Größtes sein. Es ist

$$\partial f_x = ay - 2xy - y^2$$
$$\partial f_y = ax - x^2 - 2xy$$
$$\partial_{1,1} f_{x,y} = a - 2x - 2y$$
$$\partial^2 f_x = -2y$$
$$\partial^2 f_y = -2x.$$

Aus $\partial f_x = 0$ und $\partial f_y = 0$ ergiebt sich $x = \frac{1}{3}a$, $y = \frac{1}{3}a$. Für diese Werthe von x und y ist

$$(\partial^{1,1} f_{x,y})^2 - \partial^2 f_x \partial^2 f_y < 0$$

und die zweiten Ableitungen sind negativ. Nach §. 292 ist also die Funktion ein Maximum für $x = y = \frac{1}{3}a$.

24) Eine Zahl a in drei Theile x, y, z zu theilen, so daß die Summe $nx^2 + py^2 + qz^2$ ein Kleinstes sei.

Die Theile sind $\frac{pqa}{np + nq + pq}$, $\frac{nqa}{np + nq + pq}$, $\frac{npa}{np + nq + pq}$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Fortsetzung.)

Methode der kleinsten Quadrate, Andeutung.

25) Das Maaß x einer Größe für irgend eine Einheit zu ermitteln, sind Messungen, Versuche angestellt worden, und durch n Messungen, Versuche hat man für x die Werthe a, b, c, d, ... erhalten. Diese Werthe sind ungleich, weil bei jedem einzelnen Versuch ein durch verschiedene Ursachen herbeigeführter, nicht zu vermeidender Fehler Statt findet, und dieser Fehler hat im Allgemeinen bei jedem einzelnen Versuch einen besonderen Werth aus besonderen Ursachen. Welches ist nun der Werth y, welcher jenen Werthen a, b, c, d, ... am meisten, nächsten entspricht?

Es ist $y = \frac{a + b + c + d + \ldots}{n}$.

Es ist y größer als der kleinste und kleiner als der größeste der Werthe a, b, ... Die Differenzen $y - a$, $y - b$, ... sind also theils positiv, theils negativ. Und es ist y derjenige Werth, für welchen

$$(y - a) + (y - b) + (y - c) + (y - d) + \ldots = 0$$

ist. Hieraus folgt aber

$$ny = a + b + c + d + \ldots$$

also für y der angegebene Werth.

Andere Herleitung. Die Quadrate der gedachten Diffe-

renzen sind sämmtlich positiv. Daher ist y der Werth, für welchen

$$(y-a)^2+(y-b)^2+(y-c)^2+(y-d)^2+\ldots.$$

ein Minimum ist, also die Ableitung dieser Summe nach y gleich Null. Das liefert

$$2(y-a)+2(y-b)+2(y-c)+2(y-d)+\ldots.=0$$

also wiederum

$$ny=a+b+c+d+\ldots.$$

Der Werth $\frac{a+b+c+d+\ldots.}{n}$ heißt das arithmetische Mittel, der mittlere Werth zu den Werthen a, b, c, ...

Es kann sich sehr wohl fügen, daß einer der Werthe a, b, c, ... dem wahren Werthe x näher liegt, als der mittlere Werth; dies wird z. B. schon eintreten, wenn die sämmtlichen Werthe a, b, c, ... zu groß, oder zu klein sind.

Eine Länge sei wiederholt in einerlei Weise gemessen und es habe sich der mittlere Werth y ergeben. Wird dieselbe Länge in derselben Weise neuerdings gemessen, so ist anzunehmen, es werde sich derselbe oder nahe derselbe mittlere Werth finden. Wird dieselbe Länge in anderer Weise vermittelst anderer Instrumente, Methoden gemessen, so kann der jetzige mittlere Werth z mit jenem y übereinstimmen, oder sich weniger oder mehr von ihm unterscheiden; u. s. w. Im letztern Fall kann man den mittleren Werth der mittleren Werthe nehmen; oder man wird, und selbst schon bei einer Reihe von Messungen in einerlei Weise, eine Kritik eintreten lassen, um zu entscheiden, welche Messungsmethode oder welche einzelne Messung das meiste Vertrauen verdiene und den wahren Werth x am genauesten liefere. Die Rechnung kann nicht gut machen, was mangelhafte Methoden verdorben haben, oder Unachtsamkeit.

26) Von mehreren gleichen Vorrichtungen arbeitet die eine mit dem Nutz-Effekt a, die zweite mit dem Nutz-Effekt b, die dritte mit dem Nutz-Effekt c u. s. f.; welchen Nutz-Effekt kann man sich von einer solchen Vorrichtung im Allgemeinen versprechen?

Den mittleren von jenen a, b, c ...., etwas mehr oder weniger.

27) Es sei

$$q = a + bx^\alpha + cy^\beta + dz^\gamma + \ldots.$$

Die Zahl q sei das Ergebniß eines Versuches; a, b, c, d, ... seien bekannte, diesem besonderen Versuche zugehörige, x, y, z, ... unbekannte constante, unter sich in keinem Zusammenhang stehende Werthe, α, β, γ, ... bekannte constante Exponenten. Einem zweiten, dritten u. s. w. Versuch entsprechend sei

$$q' = a' + b'x^\alpha + c'y^\beta + d'z^\gamma + \ldots.$$
$$q'' = a'' + b''x^\alpha + c''y^\beta + d''z^\gamma + \ldots.$$
$$\vdots$$

Wie finden sich die Werthe von x, y, z, ... welche den Resultaten q, q', q'' .... am meisten entsprechen.

Es seien v, v', v'', ... die an sich positiven oder negativen unbekannten Werthe, welche, wegen des bei jedem Versuche obwaltenden Fehlers, beziehlich zu q, q', q'', ... addirt werden müssen, also $q + v$, $q' + v'$ .... die wahren, fehlerfreien Resultate der Versuche.

Dann ist

$$v = -q + a + bx^\alpha + cy^\beta + dz^\gamma + \ldots.$$
$$v' = -q' + a' + b'x^\alpha + c'y^\beta + d'z^\gamma + \ldots.$$
$$v'' = -q'' + a'' + b''x^\alpha + c''y^\beta + d''z^\gamma + \ldots.$$
$$\vdots$$

Sollen nun, wie es gefordert ist, die Unbekannten x, y, z dergestalt bestimmt werden, daß sie am meisten, so viel als möglich, den nicht verbesserten Werthen q, q', q'', ... entsprechen, so wähle man sie dergestalt, daß sie die Summe

der Quadrate der Fehler, nämlich $v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots$ zu einem Minimum machen. — Wenn man rechts quadrirt und addirt, entsteht eine Funktion F von x, y, z, ...; und da die Unbekannten x, y, z .... in keinem Zusammenhang stehen, werden sie bestimmt durch die Gleichungen

$$\partial F_x = 0$$
$$\partial F_y = 0$$
$$\partial F_z = 0 \text{ u. s. w.}$$

deren Anzahl gleich ist der der Unbekannten.

Es ergeben sich bei diesem Verfahren nicht die wahren Werthe von x, y, z, ..., sondern die, welche den Resultaten q, q′, q″, ... so viel als möglich entsprechen; und es sind so viel als möglich die unbekannten Fehler v, v′, v″, ... auf die Unbekannten x, y, z .... geworfen (die Ursachen der Fehler auf die Ursachen der Unbekannten). Dies ist kein Mangel der Methode, sondern im Gegentheil für praktische Anwendungen ein Vortheil. Denn es seien z. B. bei verschiedenen Maschinen einerlei Gattung Versuche und Berechnung wie oben angestellt, während x, y, z .... etwa Reibungs-Coefficienten u. s. w. vorstellen; so dürfte bei einer neuen Maschine derselben Gattung das Resultat q der Berechnung, wobei die gefundenen Werthe der Unbekannten x, y, z .... zu Grunde gelegt wurden, um so genauer mit dem Versuche übereinstimmen, als jene Unbekannten den Resultaten gemäß bestimmt wurden, und außerdem den Fehler v so viel als möglich tragen; ein Umstand, der die Methode sehr schätzbar macht. Nur muß man sich hüten die Werthe für x, y, z, ... bei der Berechnung von Maschinen anderer Gattung zu gebrauchen, weil bei diesen der Fehler v andere Ursachen hat und in anderen Verhältnissen zu x, y, z, ... steht.

Zwölftes Kapitel.

Bestimmung von Werthen unter der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ u. s. w.

§. 297.

Aufgabe. Es sei $F_x = \frac{f_x}{\phi_x}$ und für den besonderen Werth a von x gehe sowohl f_x als ϕ_x in Null über, man soll den Werth von F_a bestimmen.

Auflösung. Nach dem Taylorschen Satze hat man, wenn zunächst jede Ableitung nach x genommen, dann aber a statt x gesetzt wird,

$$F_{(a+h)} = \frac{f_a + \partial f_a h + \partial^2 f_a \frac{h^2}{2!} + \ldots}{\phi_a + \partial \phi_a h + \partial^2 \phi_a \frac{h^2}{2!} + \ldots}.$$

Nach der Voraussetzung ist $f_a = 0$ und $\phi_a = 0$. Wenn man daher durch h hebt, und dann h gleich Null setzt, so folgt

$$F_a = \frac{\partial f_a}{\partial \phi_a}.$$

Sollten auch ∂f_a und $\partial \phi_a$ Null sein, so würden die beiden ersten Glieder des Zählers und des Nenners in der oberen Entwickelung verschwinden, und wenn man dann mit h^2 hebt, und darauf h gleich Null setzt, entsteht

$$F_a = \frac{\partial^2 f_a}{\partial^2 \phi_a}$$

u. s. w. Und überhaupt erhellet jetzt, daß, wenn für den besonderen Werth a von x die sämmtlichen Funktionen f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x \ldots \partial^{n-1} f_x$, und ϕ_x, $\partial \phi_x$, $\partial^2 \phi_x$, ... $\partial^{n-1} \phi_x$ in Null übergehen, aber nicht auch jede der Funktionen $\partial^n f_x$ und $\partial^n \phi_x$ zu Null wird, dann

$$F_a = \frac{\partial^n f_a}{\partial^n \phi_a} \text{ ist.}$$

Beispiele.

1) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}$ geht für $x = 1$ in $\frac{0}{0}$ über. Es ist aber $\partial(x^2 - 5x + 4) = 2x - 5$, und $\partial(x^2 + x - 2) = 2x + 1$. Daher ist für $x = 1$ jener Bruch gleich $\frac{2x - 5}{2x + 1} = -1$.

2) $\frac{x^n - 1}{x - 1} = n$ für $x = 1$.

3) $\frac{x^3 - a^2x - ax^2 + a^3}{x - a} = 0$ für $x = a$.

4) $\frac{\operatorname{Sin} x}{x} = 1$ für $x = 0$.

5) $\frac{x - \operatorname{Sin} x}{x^3} = \frac{1}{6}$ für $x = 0$.

§. 298.

Aufgabe. Es sei $F_x = \frac{f_x}{\phi_x}$, und für den besonderen Werth a von x nehme sowohl f_x als ϕ_x die Form ∞ an; man soll den Werth von F_a bestimmen.

Auflösung. Ist $f_a = \infty$ und $\phi_a = \infty$, so ist $\frac{1}{f_a} = 0$ und $\frac{1}{\phi_a} = 0$, und es ist nach dem vorigen Paragraph

$$\frac{\frac{1}{f_a}}{\frac{1}{\phi_a}} = \frac{\frac{\partial f_a}{f_a{}^2}}{\frac{\partial \phi_a}{\phi_a{}^2}}$$

oder

$$\frac{\phi_a}{f_a} = \frac{\partial f_a}{\partial \phi_a} \cdot \frac{\phi_a{}^2}{f_a{}^2}$$

oder

$$\frac{f_a}{\phi_a} = \frac{\partial f_a}{\partial \phi_a}$$

d. h.

$$F_a = \frac{\partial f_a}{\partial \phi_a}.$$

Wäre $\partial f_a = \infty$ und $\partial \phi_a = \infty$, so hätte man nach dem eben Erhaltenen

$$\frac{\partial f_a}{\partial \phi_a} = \frac{\partial^2 f_a}{\partial^2 \phi_a}$$

also auch
$$F_a = \frac{\partial^2 f_a}{\partial^2 \phi_a}$$

u. s. w.

So folgt z. B. $\frac{\ln x}{x} = 0$ für $x = \infty$. Denn es sei $\ln x = f_x$, $x = \phi_x$, so ist zunächst $f_x = \infty$ und $\phi_x = \infty$ für $x = \infty$. Aber es ist $\partial f_x = \frac{1}{x}$, $\partial \phi_x = 1$ also $\frac{\partial f_x}{\partial \phi_x} = 0$ für $x = \infty$.

§. 299.

Die Bestimmung von Werthen, welche unter der Form $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ u. s. w. erscheinen, läßt sich auf die vorangegangenen Paragraphen zurückführen, wie ein paar Beispiele zeigen:

Es sei $x \ln x$ für $x = 0$ zu bestimmen. Es ist $\ln 0 = -\infty$; daher nimmt die vorgelegte Funktion für $x = 0$ die Form $-\infty \cdot 0$ an. Man setze aber $\ln x = f_x$, $x = \frac{1}{\phi_x}$, also $\phi_x = \frac{1}{x}$, und es ist

$$x \ln x = \frac{f_x}{\phi_x}$$

während jetzt f_x und ϕ_x für $x = 0$ offenbar unendlich werden. Nun ist $\partial f_x = \frac{1}{x}$ und $\partial \phi_x = -\frac{1}{x^2}$, also

$$\frac{\partial f_x}{\partial \phi_x} = -x$$

welches 0 ist für $x = 0$, also ist $x \ln x = 0$ für $x = 0$.

Es sei $x^p e^{-x}$ zu bestimmen für $x = \infty$. Die vorgelegte Funktion ist gleich $\frac{x^p}{e^x}$ und nimmt die Form $\frac{\infty}{\infty}$ für $x = \infty$ an. Ist nun $f_x = x^p$, $\phi_x = e^x$, so ist $\partial f_x = p x^{p-1}$ und $\partial \phi_x = e^x$,

und $\partial^n f_x = p!$, und $\partial^n \phi_x = e^x$, also folgt, die gegebene Funktion ist, für $x = \infty$, gleich $\frac{p!}{e^x}$, und das giebt 0.

Es sei $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}$ zu bestimmen für den Werth 1 von x. Der vorgelegte Ausdruck geht für $x = 1$ in $\infty - \infty$ über. Wenn man aber auf gleiche Benennung bringt, entsteht $\frac{x-1}{1-x^2}$; und dies ist $\frac{1}{2}$ für $x = 1$, wie sich findet, entweder indem man hebt, oder durch Anwendung des §. 297.

§. 300.

Den Werth 0^0 zu bestimmen, wenn er aus $f_x{}^{\phi_x}$ hervorgeht, setze man

$$\psi_x = f_x{}^{\phi_x}$$

und es folgt

$$\ln \psi_x = \phi_x \ln f_x$$

also

$$\psi_x = e^{\phi_x \ln f_x}$$

$$= e^{\frac{\ln f_x}{\phi_x{}^{-1}}}$$

und ermittele den Werth des Quotienten $\frac{\ln f_x}{\phi_x{}^{-1}}$ nach §. 297. Es ergiebt sich dafür $-\frac{\phi_x{}^2 \partial f_x}{f_x \partial \phi_x}$, und der gesuchte Werth ist alsdann

$$e^{-\frac{\phi_x{}^2 \partial f_x}{f_x \partial \phi_x}}$$

unter x den Werth verstanden, für welchen f_x und ϕ_x einzeln in Null übergehen.

Aehnlich ergiebt sich der Werh ∞^0 u. s. w.

So folgt z. B. für $x = 0$

$$x^x = e^{-\frac{x^2}{x}} = e^{-x} = e^{-0} = 1.$$

§. 301.

Zuweilen ist es vortheilhaft (zuweilen nothwendig), wenn $\frac{f_x}{\phi_x}$ für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, sofort $a + h$ statt x zu setzen,

Zähler und Nenner nach Potenzen von h zu entwickeln, so viel es angeht mit h zu heben, und darauf Null zu setzen statt h, um den Werth von $\frac{f_a}{\phi_a}$ zu erhalten.

Setzt man z. B. in §. 297 5) $0 + h$ für x, so entsteht

$$\frac{h - \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \ldots\right)}{h^3} = \frac{1}{3!} - \frac{h^2}{5!} + \ldots$$

und dies ist $\frac{1}{6}$ für $h = 0$.

Oder es sei

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$$

zu berechnen für $x = 1$. Der vorgelegte Ausdruck ist gleich

$$\frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}.$$

Man setze $1 + h$ statt x, und es entsteht

$$\frac{(1+h)[h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \ldots] - h}{h[h - \frac{1}{2}h^2 + \ldots]}$$

und dieser Ausdruck liefert, wenn man die Klammern aufgelöst denkt, mit h^2 hebt, und $h = 0$ setzt, $\frac{1}{2}$ als Werth des oberen Ausdrucks für $x = 1$.

Dreizehntes Kapitel.

Von den höheren Gleichungen.

I. Von den Gleichungen im Allgemeinen.

§. 302.

Eine algebraische Gleichung mit einem Unbekannten x heißt vom nten Grade, wenn sie auf die Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0$$

gebracht werden kann, und geordnet, wenn sie auf diese Form

gebracht ist. Jeder von den Coefficienten a_1, a_2, a_3 .... a^n stellt irgend eine positive oder negative oder imaginaire Zahl vor, oder auch Null.

Ist a_1 gleich Null, so hat die Gleichung die Gestalt

$$x^n + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

und heißt eine *reducirte* Gleichung vom *n*ten Grade. Sind alle Coefficienten außer a_n gleich Null, so hat die Gleichung die Form

$$x^n + a_n = 0$$

und heißt eine *reine* Gleichung vom *n*ten Grade. Ist keiner von den Coefficienten der Gleichung Null, so heißt die Gleichung eine *vollständige* Gleichung vom *n*ten Grade. Jede Gleichung vom *n*ten Grade, welche keine vollständige ist, heißt eine *unvollständige*, jede, welche keine reine ist, eine *unreine* Gleichung vom *n*ten Grade.

Eine Gleichung vom *n*ten Grade wird eine höhere Gleichung genannt, wenn n größer ist als 2. Gleichungen des dritten Grades pflegt man auch *cubische* Gleichungen zu nennen.

Das Ordnen der höheren Gleichungen geschieht dem Ordnen der quadratischen Gleichungen ähnlich.

Wir werden die höheren Gleichungen nur unter der Voraussetzung betrachten, daß keiner der Coefficienten a_1 .... a^n imaginair ist.

Die Funktion

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

bezeichnen wir durch f. Die Gleichung des *n*ten Grades wird dann durch $f = 0$ ausgedrückt.

Einer höheren Gleichung $f = 0$ können sowohl reelle als imaginaire Werthe von x entsprechen (wie solches auch bei den quadratischen Gleichungen der Fall ist). Jeder reelle oder imaginaire Werth von x, welcher die Gleichung $f = 0$ identisch macht, heißt eine *Wurzel* der Gleichung.

§. 303.

Wir betrachten zunächst die Funktion f, während x, stetig wachsend, alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. — Es

seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots . \nu$ die steigend geordneten Werthe von x, für welche die Funktion f ein Größtes oder Kleinstes ist. Von den Werthen f_α, f_β, f_γ .... ist dann entweder der erste, dritte, fünfte u. s. f. ein Größtes, und der zweite, vierte, sechste u. s. f. ein Kleinstes, oder umgekehrt. — Ist nun n ungerade, so nimmt die Funktion f den Gang

$$-\infty \ldots f_\alpha \ldots f_\beta \ldots f_\gamma \ldots\ldots f_\nu \ldots +\infty.$$

Der Werth f_α ist ein Größtes, f_β ein Kleinstes u. s. f., zuletzt f_ν ein Kleinstes. Nehmen wir an, f_α sei positiv, f_β negativ, f_γ positiv, f_δ negativ u. s. f., zuletzt f_ν negativ, so leuchtet ein, daß wenn q größte oder kleinste Werthe der Funktion f vorhanden sind, dieselbe q + 1 mal den Werth Null annimmt. Zugleich ist einleuchtend, daß die Funktion für nicht mehr als q + 1 reelle Werthe von x gleich Null werden kann, wohl aber für weniger, wenn die Vorzeichen der größten und kleinsten Werthe andere sind. — Ist dagegen n gerade, so nimmt die Funktion folgenden Gang:

$$+\infty \ldots f_\alpha \ldots f_\beta \ldots f_\gamma \ldots\ldots f_\nu \ldots +\infty.$$

Diesmal ist f_α ein Kleinstes, f_β ein Größtes u. s. f., zuletzt f_ν ein Kleinstes. Ist nun f_α negativ, f_β positiv, f_γ negativ, f_δ positiv u. s. f., zuletzt f_ν negativ, so geht die Funktion, wenn q die Anzahl der größten oder keinsten Werthe vorstellt, wiederum q + 1 mal durch Null; und die Funktion kann für nicht mehr als q + 1 reelle Werthe von x den Werth Null erhalten, wohl aber für weniger, wenn die größten oder kleinsten Werthe der Funktion andere Vorzeichen führen.

Ist also q die Anzahl der Werthe von x, für welche die Funktion f ein Größtes oder Kleinstes wird, so hat die Gleichung f = 0 höchstens q + 1 reelle Wurzeln.

Hieraus folgt weiter, daß die Gleichung f = 0 vom nten Grade höchstens n reelle Wurzeln haben kann. — Es hat nämlich die Gleichung des ersten Grades eine reelle Wurzel. Die Funktion f des zweiten Grades hat zur ersten Ableitung eine Funktion des ersten Grades, sie hat deshalb einen größten oder

kleinsten Werth (in der That einen kleinsten) und wird daher höchstens für zwei reelle Werthe von x zu Null. Die Ableitung der Funktion f vom dritten Grad ist vom zweiten Grade, wird höchstens für zwei reelle Werthe von x zu Null, deshalb hat die Funktion f vom dritten Grade höchstens zwei größte oder kleinste Werthe, also die Gleichung $f = 0$ des dritten Grades höchstens drei reelle Wurzeln. U. s. f.

§. 304.

1) Ist n ungerade, so hat die Gleichung $f = 0$ wenigstens eine reelle Wurzel.

Denn während x von $-\infty$ wächst bis $+\infty$, durchläuft f die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$.

2) Ist n gerade, so hat die Gleichung $f = 0$ nicht nothwendig eine reelle Wurzel.

Denn während x wächst von $-\infty$ bis $+\infty$, beginnt f mit $+\infty$ und endigt mit $+\infty$, und es kann das absolute Minimum positiv ausfallen.

3) Ist n gerade und das letzte Glied a_n von f negativ, so hat die Gleichung $f = 0$ wenigstens zwei reelle Wurzeln, von welchen die eine positiv, die andere negativ ist.

Denn für $x = 0$ ist $f = -a_n$, also muß f, während x wächst von $-\infty$ bis $+\infty$, von seinem ersten Werth $+\infty$ fallen bis $-a_n$ und darauf steigen bis $+\infty$, also zweimal durch 0 gehen, und zwar für einen negativen und für einen positiven Werth von x, da f negativ ist für $x = 0$.

§. 305.

Ist x_1 eine relle oder imaginaire Wurzel der Gleichung des nten Grades $f = 0$, so ist $f = (x - x_1)f_1$, unter f_1 eine Funktion des $(n-1)$sten Grades verstanden, von gleicher Form mit der Funktion f.

Wird f durch $x - x_1$ dividirt, so ergiebt sich als Quotient eine Funktion f_1 des $(n-1)$sten Grades, wie leicht aus dem

Verfahren der Division erhellet. Bliebe ein Rest r, so enthielte er, als vom 0ten Grade, kein x, und es wäre

$$f = (x - x_1)f_1 + r.$$

Für $x = x_1$ folgt hieraus

$$0 = 0 + r$$

also $$0 = r.$$

§. 306.

Sind daher $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_q$, q beliebige Wurzeln der Gleichung des nten Grades $f = 0$, so ist

$$f = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots . f_1$$

und es ist f_1 vom Grade $n - q$.

§. 307.

Es ist

$$(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3) \ldots . (x + x_n)$$

$$= x^n + \left\{\begin{matrix} x_1 \\ + x_2 \\ + x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + x_n \end{matrix}\right\} x^{n-1} + \left\{\begin{matrix} x_1x_2 \\ + x_1x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + x_1x_n \\ + x_2x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + x_2x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} x^{n-2} + \left\{\begin{matrix} x_1x_2x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} x^{n-3} + \ldots$$

$$+ x_1x_2x_3 \ldots . x_n.$$

Die Coefficienten werden durch die einzelnen Combinationsklassen ohne Wiederholung aus den Elementen $x_1, x_2 \ldots x_n$ geliefert.

Man findet das Gesetz durch Multiplication, oder durch Combinationslehre.

§. 308.

Die Gleichung des nten Grades hat nicht mehr als n reelle oder imaginaire Wurzeln.

Denn sind $x_1, x_2, \ldots x_q$ sämmtliche Wurzeln der Gleichung, so ist

$$f = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_q)$$

und wäre die Anzahl der rechts stehenden Faktoren größer als n, so wäre nach dem vorigen Paragraph die rechts stehende Funktion von einem höheren Grade als f, welches sich widerspricht.

§. 309.

Die Gleichung

$$x^n \mp a = 0$$

hat n Wurzeln.

Denn es ist

$$x = \sqrt[n]{\pm a}$$

und dieser Wurzel entsprechen nach §. 167 n verschiedene Werthe.

§. 310.

Die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0$$

hat stets eine reelle oder imaginaire Wurzel.

Wir unterscheiden zwei Fälle, entweder ist $a_n = 0$ oder es ist $a_n \gtrless 0$.

Ist $a_n = 0$, so kann die Gleichung in der Form

$$(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \ldots a_{n-1})x = 0$$

dargestellt werden, und es fällt in die Augen, daß ihr der Werth $x = 0$ Genüge leistet.

Es sei andererseits a_n nicht gleich Null. In diesem Fall entspricht der Werth $x = 0$ der Gleichung nicht.

Wir setzen

$$x = p + qi$$

und betrachten p und q als reell und unveränderlich. x stellt alsdann alle reellen und imaginairen Werthe vor, und es kommt

darauf an, darzulegen, daß ein Paar Werthe p' und q' bestehe, so daß

$$x = p' + q'i$$

der Gleichung genüge. Unter der gegenwärtigen Annahme können p' und q' nicht gleichzeitig Null sein.

In f denke man $p + qi$ statt x gesetzt, die Potenzen nach dem binomischen Satz entwickelt, und die reellen Ausdrücke von den imaginairen gesondert. Man überblickt leicht daß

$$f_x = f_{p,q} = A + Bi$$

entsteht, unter A und B Funktionen von p und q verstanden, und daß in diesen Funktionen p und q nur mit positiven ganzen Exponenten auftreten.

Welche Vorzeichen A und B führen mögen, immer ist A^2 positiv, eben so B^2. Bilden wir daher, und wir haben Grund dazu, die Funktion

$$\phi = A^2 + B^2$$

so kann dieselbe keinen negativen Werth annehmen, sondern nur positiv sein, oder Null; und ist sie gleich Null, so muß $A = 0$ sein und $B = 0$.

Ist für irgend besondere Werthe von p und q

$$A + Bi = 0$$

so ist zugleich

$$A^2 + B^2 = 0$$

und umgekehrt. Denn jede dieser Gleichungen kann nur in Erfüllung gehen, wenn gleichzeitig A und B Null ist.

Alle Werthe der Funktion $A^2 + B^2$ zu erhalten, denke man etwa statt p alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, gesetzt, und bei jedem Werth von p sämmtliche Werthe von q. Die Funktion ist $+\infty$ sowohl, wenn $p = q = -\infty$, als wenn $p = q = +\infty$. Sie beginnt daher mit $+\infty$ und endigt mit $+\infty$, und hat also ein absolutes Minimum. Es läßt sich darthun, daß dies Minimum Null ist.

Zu dem Ende setzen wir

$$p + qi = r(\operatorname{Cos} z + i \operatorname{Sin} z)$$

und führen diese Form zunächst in f ein. Es entsteht

$$x^n = r^n[\mathrm{Cos}\,nz + i\,\mathrm{Sin}\,nz]$$
$$a_1 x^{n-1} = a_1 r^{n-1}[\mathrm{Cos}(n-1)z + i\,\mathrm{Sin}(n-1)z]$$
$$a_2 x^{n-2} = a_2 r^{n-2}[\mathrm{Cos}(n-2)z + i\,\mathrm{Sin}(n-2)z]$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$a_{n-1}x = a_{n-1}r[\mathrm{Cos}\,z + i\,\mathrm{Sin}\,z]$$
$$a_n = a_n$$

also

$$f = A + Bi$$

während nunmehr

$$A = r^n \mathrm{Cos}\,nz + a_1 r^{n-1}\mathrm{Cos}(n-1)z + \ldots. + a_{n-1}r\,\mathrm{Cos}\,z + a_n$$
$$B = r^n \mathrm{Sin}\,nz + a_1 r^{n-1}\mathrm{Sin}(n-1)z + \ldots. + a_{n-1}r\,\mathrm{Sin}\,z.$$

Die Werthe von r und z, welche die Funktion $A^2 + B^2$ zu einem Minimum machen, müssen den beiden Gleichungen entsprechen

$$1)\quad A\partial Ar + B\partial Br = 0$$
$$2)\quad A\partial Az + B\partial Bz = 0.$$

Wir bilden und setzen beziehlich

$$\partial Ar = nr^{n-1}\mathrm{Cos}\,nz + a_1(n-1)r^{n-2}\mathrm{Cos}(n-1)z + \ldots.$$
$$+ a_{n-1}\mathrm{Cos}\,z = C$$
$$\partial Br = nr^{n-1}\mathrm{Sin}\,nz + a_1(n-1)r^{n-2}\mathrm{Sin}(n-1)z + \ldots.$$
$$+ a_{n-1}\mathrm{Sin}\,z = D.$$

Diese Ableitungen C und D beziehlich von A und B nach r sind als Funktionen von r aufzufassen. Sie können im Allgemeinen, d. h. für jeden Werth von r nicht gleichzeitig Null sein; denn alsdann wäre nothwendig jeder ihrer Coefficienten Null, und aus

$$n\,\mathrm{Cos}\,nz = n\,\mathrm{Sin}\,nz = 0$$

würde folgen

$$\mathrm{Cos}\,nz = \mathrm{Sin}\,nz = 0$$

während Cos und Sin desselben Winkels niemals gleichzeitig den Werth Null annehmen.

Wir bilden weiter

$$\partial Az = -[nr^n \operatorname{Sin} nz + a_1(n-1)r^{n-1}\operatorname{Sin}(n-1)z + \dots + a^{n-1} r \operatorname{Sin} z]$$

$$\partial Bz = nr \operatorname{Cos} nz + a_1(n-1)r^{n-1}\operatorname{Cos}(n-1)z + \dots + a^{n-1} r \operatorname{Cos} z$$

und es fällt in die Augen, daß

$$\partial Az = -rD$$
$$\partial Bz = rC.$$

Die Gleichungen 1) und 2) gehen, wenn wir diese Werthe einführen, über in

$$3) \quad AC + BD = 0$$
$$4) \quad -ArD + BrC = 0.$$

Es sei $r \gtrless 0$; dann kann die Gleichung 4) durch r gehoben werden, und unsere Gleichungen sind

$$5) \quad AC + BD = 0$$
$$6) \quad -AD + BC = 0.$$

Wäre nun $C = 0$ oder $D = 0$, so hätte man sofort $A = 0$ und $B = 0$, also auch $A^2 + B^2 = 0$. Ist weder C noch D im Allgemeinen Null, so folgt

$$AC = -BD$$
$$-AD = -BC$$

also multiplicirend

$$-A^2 = B^2$$

oder

$$A^2 + B^2 = 0$$

Ist also $r \gtrless 0$, so bewirken die Werthe r' und z', welche den Gleichungen 1) und 2) entsprechen, daß $A^2 + B^2 = 0$, d. h. diese Funktion, welche nicht negativ sein kann, zu ihrem absoluten Minimum werde.

Dann aber ist auch $A = 0$ und $B = 0$, und jene Werthe r' und z' liefern einen Werth

$$x = p' + q'i$$

welcher unserer Gleichung genügt.

Die Gleichung 4) wird auch erfüllt durch den Werth

$r = 0$. Diesen ziehen wir hier indeß nicht in Betracht, weil $r = 0$ auch

$$x = p + qi = r(\mathrm{Cos}\, z + i\, \mathrm{Sin}\, z) = 0$$

bedingt, während $x = 0$ der Gleichung nicht entspricht, so lange $a_n \gtrless 0$ ist.

§. 311.

1) Die Funktion f des nten Grades läßt sich jedesmal in das Produkt $(x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_n)$ von n Faktoren zerlegen, während $x_1, x_2, \ldots x_n$ reelle oder imaginaire Werthe vorstellen.

Nach dem vorigen Paragraphen besteht jedesmal eine Wurzel x_1 der Gleichung $f = 0$. Daher läßt sich nach §. 305 setzen

$$f = (x - x_1) f_I$$

während f_I vom $(n - 1)$sten Grade ist. Für f_I entsteht in gleicher Weise

$$f_I = (x - x_2) f_{II}$$

und es ist f_{II} vom Grade $n - 2$. In solcher Weise fortschließend ergiebt sich die Behauptung.

2) Die Gleichung des nten Grades $f = 0$ hat n Wurzeln.

Denn es sei $f = (x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_n)$, so wird f für jeden der n Werthe $-x_1, -x_2, \ldots -x_n$ zu Null.

Die n Wurzeln kommen indeß nur insofern heraus, als man, wenn mehrere der Werthe $-x_1, -x_2, \ldots$ einander gleich sind, diese doch als eben so viele Wurzeln zählt. Und haben p der Wurzeln einerlei Werth, so sagt man, dieser Werth sei eine pfache Wurzel.

3) Die Wurzeln der Gleichung, entgegengesetzt genommen, sind die Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots$ in dem Produkt, welches f ausdrückt; und nach §. 307 übersieht sich nun der Zusammenhang, in welchem die Wurzeln der Gleichung mit ihren Coefficienten stehen. Für die Folge ist bemerkenswerth, daß das Produkt aus den sämmtlichen, entgegengesetzt genommenen Wurzeln das letzte Glied a_n giebt.

§. 312.

Hat die Gleichung des nten Grades $f=0$ die Wurzel x_1, so ist die Gleichung durch $x-x_1$ theilbar, und die Division liefert eine Gleichung des $(n-1)$sten Grades $f_I=0$, deren $n-1$ Wurzeln die übrigen der ursprünglichen Gleichung sind.

§. 313.

Sind $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$ die n Wurzeln der Gleichung des nten Grades $f=0$, so ist, unter a_n den Coefficienten von x^0 in der Funktion f verstanden,

$$f = a_n\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\left(1-\frac{x}{x_3}\right)\ldots.\left(1-\frac{x}{x_n}\right).$$

Es ist nämlich

$$\alpha)\ f=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots.(x-x_n)$$

und es ist

$$a_n = -x_1 \cdot -x_2 \cdot -x_3 \ldots. -x_n.$$

Wenn man daher den unter α) rechts stehenden Ausdruck mit a_n multiplicirt und durch das a_n gleiche Produkt dividirt, entsteht die Behauptung.

§. 314.

Es ist

$$\operatorname{Sin} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots.$$

$$\operatorname{Cos} x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\ldots.$$

Es ist nämlich

$$\operatorname{Cos} x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots.$$

und da $\operatorname{Cos} x$ gleich Null ist für die Werthe $\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, ... von x, so dürfen diese Werthe als Wurzeln der Gleichung

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots.=0$$

betrachtet werden; und dann ist nach dem vorigen Paragraph

$$\operatorname{Cos} x = \left(1-\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}\right)\ldots.$$

welches der obere Werth für $\operatorname{Cos} x$ ist. Der Ausdruck für $\operatorname{Sin} x$ entsteht, wenn man

$$\operatorname{Sin} x = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)$$

setzt, und π, $-\pi$, 2π, -2π, ... als Wurzeln der Gleichung

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = 0$$

betrachtet.

§. 315.

Hat die Gleichung $f = 0$ die $p$fache Wurzel v, so enthält der größte gemeinschaftliche Theiler zu f und ∂f_x den Faktor $(x-v)^{p-1}$.

Denn es ist dann f von der Form $(x-v)^p \phi_x$, und aus

$$f = (x-v)^p \phi_x$$

folgt

$$\begin{aligned} \partial f_x &= (x-v)^p \partial\phi_x + p(x-v)^{p-1}\phi_x \\ &= (x-v)^{p-1}[(x-v)\partial\phi_x + p\phi_x]. \end{aligned}$$

Der Satz gilt auch umgekehrt.

§. 316.

Giebt es daher einen Werth x_1 von x, für welchen ∂f_x zu Null wird und zugleich f, so hat die Gleichung $f = 0$ den Werth x_1 wenigstens als zweifache Wurzel.

§. 317.

Hat eine Gleichung des $n$ten Grades die Wurzel $p + q\sqrt{-1}$, so hat sie zugleich die Wurzel $p - q\sqrt{-1}$, und hat sie die letzte Wurzel, so hat sie auch die erstere.

Die Gleichung sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Wir setzen $p \pm qi = r(\operatorname{Cos}\phi \pm i \operatorname{Sin}\phi)$, substituiren diesen Ausdruck für x und wenden §. 163 an. Es entsteht:

$$\begin{aligned} & r^n \operatorname{Cos} n\phi + a_1 r^{n-1} \operatorname{Cos}(n-1)\phi + a_2 r^{n-2}\operatorname{Cos}(n-2)\phi \\ & \qquad + \ldots + a_n \\ & \pm i[r^n \operatorname{Sin} n\phi + a_1 r^{n-1}\operatorname{Sin}(n-1)\phi + a_2 r^{n-2}\operatorname{Sin}(n-2)\phi \\ & \qquad + \ldots + a_n] = 0. \end{aligned}$$

Ist diese Gleichung identisch, so sind r und ϕ von der Beschaffenheit, daß sowohl die eingeklammerte Summe Null ist, als die darüber stehende. Sind aber diese Summen gleich Null, so geht die Gleichung, sobald einer der Werthe $p \pm q\sqrt{-1}$ genügt, auch immer für den anderen in Erfüllung.

§. 318.

Es sei die Gleichung gegeben

$$1)\ x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots. + a_n = 0.$$

Statt x werde die Funktion des ersten Grades $py + q$ substituirt. Das liefert

$$(py + q)^n + a_1 (py + q)^{n-1} + \ldots. + a_n = 0$$

und diese Gleichung ist in Bezug auf jeden der Ausdrücke p, y, q vom n Grade, wie die ursprüngliche. Ordnen wir nach den Potenzen von y und dividiren durch p^n, so entsteht

$$2)\ y^n + (nq + a_1)\frac{y^{n-1}}{p} + [n_2 q^2 + a_1 (n-1) q + a_2]\frac{y^{n-2}}{p^2} + \ldots. = 0$$

wobei n, n — 1, ... mit Zeigern, a mit Stellenzahlen erscheint.

Wären für p, y und q besondere Werthe ermittelt, welche der Gleichung 2) entsprechen, so würde offenbar für diese Werthe die Summe $py + q$ einen Werth von x der Gleichung 1) ausmachen. Und setzt man in 2) statt p und q beliebige bestimmte Werthe p' und q', ermittelt darauf y der Gleichung 2) entsprechend, so ist auch $p'y + q'$ eine Wurzel der Gleichung 1). Darf man aber für p und q beliebige Werthe setzen, so ist es möglich, diese dergestalt zu wählen, daß dadurch Bedingungen erfüllt werden. Hierin liegt das Prinzip der sogenannten T r a n s f o r m a t i o n der Gleichungen. Wir werden nur zwei hierher gehörige Fälle anführen.

§. 319.

Es sei gegeben die Gleichung

$$1)\ x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots. + a_n = 0.$$

Man substituire $\frac{1}{g}y$ statt x (d. h. im Sinn des vorigen Para-

graphen, man setze $p = \frac{1}{g}$ und $q = 0$), und es entsteht

$$2)\ y^n + a_1 g y^{n-1} + a_2 g^2 y^{n-2} + \ldots. + a_n g^n = 0.$$

Und ist aus 2) y gefunden, so ist $x = \frac{1}{g} y$.

Dieser Umformung bedient man sich, Nenner zu beseitigen. Sämmtliche Nenner der Gleichung 1) fallen fort, wenn man g gleich dem Generalnenner setzt; oft reicht eine kleinere Zahl aus.

Die Gleichung 2) entsteht aus 1), indem man y setzt statt x, und die Glieder der (vollständig gedachten) Gleichung 1) der Reihe nach mit $1, g, g^2, \ldots. g^n$ multiplicirt.

§. 320.

Eine nicht reducirte Gleichung vom nten Grade

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots. + a_n = 0$$

reduciren heißt, aus dieser Gleichung eine reducirte Gleichung vom nten Grade

$$y^n + b_2 y^{n-2} + \ldots. + b_n = 0$$

ableiten, welche einen anderen Unbekannten y enthält, und welche zu der ersteren nicht reducirten Gleichung in einer solchen Beziehung steht, daß, wenn aus der reducirten Gleichung der Unbekannte y ermittelt ist, auch der Unbekannte x bekannt sei, welcher der nicht reducirten Gleichung zugehört.

§. 321.

Aufgabe. Die nicht reducirte Gleichung vom nten Grade

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots. + a_n = 0$$

zu reduciren.

Auflösung. Man substituire nach §. 318 für x die Funktion $py + q$, während vorläufig p und q als unbestimmt gelten. Es entsteht die Gleichung 2) des §. 318. Damit diese eine reducirte werde, setze man

$$nq + a_1 = 0$$

d. h.

$$q = -\frac{a_1}{n}$$

p bleibt unbestimmt, darf also beliebig gewählt werden. Der Einfachheit wegen setzt man p gleich 1.

Will man also die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots. + a_n = 0$$

reduciren, so substituire man

$$y - \frac{a_1}{n}$$

statt x; und ist die reducirte Gleichung nach y entwickelt, so hat man in $y - \frac{a_1}{n}$ das x der ursprünglichen Gleichung.

Auch reducirt sich die Gleichung, wenn man $py - \frac{a_1}{n}$ statt x substituirt, unter p einen beliebigen Ausdruck verstanden.

II. Von den Gleichungen des dritten Grades.

§. 322.

Aufgabe. Die drei Wurzeln der reinen Gleichung des dritten Grades

$$x^3 \mp a = 0$$

zu bestimmen.

Auflösung. Es sei zunächst

$$x^3 - a = 0$$

und es folgt

$$x = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{+1}$$

oder nach §. 167

$$x = \sqrt[3]{a}\left(\operatorname{Cos}\frac{2g\pi}{3} + i\operatorname{Sin}\frac{2g\pi}{3}\right)$$

während statt g die Werthe 0, 1, 2, oder 0, +1, −1, zu setzen sind. Die Substitution der letzten Werthe liefert

$$x = \sqrt[3]{a}(\operatorname{Cos} 0 + i \operatorname{Sin} 0)$$

$$x = \sqrt[3]{a}(\operatorname{Cos}\tfrac{2}{3}\pi + i\operatorname{Sin}\tfrac{2}{3}\pi)$$

$$x = \sqrt[3]{a}[\operatorname{Cos}(-\tfrac{2}{3}\pi) + i\operatorname{Sin}(-\tfrac{2}{3}\pi)].$$

Es ist $\cos\frac{2}{3}\pi = -\cos\frac{1}{3}\pi = -\sin\frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{2}$, und $\sin\frac{2}{3}\pi = \sin\frac{1}{3}\pi = \cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; daher entsteht

$$x = \sqrt[3]{a}\cdot 1$$
$$x = \sqrt[3]{a}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \sqrt[3]{a}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

und dies sind die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 - a = 0$, oder, mit anderen Worten, die drei Werthe von $\sqrt[3]{a}$.

Ist andererseits

$$x^3 + a = 0$$

so folgt

$$x = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{-1}$$

oder

$$x = \sqrt[3]{a}\left[\cos\frac{(2g+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(2g+1)\pi}{3}\right]$$

während für g die Werthe 0, 1, 2, oder 0, + 1, − 1 zu setzen sind; und es ergeben sich

$$x = \sqrt[3]{a}\cdot(-1)$$
$$x = \sqrt[3]{a}\cdot\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \sqrt[3]{a}\cdot\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

als Wurzeln der Gleichung $x^3 + a = 0$.

Die Gleichung

$$x^3 \mp a = 0$$

löst sich auch in folgender Weise: Zuerst hat man

$$x = \pm\sqrt[3]{a}.$$

Daher ist $x \mp \sqrt[3]{a}$ Faktor der Gleichung; durch diesen Faktor dividirt entsteht die quadratische Gleichung

$$x^2 \pm x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 0$$

in deren Wurzeln die beiden übrigen Wurzeln der gegebenen Gleichung sich darbieten.

§. 323.

1) Die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

sind einander gleich, und jede ist $-\frac{a}{3}$, wenn

$$b = \frac{a^2}{3} \text{ ist und } c = \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Denn die Gleichung ist alsdann $\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 = 0$.

2) Sind die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ einander gleich, so ist $b = \frac{a^2}{3}$ und $c = \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

Denn ist x^1 jede der Wurzeln, so ist die Gleichung $(x - x_1)^3 = 0$ oder $x^3 - 3x_1x^2 + 3x_1^2x - x_1^3 = 0$, und setzen wir $-3x_1 = a$, $3x_1^2 = b$, $-x_1^3 = c$, so erhellet die Behauptung.

3) Die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ hat, unter der Voraussetzung, daß nicht gleichzeitig b und c Null sind, niemals drei gleiche Wurzeln, also höchstens deren zwei.

Denn wären die drei Wurzeln der Gleichung einander gleich, so müßte, da a Null ist, nach 2) auch b Null sein und zugleich c.

§. 324.

Jede Gleichung dritten Grades, deren drei Wurzeln nicht einander gleich sind, läßt sich auf die Form

$$x^3 + bx + c = 0$$

bringen, während nicht gleichzeitig b und c Null sind.

Denn reduciren wir die Gleichung

$$1)\quad y^3 + ny^2 + py + q = 0$$

indem wir nach §. 321 $x - \frac{n}{3}$ statt y setzen, so entsteht

$$2)\quad x^3 + \left(p - \frac{n^2}{3}\right)x + \left(\frac{2n^3}{27} - \frac{np}{3} + q\right) = 0.$$

Sollte nun $p - \frac{n^2}{3} = 0$

sein, zugleich

$$\frac{2n^3}{27} - \frac{np}{3} + q = 0$$

so folgte hieraus $p = \frac{n^2}{3}$ und $q = \left(\frac{n}{3}\right)^3$. Das ist aber nicht der Fall, so lange die Gleichung 1) nicht drei gleiche Wurzeln hat. Daher erhellet der Satz.

§. 325.

Die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + bx + c = 0$$

in welcher nicht gleichzeitig b Null ist und c, sind sämmtlich reell, wenn

b negativ

ist und in absoluter Hinsicht

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 \geqq \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Die Gleichung hat dagegen zwei imaginaire Wurzeln und eine reelle, wenn

b negativ

und in absoluter Hinsicht

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 < \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

ist, oder wenn

b positiv oder Null ist.

Nach §. 317 sind imaginaire Wurzeln von Gleichungen stets paarweise vorhanden. Daher kann eine Gleichung dritten Grades nur entweder drei reelle Wurzeln haben, oder eine reelle und zwei imaginaire. — Und hat eine Gleichung des dritten Grades zwei gleiche Wurzeln, so sind ihre sämmtlichen Wurzeln reell; denn hätte die Gleichung imaginaire Wurzeln, so hätte sie deren zwei, diese wären ungleich nach §. 317, und da die dritte Wurzel reell ist, so könnten nicht zwei gleiche Wurzeln sich vorfinden.

Die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ hat nach den Erörterungen in §. 303 drei reelle Wurzeln, sobald die Funktion $x^3 + bx + c$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, ein Maxi-

mum gewinnt, das positiv, und ein Minimum, das negativ ist. Die Gleichung hat ferner, nach dem vorhin Bemerkten, drei reelle Wurzeln, sobald zwei ihrer Wurzeln gleich sind.

Wir untersuchen zuerst, von welcher Beschaffenheit die Coefficienten b und c sein müssen, damit die Funktion $x^3 + bx + c$ ein Maximum habe, das positiv, und ein Minimum, das negativ sei.

Aus $$f = x^3 + bx + c$$
folgt $$\partial f_x = 3x^2 + b$$
$$\partial^2 f_x = 6x$$
$$\partial^3 f_x = 6$$
und $$3x^2 + b = 0$$
liefert $$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{3}}.$$

Soll die Funktion für diesen Werth von x einen größten oder kleinsten Werth erhalten, so muß b negativ, d. h. weder positiv noch Null sein (b kann nicht Null sein, weil sonst $x = 0$, ferner $\partial^2 f_x = 0$ und dabei $\partial^3 f_x$ constant sein würde; und dann wäre dte Funktion f kein Maximum oder Minimum, sondern im Wachsthum). Wir nehmen b negativ, also
$$f = x^3 - bx + c$$
und substituiren $-\sqrt{\frac{b}{3}}$ und $+\sqrt{\frac{b}{3}}$ statt x. Der erste Werth liefert, da die zweite Ableitung mit x einerlei Vorzeichen hat, das Maximum, der zweite das Minimum. Das Maximum selbst ist
$$\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c$$
das Minimum $$-\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c.$$

Das Maximum soll positiv, das Minimum negativ sein, als
$$\alpha)\quad \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c > 0$$
$$\beta)\quad -\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c < 0..$$

Ist c positiv, so tritt α) von selbst ein, damit aber β) erfüllt werde, muß in absoluter Hinsicht $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}$ größer sein als c. Ist c negativ, so versteht sich β) von selbst, und es muß, damit α) in Erfüllung gehe, in absoluter Hinsicht $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}$ größer als c sein. Die Bedingungen α) und β) sind also stets erfüllt, sobald in absoluter Hinsicht

$$\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} > c$$

oder

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Die Funktion $x^3 + bx + c$ hat hiernach ein positives Maximum und ein negatives Minimum, und die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ drei reelle Werthe, sobald

b negativ

ist und

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ hat wegen der Voraussetzung, daß nicht b und c gleichzeitig Null sind, höchstens zwei gleiche Wurzeln. Nach §. 316 sind zwei gleiche Wurzeln vorhanden, wenn

$$f = x^3 + bx + c$$

und

$$\partial f_x = 3x^2 + b$$

für einerlei Werth von x in Null übergehen. Der Werth von x muß reell sein, weil er Wurzel der Gleichung ist, und die Gleichung drei reelle Wurzeln hat, sobald sie zwei gleiche besitzt. — Die Ableitung ist Null für $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{3}}$. Damit dieser Ausdruck reell ausfalle, muß b negativ sein, oder Null. Setzen wir b negativ und substituiren $\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$ in $f = x^3 - bx + c$, so entsteht

$$\mp\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c$$

und dies ist Null für das eine oder das andere Vorzeichen, wenn in absoluter Hinsicht

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Nehmen wir $b = 0$, so müßte, damit zugleich f Null werde, auch c Null sein; und das wäre gegen die Voraussetzung.

Die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ hat demnach auch drei reelle Wurzeln, wenn

b negativ

und $$\left(\frac{b}{3}\right)^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Damit ist der eine Theil des Satzes erwiesen. Der andere überblickt sich leicht nach diesen Erörterungen.

§. 326.

Aufgabe. Die reducirte kubische Gleichung

$$x^3 + bx + c = 0$$

aufzulösen.

Auflösung. Man setze statt x die Summe $y + z$; das liefert

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + b(y + z) + c = 0$$

oder $$y^3 + 3yz(y + z) + z^3 + b(y + z) + c = 0$$

oder $$y^3 + z^3 + c + (3yz + b)(y + z) = 0.$$

Ein Werth von x, welcher der gegebenen Gleichung entspricht, wird jedesmal erhalten in der Summe solcher Werthe von y und z, für welche die Summe

$$y^3 + z^3 + c + (3yz + b)(y + z)$$

zu Null wird. Diese Summe ist gleich Null, wenn $y^3 + z^3 + c = 0$ ist, und zugleich $3yz + b = 0$ ist. Daher wird ein Werth von x auch erhalten in der Summe solcher Werthe von y und z, welche den Gleichungen

$$1)\quad y^3 + z^3 + c = 0$$

$$2)\quad 3yz + b = 0$$

genügen, so daß wir, um x zu finden, nur nöthig haben, aus den beiden letzten Gleichungen y und z zu entwickeln, und die Summe der gefundenen Werthe zu bilden.

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$3)\quad z = -\frac{b}{3y}.$$

Diesen Werth substituiren wir in 1), und es entsteht

$$y^3 - \frac{b^3}{27y^3} + c = 0$$

oder

$$y^6 + cy^3 - \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 0.$$

Hieraus ist

$$y = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Nach 3) ist

$$z = -\frac{b}{3y}$$

oder, wenn man für y den Werth setzt,

$$z = -\frac{b}{3\sqrt[3]{-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}}.$$

Den letzten Ausdruck zu reduciren, werde Zähler und Nenner mit $\sqrt[3]{-\frac{c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$ multiplicirt, das liefert

$$z = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Man hat daher

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Diese Auflösung ist unter dem Namen der Cardanischen Formel bekannt.

Der für x erhaltene Ausdruck stellt neun verschiedene Werthe dar. Denn bezeichnen wir der Kürze wegen den ersten Summand

durch $\sqrt[3]{A}$, den andern durch $\sqrt[3]{B}$, so stellt nach §. 320 der erste Summand die drei Werthe

$$\sqrt[3]{A},\quad \sqrt[3]{A}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \sqrt[3]{A}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

vor, der andere die drei Werthe

$$\sqrt[3]{B},\quad \sqrt[3]{B}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \sqrt[3]{B}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

und wenn man jeden der drei Werthe von $\sqrt[3]{A}$ zu jedem der drei Werthe von $\sqrt[3]{B}$ addirt, ergeben sich neun verschiedene Summen. Die cubische Gleichung hat aber nur drei Auflösungen. Daher entsteht die Frage, welche drei der gedachten neun Summen der Gleichung als Wurzeln entsprechen. Diese Frage beantwortet sich durch die Gleichung 2). Nach derselben muß

$$yz = -\frac{b}{3}$$

sein, d. h.

$$\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B} = -\frac{b}{3}$$

und das trifft nur zu für folgende Werthe:

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

$$x = \sqrt[3]{A}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{B}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{A}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{B}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Hierin bestehen also die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Die Cardanische Formel ist ohne Weiteres anwendbar, so lange die in ihr vorkommenden Quadratwurzeln reell bleiben. Dies ist der Fall, wenn b positiv oder Null, wenn b negativ und in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 < \left(\frac{c}{2}\right)^2$, endlich, wenn b negativ und in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ ist; d. h. wenn die Gleichung eine reelle und zwei imaginaire Wurzeln hat, und

wenn sie drei reelle Wurzeln hat, unter denen sich aber zwei gleiche befinden. — Ist dagegen b negativ und in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$, so hat die Gleichung bloß reelle und ungleiche Wurzeln, aber die Cardanische Formel wird imaginair, und es muß für diesen Fall eine weitere Operation eintreten, die Wurzeln der Gleichung in reeller Gestalt zu erhalten.

Es sei

$$x^3 - bx + c = 0$$

also b negativ, dabei in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Die Cardanische Formel liefert

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

oder

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{-1}}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{-1}}.$$

Wir setzen

$$-\frac{c}{2} = p, \quad \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = q$$

so ist

$$-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{-1} = p + qi$$

$$-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{-1} = p - qi.$$

Es sei

$$p + qi = r(\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sin}\phi)$$

$$p - qi = r(\operatorname{Cos}\phi - i\operatorname{Sin}\phi)$$

dann ist

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} = + \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

$$\alpha) \quad \operatorname{Cos}\phi = \frac{p}{r} = \left(-\frac{c}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

und es ist

$$\beta) \quad \sqrt[3]{p + qi} = \sqrt{\frac{b}{3}}\left(\operatorname{Cos}\frac{2g\pi + \phi}{3} + i \operatorname{Sin}\frac{2g\pi + \phi}{3}\right)$$

$$\gamma) \quad \sqrt[3]{p - qi} = \sqrt{\frac{b}{3}}\left(\operatorname{Cos}\frac{2g\pi + \phi}{3} - i \operatorname{Sin}\frac{2g\pi + \phi}{3}\right)$$

während g die Werthe 0, 1, 2, oder 0, + 1, — 1 repräsentirt. Nun ist

$$x = \sqrt[3]{p + qi} + \sqrt[3]{p - qi}$$

und hieraus ergeben sich, wenn wir für jede der Wurzeln ihre drei Werthe aus β) und γ) setzen, neun verschiedene Werthe von x. Als Wurzeln der Gleichung können aber diesmal nur die rellen Werthe dienen; lassen wir daher die imaginairen Summanden $+ i \operatorname{Sin}\frac{2g\pi + \phi}{3}$ und $- i \operatorname{Sin}\frac{2g\pi + \phi}{3}$ sich heben, so erhalten wir in

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\operatorname{Cos}\frac{2g\pi + \phi}{3}$$

unter g die Werthe 0, 1, 2 oder 0, + 1, — 1 verstanden, die drei Wurzeln der Gleichung. Diese sind demnach

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\phi$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\operatorname{Cos}\frac{2\pi + \phi}{3}$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\operatorname{Cos}\frac{2\pi - \phi}{3}$$

während φ sich nach α) durch

$$\operatorname{Cos}\phi = -\frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

bestimmt.

Der Winkel ϕ ist spitz, wenn c negativ, stumpf, wenn c positiv ist. Ist ϕ stumpf, so kann man $\phi = \frac{1}{2}\pi + \gamma$ setzen, und hat dann

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{3}\phi = \text{Cos}(\tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{1}{3}\gamma) = \text{Cos}[\tfrac{1}{2}\pi - (\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{3}\gamma)] = \text{Sin}\,\frac{\pi - \gamma}{3}$$

$$\text{Cos}\frac{2\pi + \phi}{3} = \text{Cos}(\tfrac{5}{6}\pi + \tfrac{1}{3}\gamma) = \text{Cos}[\tfrac{1}{2}\pi + (\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\gamma)] = -\text{Sin}\frac{\pi + \gamma}{3}$$

$$\text{Cos}\frac{2\pi - \phi}{3} = \text{Cos}(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{3}\gamma) = \text{Sin}\,\tfrac{1}{3}\gamma$$

weiter
$$\text{Cos}(\tfrac{1}{2}\pi + \gamma) = -\frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

oder
$$-\text{Sin}\,\gamma = -\frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

also
$$\text{Sin}\,\gamma = \frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}.$$

Ist daher in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$ und ist gegeben

$$x^3 - bx - c = 0$$

so setze man

$$\text{Cos}\,\phi = \frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$$

und dann ist

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{3}\phi$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\text{Cos}\frac{2\pi + \phi}{3}$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\text{Cos}\frac{2\pi - \phi}{3}.$$

Ist aber gegeben

$$x^3 - bx + c = 0$$

so kann man setzen

$$\text{Sin}\,\phi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$$

und hat dann

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{3}\phi$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi - \phi}{3}$$

$$x = -2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi + \phi}{3}.$$

Die letztern Erörterungen sind entbehrlich. Es genügt, festzuhalten, daß bei beliebigem Vorzeichen von c

$$\mathrm{Cos}\,\phi = \left(-\frac{c}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

ist, und dann

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2g\pi + \phi}{3}.$$

§. 327.

Gleichungen von der Form

$$y^{3n} + ay^n + b = 0$$

lassen sich lösen, indem man $y^n = x$ setzt, wodurch

$$x^3 + ax + b = 0$$

entsteht; und ist hieraus x gefunden, so hat man $y = \sqrt[n]{x}$.

§. 328.

Für die Gleichungen des vierten Grades hat man keine allgemeine Auflösung entdeckt, deren man sich praktisch bedienen möchte; für Gleichungen noch höherer Grade aber überhaupt keine allgemeinen Auflösungen gefunden. Die reellen Wurzeln von Gleichungen des vierten, fünften u. s. w. Grades können indeß versuchsweise ermittelt werden, wenn die Coefficienten der Gleichungen numerisch gegeben sind. Die folgende Abtheilung giebt zu solcher versuchsweisen Bestimmung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen Anleitung.

In theoretischem Interesse mag beiläufig eine Lösung der Gleichung vierten Grades hier Platz finden.

§. 329.

Aufgabe. Die reducirte Gleichung des vierten Grades

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

aufzulösen.

Auflösung. Zur gegebenen Gleichung werde

$$2nx^2 + n^2 = 2nx^2 + n^2$$

addirt, unter n einen vorläufig willkürlichen, später zu bestimmenden Ausdruck verstanden. Es entsteht

$$(x^2 + n)^2 = (a + 2n)x^2 + bx + (c + n^2).$$

Der Kürze wegen setzen wir

$$a + 2n = q$$
$$c + n^2 = r.$$

Die erhaltene Gleichung erhält dadurch die Form

$$(x^2 + n)^2 = qx^2 + bx + r$$

und es folgt

$$q(x^2 + n)^2 = q^2x^2 + bqx + qr$$
$$= q^2x^2 + bqx + qr + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}$$

oder

$$\alpha)\quad q(x^2 + n)^2 = \left(qx + \frac{b}{2}\right)^2 + qr - \frac{b^2}{4}.$$

Als Bedingung für n setzen wir jetzt

$$qr - \frac{b^2}{4} = 0$$

d. h.

$$(a + 2n)(c + n^2) - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$ac + an^2 + 2cn + 2n^3 - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$\beta)\quad n^3 + \frac{a}{2}n^2 + cn + \frac{4ac - b^2}{8} = 0.$$

Diese Gleichung dritten Grades bestimmt n. Es geht dann die Gleichung α) über in

$$q(x^2 + n)^2 = \left(qx + \frac{b}{2}\right)^2$$

und hieraus ergiebt sich

$$x^2 + n = \pm\left[(a+2n)x + \frac{b}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{a+2n}}$$

$$x^2 \mp \sqrt{a+2n}\cdot x = \pm\frac{b}{2\sqrt{a+2n}} - n$$

$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a+2n} \pm \sqrt{\frac{a+2n}{4} \pm \frac{b}{2\sqrt{a+2n}} - n}$$

$$x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{a+2n} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a - 2n + \frac{2b}{\sqrt{a+2n}}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{a+2n} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a - 2n + \frac{2b}{\sqrt{a+2n}}}.$$

III. Von den numerischen Gleichungen.

§. 330.

Sind sämmtliche Coefficienten einer geordneten Gleichung ganze Zahlen, so sind die reellen Wurzeln der Gleichung ganze Zahlen oder irrationale.

Die Gleichung sei

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots. + a = 0.$$

Wollte man annehmen, der Bruch $\frac{p}{q}$ sei Wurzel der Gleichung, so müßte

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots. + a_n = 0$$

sein, oder mit q^{n-1} multiplicirt,

$$\frac{p^n}{q} + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \ldots. + a_nq^{n-1} = 0.$$

Dies ist aber nicht möglich, da der erste Summand ein Bruch ist, während alle übrigen ganze Zahlen sind.

§. 331.

Wenn eine Gleichung $f = 0$ beliebig viele mehrfache Wurzeln hat, so läßt sich eine Gleichung herstellen, welche alle ver-

schiedenen Wurzeln jener Gleichung als bloß einfache Wurzeln enthält.

Es sei

$$f = (x - \alpha)^p (x - \beta)^q \ldots. V$$

während V das Produkt aller in f vorhandenen einfachen Faktoren vorstellt. Man bilde den größten gemeinschaftlichen Theiler t zu f und ∂f_x. Dieser hat nach §. 315 die Form

$$(x - \alpha)^{p-1} (x - \beta)^{q-1} \ldots.$$

Wenn man daher die Gleichung $f = 0$ durch t dividirt, so entsteht

$$(x - \alpha)(x - \beta) \ldots. V = 0$$

und diese Gleichung enthält alle verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f = 0$ als einfache Wurzeln.

§. 332.

Wenn zwei auf einander folgende Glieder einer algebraischen Summe einerlei Vorzeichen haben, sagt man, hier finde eine Zeichenfolge, wenn zwei auf einander folgende Glieder dagegen verschiedene Vorzeichen haben, sagt man, hier finde ein Zeichenwechsel Statt.

In der Summe z. B.

$$+ a + b - c + d - e - f - h - k$$

erscheinen vier Zeichenfolgen und drei Zeichenwechsel.

§. 333.

Die Gleichung $f = 0$ sei vom nten Grade und habe bloß einfache Wurzeln.

Die erste Ableitung ∂f_x sei hier bezeichnet durch f^1. Es werde f durch f^1 dividirt, der Rest entgegengesetzt genommen, und darauf bezeichnet durch f^2. Es werde weiter f^1 durch f^2 dividirt, der Rest entgegengesetzt genommen und darauf bezeichnet durch f^3. U. s. f. Die Funktionen f^1, f^2, f^3 .... sind beziehlich vom $(n - 1)$sten, $(n - 2)$ten, ... Grade; die Funktion f^n, also ist vom $(n - n)$ten Grade, d. h. constant, und mit ihr bricht die Division ab.

Es seien a und b zwei ungleiche, sonst beliebige reelle Werthe, und zwar $a < b$, und man bilde die Reihen

$$\text{a)}\ f_a,\ f^1_a,\ f^2_a,\ f^3_a \ldots\ f^n_a$$
$$\text{b)}\ f_b,\ f^1_b,\ f^2_b,\ f^3_b \ldots\ f^n_b.$$

Ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe a) eben so groß wie die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe b), so liegt keine reelle Wurzel der Gleichung $f = 0$ innerhalb der Gränzen a und b; ist aber die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe a) um q größer als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe b), so befinden sich q reelle Wurzeln der Gleichung $f = 0$ innerhalb der Gränzen a und b.

Der Beweis läßt sich folgendermaßen führen:

A) f und f^1, d. h. ∂f_x, haben keinen gemeinschaftlichen Theiler, weil vorausgesetzt worden, die Gleichung habe nur einfache Wurzeln. Daher giebt es keinen Werth von x, für welchen gleichzeitig f und f^1 in Null übergehen; und hieraus erhellet, daß wenn f gleich Null ist für einen Werth von x, es dabei niemals ein Maximum ist oder ein Minimum, sondern im Wachsthum steht oder im Abnehmen, d. h. vom Negativen ins Positive übergeht oder umgekehrt. Die Funktion f kann auch nicht für zwei unmittelbar auf einander folgende Werthe x_1 und $x_1 \pm dx$ zu Null werden, weil, insofern dx gegen x_1 verschwindet, die Gleichung wiederum zwei gleiche Wurzeln hätte.

B) Die Quotienten, welche sich bei den auf einander folgenden Divisionen ergeben, seien $\phi^1, \phi^2, \phi^3, \ldots$ Dann ist

$$f = \phi^1 f^1 - f^2$$
$$f^1 = \phi^2 f^2 - f^3$$
$$f^2 = \phi^3 f^3 - f^4$$
u. s. f.

C) Zwei auf einander folgende Funktionen f^r und f^{r+1} gehen nicht für denselben Werth x_1 von x in Null über. Denn sonst hätten beide den Faktor $x - x_1$, und es wären f und f^1 theilbar durch $x - x_1$, welches aus B) [nach der Lehre von den Vielfachen und Theilern] folgt, aber gegen A) streitet.

D) Ist eine der Funktionen f^1, f^2, ..., etwa f^r, Null für $x = \alpha$, so haben die benachbarten Funktionen f^{r-1} und f^{r+1} ungleiche Vorzeichen für den Werth α von x.

Denn es ist

$$f^{r-1} = \phi^r f^r - f^{r+1}$$

und ist f^r_α Null, so folgt

$$f^{r-1}_\alpha = - f^{r+1}_\alpha.$$

E) Ist $f^r_\alpha = 0$, so ist nicht $f^{r+1}_{\alpha \pm dx}$ gleich Null, noch $f^{r-1}_{\alpha \pm dx}$. Denn wäre z. B. $f^{r+1}_{\alpha + dx} = 0$, so hätte man $f^{r+1}_\alpha + df^{r+1}_\alpha = 0$, oder $f^{r+1}_\alpha = 0$, weil df^{r+1}_α verschwindet gegen f^{r+1}_α; es wäre also gleichzeitig $f^r_\alpha = 0$ und $f^{r+1}_\alpha = 0$, welches gegen C) streitet, und damit gegen A).

F) sei nun f^r_α gleich Null. Dann sind f^{r-1}_α und f^{r+1}_α nicht Null und haben entgegengesetzte Vorzeichen, und es ist keiner der Werthe $f^{r-1}_{\alpha \pm dx}$ und $f^{r+1}_{\alpha \pm dx}$ gleich Null. Wegen des letztern Umstandes müssen $f^{r-1}_{\alpha - dx}$ und $f^{r-1}_{\alpha + dx}$ einerlei Vorzeichen mit f^{r-1}_α haben, eben so $f^{r+1}_{\alpha - dx}$ und $f^{r+1}_{\alpha + dx}$ einerlei Vorzeichen mit f^{r+1}_α. Und wenn wir die Funktionen

$$f^{r-1}, \quad f^r, \quad f^{r+1}$$

in Bezug auf ihre Vorzeichen betrachten, während $\alpha - dx$, α, $\alpha + dx$ statt x gesetzt werden, so können nur folgende Fälle eintreten

für $\alpha - dx$	$+ + -$	oder	$+ + -$	oder	$- + +$	oder	$- + +$
für α	$+ \; 0 \; -$		$+ \; 0 \; -$		$- \; 0 \; +$		$- \; 0 \; +$
für $\alpha + dx$	$+ - -$		$+ + -$		$- - +$		$- + +$
oder	$+ - -$	oder	$+ - -$	oder	$- - +$	oder	$- - +$
	$+ \; 0 \; -$		$+ \; 0 \; -$		$- \; 0 \; +$		$- \; 0 \; +$
	$+ + -$		$+ - -$		$- + +$		$- - +$.

Bei den drei Gliedern f^{r-1}, f^r, f^{r+1}, ist also die Anzahl der Zeichenwechsel für $x = \alpha - dx$ eben so groß, wie für $x = \alpha + dx$, und es hat $f^{r-1}_{\alpha - dx}$ einerlei Vorzeichen mit $f^{r-1}_{\alpha + dx}$, eben so $f^{r+1}_{\alpha - dx}$ mit $f^{r+1}_{\alpha + dx}$, wie schon vorher bemerkt worden. Auch

während x alle Werthe von a bis b durchläuft, $\partial^2 f_x$ stets positiv oder stets negativ, also ∂f_x stets im Wachsthum oder stets im Abnehmen, und dabei behalte ∂f_x einerlei Vorzeichen, gehe also nicht durch 0. Dann sind, wenn f_a und $\partial^2 f_a$ einerlei Vorzeichen haben, oder wenn ∂f_a in absoluter Hinsicht größer ist als ∂f_b (beides bedingt dasselbe, wie sich zeigen wird),

$$a - \frac{f_a}{\partial f_a} \text{ und } b - \frac{f_b}{\partial f_a},$$

wenn aber f_b und $\partial^2 f_b$ einerlei Vorzeichen führen, oder wenn ∂f_b in absoluter Hinsicht größer ist als ∂f_a,

$$a - \frac{f_a}{\partial f_b} \text{ und } b - \frac{f_b}{\partial f_b}$$

zwei engere Gränzen als a und b, zwischen welchen jene unbekannte Wurzel der Gleichung sich befindet.

I. Die zwischen a und b befindliche Wurzel der Gleichung bezeichne x'. Wir setzen

$$x' = a + z = b - z'$$

und es ist

$$f_{a+z} = f_{b-z'} = f_{x'} = 0.$$

II. Nach den Voraussetzungen unterscheiden wir zwei Hauptfälle. Entweder ist

$$f_a = - \text{ und } f_b = +$$

dabei alsdann für alle Werthe von x von a bis b

$$\partial f = +$$

und

$$\partial^2 f = + \text{ oder } \partial^2 f = -$$

oder es ist

$$f_a = + \text{ und } f_b = -$$

und dabei für jedes x innerhalb der Gränzen a und b

$$\partial f = -$$

und

$$\partial^2 f = + \text{ oder } \partial^2 f = -.$$

Jeder dieser beiden Fälle umschließt daher zwei Unterfälle, je nachdem die zweite Ableitung innerhalb der Gränzen a und b stets positiv ist, oder stets negativ.

III. Nach §. 294 ist

$$f_{a+z} - f_a = \partial f_a dx + \partial f_{a+dx} dx + \ldots + \partial f_{a+z} dx$$

$$f_b - f_{b-z'} = \partial f_{b-z'} dx + \partial f_{b-z'+dx} dx + \ldots + \partial f_b dx$$

oder wegen I.

$$\alpha)\quad -f_a = \partial f_a dx + \ldots + \partial f_{a+z} dx$$

$$\beta)\quad f_b = \partial f_{b-z'} dx + \ldots + \partial f_b dx.$$

Die Anzahl der Summanden zur Rechten ist unendlich, und zwar ist sie in α) gleich $\frac{z}{dx}$, in β) gleich $\frac{z'}{dx}$.

IV. Nun sei

$$1)\quad f_a = -,\ f_b = +$$
$$\partial f = +$$
$$\partial^2 f = +.$$

Alsdann sind die sämmtlichen Glieder zur Rechten in α) und β) positiv, und sie schreiten in α) sowohl als in β) steigend fort. Das größte von allen ist $\partial f_b dx$.

Statt jedes Gliedes zur Rechten in α) und β) denke man das größte $\partial f_b dx$ gesetzt, und es folgt, weil in α) die Anzahl der Glieder gleich $\frac{z}{dx}$ ist, und in β) gleich $\frac{z'}{dx}$

$$-f_a < z\partial f_b$$
$$f_b < z'\partial f_b$$

oder

$$z > -\frac{f_a}{\partial f_b}$$
$$z' > \frac{f_b}{\partial f_b}.$$

Es sei

$$2)\quad f_a = -,\ f_b = +$$
$$\partial f = +$$
$$\partial^2 f = -$$

In α) und β) sind dann wiederum sämmtliche Glieder zur Rechten positiv, aber sie fallen, und es ist $\partial f_a dx$ das größte. Dies größte Glied werde in α) und in β) statt jedes einzelnen gesetzt, und es folgt:

$$-f_a < z\partial f_a$$
$$f_b < z'\partial f_a$$

oder

$$z > -\frac{f_a}{\partial f_a}$$
$$z' > \frac{f_b}{\partial f_a}.$$

Es sei

$$3)\quad f_a = +,\ f_b = -$$
$$\partial f = -$$
$$\partial^2 f = +.$$

Die Glieder zur Rechten in α) und β) sind sämmtlich negativ und steigend, in absoluter Hinsicht also fallend, und es ist $\partial f_a dx$ absolut das größte Glied. Dies werde statt jedes anderen gesetzt, und es folgt

$$-f_a > z\partial f_a$$
$$f_b > z'\partial f_a$$

also mit dem negativen Werth ∂f_a dividirend

$$z > -\frac{f_a}{\partial f_a}$$
$$z' > \frac{f_b}{\partial f_a}.$$

Endlich sei

$$4)\quad f_a = +,\ f_b = -$$
$$\partial f = -$$
$$\partial^2 f = -.$$

Die Glieder in α) und β sind negativ und fallend, also $\partial f_b dx$ absolut das größte, und es folgt, dies statt jedes anderen setzend

$$z > -\frac{f_a}{\partial f_b}$$
$$z' > \frac{f_b}{\partial f_b}.$$

V. Die Quotienten $\frac{f_a}{\partial f_a}$ und $\frac{f_a}{\partial f_b}$ sind negativ, weil f_a und ∂f entgegengesetzte Vorzeichen führen; die Quotienten $\frac{f_b}{\partial f_a}$ und $\frac{f_b}{\partial f_b}$ dagegen positiv, weil die Zeichen von f_b und ∂f übereinstimmen. Daher ist in den Fällen IV. 2) und 3)

$$a + z > a - \frac{f_a}{\partial f_a} > a$$
$$b - z' < b - \frac{f_b}{\partial f_a} < b$$

und in den Fällen 1) und 4)

$$a + z > a - \frac{f_a}{\partial f_b} > a$$

$$b - z' < b - \frac{f_b}{\partial f_b} < b.$$

Es ist $a + z = b - z' = x'$, und man hat steigend in den Fällen 2) und 3):

$$a, \quad a - \frac{f_a}{\partial f_a}, \quad x', \quad b - \frac{f_b}{\partial f_a}, \quad b$$

in den Fällen 1) und 4):

$$a, \quad a - \frac{f_a}{\partial f_b}, \quad x', \quad b - \frac{f_b}{\partial f_b}, \quad b.$$

In den Fällen 2) und 3) sind demnach

$$a - \frac{f_a}{\partial f_a} \text{ und } b - \frac{f_b}{\partial f_a}$$

in den Fällen 1) und 4) aber

$$a - \frac{f_a}{\partial f_b} \text{ und } b - \frac{f_b}{\partial f_b}$$

engere Gränzen für x' als a und b.

In den Fällen 2) und 3) ist absolut

$$\partial f_a > \partial f_b$$

und es haben f_a und $\partial^2 f_a$ einerlei Vorzeichen; in den Fällen 1) und 4) ist

$$\partial f_b > \partial f_a$$

und es führen f_b und $\partial^2 f_b$ einerlei Vorzeichen.

Darin liegt das Gesetz.

§. 337.

Nach dem vorigen Paragraph lassen sich aus den Gränzen a und b der unbekannten Wurzel engere Gränzen a' und b' herstellen, aus diesen nach dem nämlichen Gesetz wiederum engere a'' und b'', aus diesen noch engere Gränzen a''' und b''' u. s. f. Man kann sich in solcher Weise der unbekannten Wurzel beliebig nähern, und so weit zwei Gränzen, etwa a''' und b''', in ihren Decimalstellen übereinstimmen, so weit geben sie die Wurzel selbst genau. Die Berechnung würde sich vereinfachen, wenn

man nur die einen Gränzen z. B. a', a'', a''' .... zu bestimmen nöthig hätte, und man würde mit diesen einen Gränzen ausreichen, sobald die Genauigkeit sich beurtheilen ließe, welche sie einzeln gewähren. Zur Bestimmung dieser Genauigkeit führt folgende Erörterung.

Es sei

$$b - a = q$$

und es sei

$$b' - a' = q'.$$

Die Wurzel befindet sich zwischen a' und b'; die Differenz δ' zwischen der Wurzel, und a' oder b' ist daher kleiner als q'.

Es ist entweder

$$b' = b - \frac{f_b}{\partial f_a} \text{ oder } b' = b - \frac{f_b}{\partial f_b}$$

und $$a' = a - \frac{f_a}{\partial f_a} \text{ und } a' = a - \frac{f_a}{\partial f_b}$$

folglich

$$b' - a' = b - a - \frac{f_b - f_a}{\partial f_a} \text{ oder } b' - a' = b - a - \frac{f_b - f_a}{\partial f_b}$$

d. h. $$1)\quad q' = q - \frac{f_b - f_a}{\partial f_a}$$

oder $$2)\quad q' = q - \frac{f_b - f_a}{\partial f_b}.$$

Nun ist

$$f_b = f_{a+q} = f_a + \partial f_a q + \partial^2 f_a \frac{q^2}{2!} + \ldots.$$

$$f_a = f_{b-q} = f_b - \partial f_b q + \partial^2 f_a \frac{q^2}{2!} - \ldots.$$

oder, wenn wir α und β als diejenigen, innerhalb der Gränzen a und b liegende Werthe betrachten, für welche die dritten Glieder die ergänzenden sind

$$3)\quad f_b = f_a + \partial f_a q + \partial^2 f_\alpha \frac{q^2}{2!}$$

$$4)\quad f_a = f_b - \partial f_b q + \partial^2 f_\beta \frac{q^2}{2!}.$$

Die Werthe aus 3) und 4) substituiren wir beziehlich in 1) und 2), und erhalten

$$5)\quad q' = -\frac{\partial^2 f_\alpha}{2\partial f_a} q^2$$

$$6)\quad q' = +\frac{\partial^2 f_\beta}{2\partial f_b} q^2.$$

Der erste Ausdruck gilt, wenn man sich der Gränze a, der andere, wenn man sich der Gränze b zu bedienen hat. Beide Ausdrücke sind positiv, der erste, weil, im Fall a gebraucht wird, die erste und die zweite Ableitung entgegengesetzte Vorzeichen führen, der andere, weil die Ableitungen gleiche Vorzeichen haben, wenn man b gebraucht. Wir dürfen daher nur die absoluten Werthe in Betracht ziehen.

Die Werthe α, β sind unbekannt. Es sei $\partial^3 f_x$, während x von a bis b wächst stets positiv oder stets negativ. Unter dieser Voraussetzung befindet sich $\partial^2 f_x$, während x von a bis b zunimmt, stets im Wachsthum oder stets im Abnehmen; und es muß entweder $\partial^2 f_a$ oder $\partial^2 f_b$ der größte Werth in absoluter Hinsicht sein, welchen $\partial^2 f_x$ annimmt unter dem gedachten Gange von x. Dieser größte Werth sei A, dann hat man, weil δ' kleiner als q' ist

$$\delta' < \frac{A}{2\partial f_a} q^2 \quad \text{oder} \quad \delta' < \frac{A}{2\partial f_b} q^2$$

und hierdurch ist die Genauigkeit der Annäherung bestimmt, da δ' die Differenz zwischen der neuen Gränze a' oder b' und der Wurzel ausdrückt. Ist $\frac{A}{2\partial f_a}$ oder $\frac{A}{2\partial f_b}$ ein echter Bruch, q ein Decimalbruch, so erhellet, daß dann jede neue Anwendung des Verfahrens im vorigen Paragraphen doppelt so viele genaue Decimalstellen liefern muß, als man bereits von der Wurzel kennt.

§. 338.

Aufgabe. Es ist eine Gleichung $f = 0$ mit reellen numerischen Coefficienten gegeben, zu deren Auflösung kein direkter Weg bekannt ist oder betreten werden mag, man soll die reellen Wurzeln versuchsweise bestimmen.

Auflösung. A) Man kann erstens rein versuchsweise zu Werke gehen. Zu dem Ende setze man irgend zwei ganze Zahlen q und q′ statt x und berechne die Werthe, welche f_x dadurch annimmt. Es sei $f_q = Q$, $f_{q'} = Q'$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, entweder haben Q und Q′ verschiedene Vorzeichen oder gleiche. — Haben Q und Q′ verschiedene Vorzeichen, so befindet sich zwischen q und q′ wenigstens eine Wurzel der Gleichung. Man wähle eine Zahl q″, zwischen q und q′ liegend, und berechne $f_{q''} = Q''$. Der Werth Q″ liegt zwischen Q und Q′ und es haben entweder Q und Q″ gleiche, und Q′ und Q″ verschiedene Vorzeichen, oder umgekehrt. Führen Q und Q″ verschiedene Vorzeichen, so befindet sich die Wurzel zwischen q und q″, haben Q″ und Q′ verschiedene Vorzeichen, so liegt die Wurzel zwischen q″ und q′. Man hat also immer entweder in q und q″ oder in q″ und q′ zwei engere Gränzen, als die vorigen q und q′, zwischen welchen eine Wurzel sich befindet, und kann durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens die Gränzen enger und enger ziehen, bis man die Wurzel zunächst in den Ganzen, dann weiter mit beliebig vielen Decimalstellen genau erhalten hat. — Führen Q und Q′ einerlei Vorzeichen, so liegt entweder keine Wurzel der Gleichung zwischen q und q′ oder es liegen mehrere dazwischen. Um zu prüfen, ob Wurzeln zwischen q und q′ sich befinden, setze man Werthe, welche zwischen q und q′ liegen, statt x in f; nimmt f für einen solchen Werth m ein Vorzeichen an, das nicht mit denen von Q und Q′ übereinstimmt, so giebt es Wurzeln zwischen q und q′ und zwar zunächst wenigstens eine zwischen q und m, und wenigstens eine zwischen m und q′, und man ist auf den ersten Fall zurückgekommen; behält f für alle Werthe von x zwischen q und q′ einerlei Vorzeichen, so liegt zwischen q und q′ keine Wurzel. Eine Wurzel der Gleichung kann dann nur größer als die größere oder kleiner als die kleinere der Zahlen q und q′ sein, je nachdem der Werth welchen f durch die größere oder durch die kleinere erhält, näher an Null sich befindet. Man setze daher statt x eine Zahl q″ in f, welche größer als die größere der Zahlen q und q′ ist, oder kleiner als die kleinere, je nachdem die Wurzel selbst größer als

die größere, oder kleiner als die kleinere ist, fahre fort, bis man zwei Zahlen gefunden hat, zwischen denen die Wurzel liegen muß, und schlage alsdann den oben angegebenen Weg ein, um x näher zu bestimmen.

Es sei z. B. gegeben die Gleichung

$$x^4 - 12x - 3 = 0.$$

Wir setzen statt x zuerst 5, dann 3, und erhalten $f5 = +562$, $f3 = +42$. Daher ist die Wurzel kleiner als 3. Setzen wir 2 statt x, so entsteht

$$f2 = -11.$$

Die Wurzel befindet sich also zwischen 2 und 3. Es ist

$$\begin{aligned} f2{,}3 &= -2{,}6 \\ f2{,}4 &= +1{,}3 \\ f2{,}35 &= -0{,}7\ldots. \\ f2{,}38 &= +0{,}5\ldots. \end{aligned}$$

Mit einer Genauigkeit von einer Decimalstelle ist also die Wurzel 2,3 .... Nun findet sich weiter

$$\begin{aligned} f2{,}36 &= -0{,}09\ldots. \\ f2{,}369 &= +0{,}06\ldots. \end{aligned}$$

Daher ist die Wurzel auf zwei Decimalstellen genau 2,36 .... U. s. f.

Es ereignet sich zuweilen, daß, wenn man statt x eine Reihe von Werthen setzt, sich die Funktion f zuerst dem Werth Null nähert und sich dann, ohne ihr Zeichen zu ändern, wieder von Null entfernt. Man befindet sich dann jedesmal in der Gegend eines Maximums oder Minimums der Funktion.

B) Das eben angedeutete Verfahren kann geregelt werden und vereinfacht durch die Anwendung der vorher aufgestellten Gesetze, und mit Rücksicht auf diese lassen wir eine zweite Auflösung unserer Aufgabe folgen:

Die Gleichung $f = 0$ habe bloß einfache Wurzeln. — Man bestimme nach §. 334 wie viele positive, wie viele negative Wurzeln die Gleichung hat, und ermittele, §. 333 anwendend, für jede einzelne Wurzel zwei Gränzen, zwischen welchen sie sich befindet, so daß also auch zwischen je zwei solcher Gränzen immer nur eine Wurzel liegt. Hierauf ziehe man, wie unter A), die

Negativen ins Positive, und es erhellet die Behauptung aus dem vorigen Paragraphen.

§. 286.

Wenn für den Werth x′ von x nicht bloß die erste Ableitung, sondern auch die zweite oder mehrere der folgenden in Null übergehen, so erfolgt die Beurtheilung der Sachlage nach Anleitung der folgenden Beispiele.

$$f_{x'} \text{ steigt}$$
$$\partial f_{x'} = 0 \ldots . + 0 + \text{Min.}$$
$$\partial^2 f_{x'} = 0 \ldots . - 0 +$$
$$\partial^3 f_{x'} = +.$$

Da nämlich $\partial^3 f_{x'} = +$, so geht $\partial^2 f_{x'}$ steigend durch seinen Werth 0, demnach aus — über $+$; deshalb ist $\partial f_{x'}$ Minimum bei seinem Werthe Null, und hat $+ 0 +$ nach §. 283; die Funktion endlich steigt nun bei $x' - dx$ und weiter bei $x' + dx$, schreitet also steigend im Zahlenkreise vor.

Aehnlich beurtheilt man die folgenden Fälle, indem man von unten nach oben vorgeht:

$$f_{x'} \text{ fällt}$$
$$\partial f_{x'} = 0 \ldots . - 0 - \text{Max}$$
$$\partial^2 f_{x'} = 0 \ldots . + 0 -$$
$$\partial^3 f_{x'} = -$$

$$f_{x'} = \text{Min.}$$
$$\partial f_{x'} = 0 \ldots . - 0 +$$
$$\partial^2 f_{x'} = 0 \ldots . + 0 +$$
$$\partial^3 f_{x'} = 0 \ldots . - 0 +$$
$$\partial^4 f_{x'} = +$$

$$f_{x'} = \text{Max.}$$
$$\partial f_{x'} = 0 \ldots . + 0 -$$
$$\partial^2 f_{x'} = 0 \ldots . - 0 -$$
$$\partial^3 f_{x'} = 0 \ldots . + 0 -$$
$$\partial^4 f_{x'} = -$$

u. s. w.

§. 287.

Sind für den Werth x' von x die ersten $2n+1$ Ableitungen gleich Null, und ist die nächst folgende $\mp$, so ist die Funktion beziehlich ein Minimum oder ein Maximum.

Sind die ersten $2n$ Ableitungen gleich Null und ist die nächst folgende $\pm$, so ist die Funktion beziehlich im Steigen oder im Fallen.

Erhellet nach dem vorigen Paragraphen.

§. 288.

Wenn für den Werth x' von x nicht bloß die erste Ableitung, sondern zugleich die zweite oder mehrere der folgenden Ableitungen unendlich werden, so erfolgt die Beurtheilung der Sachlage nach §. 285 indem man die Vorzeichen bestimmt, welche die erste Ableitung bei den Werthen $x'-dx$ und $x'+dx$ gewinnt; oder nach §. 276 indem man $f_{x'\mp dx}$ mit $f_{x'}$ zu vergleichen trachtet.

Ergeben sich bei der ersteren Weise die Vorzeichen der Ableitung nicht ungleich, so bedingt $+\infty+$ Steigen der Funktion, $-\infty-$ Fallen.

§. 289.

Auch vermittelst der Taylorschen Reihe lassen sich die erlangten Resultate im Ganzen genommen herleiten, wie folgt:

§. 290.

1) Eine Funktion f_x ist im Wachsthum oder im Abnehmen für den besonderen Werth x_I von x, je nachdem die erste Ableitung ∂f_x einen positiven oder einen negativen Werth annimmt, wenn x_I statt x in ihr gesetzt wird.

Ist ∂f_{x_I} positiv, so ist

$$f_{x_I+dx} = f_{x_I} + \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 + \dots$$

und

$$f_{x_I-dx} = f_{x_I} - \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 + \dots$$

Wenn nun, wie wir voraussetzen, keine der Ableitungen unendlich ist, so macht die Summe des zweiten Gliedes und aller folgenden der erstern Reihe etwas Positives aus, die Summe des zweiten Gliedes und aller ihm folgenden der unteren Reihe dagegen etwas Negatives. Folglich ist

$$f_{x_I - dx} < f_{x_I} < f_{x_I + dx}.$$

Ist ∂f_{x_I} negativ, so ist

$$f_{x_I+dx} = f_{x_I} - \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 + \ldots.$$

$$f_{x_I-dx} = f_{x_I} + \partial f_{x_I} dx + \ldots.$$

und es folgt

$$f_{x_I - dx} > f_{x_I} > f_{x_I + dx}.$$

2) Eine Funktion f_x ist ein Größtes oder ein Kleinstes für den besonderen Werth x_I von x, wenn ihre erste Ableitung in Null übergeht für den Werth x_I von x, nicht aber die zweite, und je nachdem diese zweite Ableitung einen negativen oder einen positiven Werth annimmt.

Es ist

$$f_{x_I+dx} = f_{x_I} + \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 + \frac{\partial^4 f_{x_I}}{3!} dx^3 + \ldots.$$

$$f_{x_I-dx} = f_{x_I} - \partial f_{x_I} dx + \frac{\partial^2 f_{x_I}}{2!} dx^2 - \frac{\partial^3 f_{x_I}}{3!} dx^3 + \ldots.$$

Ist nun $\partial f_{x_I} = 0$, und $\partial^2 f_{x_I}$ etwas Negatives, so ist in beiden Reihen die Summe aller Glieder, welche dem ersten folgen, etwas Negatives, folglich

$$f_{x_I} > f_{x_I+dx}$$

zugleich $$f_{x_I} > f_{x_I-dx}$$

und f_{x_I} ein Maximum. Ist aber $\partial f_{x_I} = 0$, und $\partial^2 f_{x_I}$ positiv, so ist in beiden Reihen die Summe aller Glieder, welche dem ersten folgen, positiv, also

$$f_{x_I} < f_{x_I+dx}$$

zugleich $$f_{x_I} < f_{x_I-dx}$$

und f_{x_I} ein Minimum.

Geht sowohl die erste Ableitung ∂f_x als die zweite $\partial^2 f_x$ in Null über, für den Werth x_I, nimmt aber die dritte Ableitung $\partial^3 f_x$

einen positiven oder einen negativen Werth an, so ist die Funktion f_x im ersten Fall im Wachsthum, im anderen im Abnehmen für den Werth x_I von x. — Gehen die erste Ableitung, die zweite und die dritte in Null über, und nimmt die vierte einen negativen oder einen positiven Werth an, wenn x_I statt x gesetzt wird, so ist die Funktion beziehlich ein Maximum oder ein Minimum für den Werth x_I von x u. s. w., welches alles die Ansicht der Reihen darlegt.

§. 291.

Aufgabe. Es sei eine Funktion f_x von x gegeben, man soll entscheiden, ob die Funktion für besondere Werthe ihres Urveränderlichen ein Größtes oder ein Kleinstes werde, und, wenn das der Fall ist, diese besonderen Werthe bestimmen.

Auflösung. Die vorangegangenen Sätze leiten auf folgendes Verfahren:

1) Man bilde ∂f_x und $\partial^2 f_x$.

2) Man setze

$$\partial f_x = 0$$

betrachte x als unbekannt, und entwickele aus dieser Gleichung alle Werthe von x. Die Werthe, welche sich ergeben, seien durch x_I, x_{II}, x_{III} .... bezeichnet.

3) Man setze den einen dieser Werthe, x_I, statt x in $\partial^2 f_x$, und prüfe, ob $\partial^2 f_x$ dabei einen positiven oder einen negativen Werth annimmt, oder in Null übergeht. Nimmt $\partial^2 f_x$ einen positiven Werth an, so ist f_{x_I} ein Minimum; nimmt $\partial^2 f_x$ einen negativen Werth an, so ist f_{x_I} ein Maximum. Geht aber $\partial^2 f_x$ in Null über, so bilde man

4) die Ableitung $\partial^3 f_x$, setze in dieser x_I statt x, und prüfe, ob $\partial^3 f_x$ dadurch einen positiven oder einen negativen Werth erhält, oder in Null übergeht. Erhält $\partial^3 f_x$ einen positiven oder einen negativen Werth, so ist f_{x_I} beziehlich im Steigen oder im Fallen. Geht aber $\partial^3 f_x$ in Null über, so bilde man

5) $\partial^4 f_x$, setze in dieser Ableitung x_I statt x, und prüfe, ob $\partial^4 f_x$ dabei einen positiven oder einen negativen Werth annimmt, oder in Null übergeht. U. s. w. wie in 3).

6) Hat sich entschieden, daß f_{x_I} ein Maximum oder ein Minimum oder keins von beiden sei, so verfahre man mit jedem der Werthe x_{II}, x_{III} ...., wie man in 3), 4), 5) mit x_I verfahren ist.

7) Man untersuche endlich, ob Werthe von x bestehen, für welche die erste Ableitung unendlich wird, und untersuche ob für diese die Funktion einen größten oder kleinsten Werth erhält.

§. 292.

Es sei f eine Funktion der beiden Urveränderlichen x und y; und x_I und y_I seien zwei besondere Werthe von x und y. Ist

$$\partial f_{x_I} = 0, \quad \partial f_y = 0$$

und

$$(\partial^{1,1} f_{x_I, y_I})^2 - \partial^2 f_{x_I} \cdot \partial^2 f_{y_I} < 0$$

so ist die Funktion f für die Werthe x_I und y_I ein Größtes oder ein Kleinstes, je nachdem die Werthe

$$\partial^2 f_{x_I} \text{ und } \partial^2 f_{y_I}$$

beide negativ sind oder beide positiv.

Wir setzen $dx = zdy$. Damit dies aber die völlige Unabhängigkeit der Urvariabeln x und y nicht beeinträchtige, denken wir z nicht als einen bestimmten Werth, sondern unbestimmt, veränderlich.

Nach Taylors Satz ist dann

$$f_{x_I+dx,\, y_I+dy} = f_{x_I y_I} + (\partial f_{x_I} + \partial f_{y_I} \cdot z)dx + \tfrac{1}{2}(\partial^2 f_{x_I} + 2\partial^{1,1} f_{x_I, y_I} \cdot z + \partial^2 f_{y_I} \cdot z^2)dx^2 + \ldots.$$

und es leuchtet, wie bei den früheren Untersuchungen, ein, daß f_{x_I, y_I} ein Maximum oder ein Minimum ist, sobald

$$1)\quad \partial f_{x_I} + \partial f_{y_I} \cdot z = 0$$

und je nachdem

$$2)\quad \partial^2 f_{x_I} + 2\partial^{1,1} f_{x_I, y_I} \cdot z + \partial^2 f_y \cdot z^2$$

negativ ist oder positiv.

Die Gleichung 1) in Erfüllung zu bringen für das unbestimmte, veränderliche z, muß

$$\partial f_{x_I} = 0$$

sein und zugleich

$$\partial f_{y_I} = 0.$$

Es bleibt noch die Betrachtung des Ausdrucks unter 2) übrig, den wir der Kürze wegen durch

$$A + 2Bz + Cz^2$$

vorstellen wollen. Er soll negatig ausfallen oder positiv, also nicht gleich Null, für jeden Werth von z; und dies geht in Erfüllung, wenn die Gleichung

$$A + 2Bz + Cz^2 = 0$$

für z imaginaire Werthe liefert. Aus ihr entspringt

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}.$$

Dies ist imaginair, sobald

$$B^2 - AC < 0$$

und das geht nur in Erfüllung, wenn A und C beide positiv sind oder beide negativ.

Ist f ein Größtes oder Kleinstes für x_I und y_I, so ist sie nothwendig auch ein solches für x_I allein oder y_I allein; daher entsprechen $A < 0$ und $C < 0$ dem Maximum der Funktion, $A > 0$, $B > 0$ dem Minimum.

Darin liegen die Bedingungen des Satzes.

Diese Bedingungen können auch allein nach der Ansicht entwickelt werden, daß die Funktion für jeden der Veränderlichen ein Maximum oder Minimum sein muß.

§. 293.

Man sagt eine Funktion sei stetig innerhalb der Gränzen a und b, wenn sie sich stets um unendlich Kleines ändert, während ihr Urveränderlicher von a bis b fortschreitet. Dazu ist erforderlich, daß ihre erste Ableitung nicht unendlich werde für einen der Werthe des Urveränderlichen von a bis b.

§. 294.

Ist die Funktion f_x stetig innerhalb der Gränzen a und b, so ist

$$f_b - f_a = \partial f_a dx + \partial f_{a+dx} dx + \partial f_{a+2dx} dx + \ldots. + \partial f_{b-dx} dx$$

oder: insofern im letzten Gliede dx gegen b verschwindet,

$$f_b - f_a = df_a dx + \partial f_{a+dx} dx + \partial f_{a+2dx} dx + \partial f_{a+3dx} dx + \ldots + \partial f_b dx.$$

Es ist nämlich

$$f_b - f_a = f_{a+dx} - f_a + f_{a+2dx} - f_{a+dx} + f_{a+3dx} - f_{a+2dx} + \ldots + f_b - f_{b-dx}$$

denn zur Rechten heben sich alle Glieder bis auf $-f_a$ und f_b.

Daraus folgt

$$f_b - f_a = \frac{f_{a+dx} - f_a}{dx} dx + \frac{f_{a+2dx} - f_{a+dx}}{dx} dx + \ldots + \frac{f_b - f_{b-dx}}{dx} dx$$

und das ist das Gesetz.

Die Werthe ∂f_a, ∂f_{a+dx}, ... werden übrigens erhalten, indem man ∂f_x bildet, und darin statt x die Werthe a, $a+dx$ ... setzt.

Wir finden uns zu der Bemerkung veranlaßt, daß die Differenz $f_b - f_a$ immer besteht, die Funktion f mag innerhalb der Gränzen a und b stetig sein oder nicht; aber sie kann durch die rechts stehende Summe nur ausgedrückt werden, wenn die Funktion stetig ist.

§. 295.

Schließlich wollen wir die Funktionen

$$ax + b$$
$$ax^2 + bx + c$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + g$$

einer näheren Betrachtung unterwerfen, während der Urveränderliche x stetig wachsend alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

1) Es sei

$$f_x = ax + b$$

und es ist

$$\partial f_x = a.$$

Es sei a positiv. Dann ist $-\infty$ der erste Werth der Funktion, $+\infty$ ihr letzter. Die erste Ableitung ist von x unabhängig, also stets positiv, nämlich $+a$. Die Funktion befindet sich daher bei allen Werthen von x im Wachsthum, und sie durchläuft stetig wachsend alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$. — Ist a negativ, so beginnt die Funktion mit $+\infty$, und endigt mit $-\infty$, und sie durchläuft, beständig abnehmend, ihre Werthe, da jetzt die Ab-

leitung negativ, die Funktion also fortdauernd im Abnehmen ist. — Die Funktion hat keinen größten oder kleinsten Werth, d. h. keinen, der größer ist als seine beiden benachbarten Werthe oder kleiner. Die Werthe $-\infty$ und $+\infty$ sind ihre Gränzwerthe.

Die Funktion ist Null für $x = -\frac{b}{a}$. Ist a positiv, so durchläuft die Funktion alle Werthe von $-\infty$ bis 0, während x von $-\infty$ bis $-\frac{b}{a}$ steigt, die Funktion wird Null für $x = -\frac{b}{a}$, und durchläuft dann weiter alle Werthe von 0 bis $+\infty$, während x von $-\frac{b}{a}$ bis $+\infty$ zunimmt. Ist a dagegen negativ, so durchläuft die Funktion die Werthe von $+\infty$ bis 0, und weiter von 0 bis $-\infty$, während x beziehlich von $-\infty$ bis $+\frac{b}{a}$, und weiter von $+\frac{b}{a}$ bis $+\infty$ anwächst.

2) Es sei

$$f_x = ax^2 + bx + c$$

dann ist

$$\partial f_x = 2ax + b$$

$$\partial^2 f_x = 2a.$$

Die Funktion hat, wenn x unendlich groß ist, einerlei Vorzeichen mit ihrem ersten Gliede; denn zunächst verschwindet c gegen die anderen Glieder, und weiter ist $ax^2 + bx = x(ax + b)$, und wenn x unendlich groß ist, so verschwindet b gegen ax.

Es sei a positiv. Dann beginnt die Funktion mit $+\infty$, und endigt mit demselben Werth. Nach der vorigen Nummer geht, während x die Werthe

$$-\infty \ldots\ldots -\frac{b}{2a} \ldots\ldots +\infty$$

durchläuft, die erste Ableitung beziehlich durch die Werthe

$$-\infty \ldots\ldots \quad 0 \quad \ldots\ldots +\infty.$$

Die zweite Ableitung ist positiv. Für den Werth $-\frac{b}{2a}$ von x ist die erste Ableitung 0, die zweite positiv, die Funktion also ein

Minimum. Und während x von $-\infty$ bis $-\frac{b}{2a}$ fortschreitet, und weiter bis $+\infty$, nimmt die Funktion fortdauernd ab von $+\infty$ bis zu ihrem Minimum, und steigt dann wiederum fortdauernd bis $+\infty$. — Ist a dagegen negativ, so ist die Funktion für $x = +\frac{b}{2a}$ ein Maximum. Die Funktion steigt alsdann von $-\infty$ bis zu ihrem Maximum und fällt darauf bis $-\infty$, während x beziehlich von $-\infty$ bis $+\frac{b}{2a}$ und weiter bis $+\infty$ zunimmt. — Im ersten Fall ist das Minimum zugleich das absolute Minimum, im anderen das Maximum absolutes Maximum. Die Werthe $+\infty$ und $-\infty$ sind Gränzwerthe.

Hat die Funktion $ax^2 + bx + c$ ein Minimum, und ist dies Minimum positiv oder Null, so ist die Funktion für alle Werthe von x positiv; im ersten Fall nimmt die Funktion den Werth Null nicht an, im anderen erhält sie ihn einmal, nämlich wenn sie das Minimum erreicht. Hat die Funktion ein Minimum, und ist das Minimum negativ, so fällt die Funktion von $+\infty$ durch Null gehend bis zu dem negativen Minimum, und steigt darauf, abermals durch Null gehend, bis $+\infty$; sie nimmt dann also für zwei verschiedene Werthe von x den Werth Null an. — Hat die Funktion ein Maximum und ist das Maximum negativ oder Null, so ist die Funktion für alle Werthe von x negativ; im ersten Fall nimmt die Funktion den Werth Null nicht an, im anderen erreicht sie ihn einmal, nämlich im Maximum. Hat die Funktion ein Maximum, und ist das Maximum positiv, so geht die Funktion zweimal durch Null.

3) Es sei

$$f_x = ax^3 + bx^2 + cx + g$$

dann ist

$$\partial f_x = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Es sei a positiv. Die Funktion beginnt dann mit $-\infty$ und endigt mit $+\infty$. Die Ableitung ist die zuvor betrachtete Funktion. Ist ∂f_x stets positiv, so steigt f_x von $-\infty$ dauernd bis $+\infty$. Hat ∂f_x ein Minimum, das an sich negativ ist, so

bewegt sich ∂f_x zuerst in positiven Werthen dann in negativen, zuletzt wiederum in positiven. Die Funktion wird dann also zuerst steigen, dann fallen, dann wiederum dauernd steigen. Dabei gewinnt sie ein Maximum und ein Minimum; aber keins derselben ist absolut. U. s. w.

Uebungen und Praktisches.

§. 296.

1) Was heißt es, eine Funktion f_x sei bei einem Werth x_I von x im Wachsthum, im Abnehmen, oder ein Größtes, oder ein Kleinstes? Wenn eine Funktion f_x für den Werth a von x ein Größtes ist, kann sie dann für andere Werthe von x noch größer sein, oder kann sie kleiner sein als f_b, während sie ein kleinstes ist für den Werth b von x? Was verstehen wir unter dem absoluten Maximum oder Minimum einer Funktion? Für welche Werthe von x steht eine Funktien f_x im Wachsthum, im Abnehmen, ist sie ein Größtes, ein Kleinstes? Wann ist $f_{x,y}$ ein Größtes oder ein Kleinstes?

---

2) Welchen Gang nimmt die Funktion $2x^3 - 3x^2 - 36x$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ anwächst?

Die Funktion beginnt mit $-\infty$, wächst bis $+44$, nimmt darauf ab bis -81 und wächst von hier an bis $+\infty$.

Es ist nämlich

$$\partial f_x = 6x^2 - 6x - 36$$
$$\partial^2 f_x = 12x - 6.$$

Aus

$$6x^2 - 6x - 36 = 0$$

ergiebt sich $x = 3$

und $x = -2.$

Für den Werth 3 von x geht $\partial^2 f_x$ in $+30$ über, für

den Werth -2 von x geht $\partial^2 f_x$ über in -30. Daher ist die gegebene Funktion ein Maximum, wenn -2 statt x gesetzt wird, und ein Minimum, wenn man $+3$ setzt statt x; und die Substitution dieser Werthe liefert $+44$ als größten, -81 als kleinsten Werth der Funktion.

Während nun x die Werthe

$$-\infty \ldots\ldots\ldots -2 \ldots\ldots\ldots +3 \ldots\ldots\ldots +\infty$$

durchläuft, nimmt ∂f_x beziehlich den Gang

$$+\infty \ldots + \ldots 0 \ldots - \ldots 0 \ldots + \ldots\ldots +\infty$$

und nun erhellet, daß die Funktion geht, wie es angegeben ist.

3) Welchen Gang nimmt die Funktion $3x - 5x^2 + 2$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst?

Die Funktion beginnt mit $-\infty$, wächst bis $+2\frac{9}{20}$, und nimmt darauf ab bis $-\infty$. Hier ist also das relative Maximum $2\frac{9}{20}$ zugleich absolutes Maximum.

4) Welchen Gang nimmt die Funktion $12x - 6x^2 - 15x^3$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst?

Die Funktion beginnt mit $+\infty$, fällt bis $-\frac{56}{9}$, steigt darauf bis $+\frac{72}{25}$ und nimmt hierauf ab bis $-\infty$.

5) Welchen Gang nimmt die Funktion $\frac{x-1}{x^2+1}$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst?

Die Funktion beginnt mit 0, fällt bis $-\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$, steigt darauf bis $+\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$ und fällt hierauf bis 0.

Um zu finden, welchen Werth die Funktion für $x = \infty$ annimmt, setze man $\frac{1}{z}$ statt x, multiplicire Zähler und Nenner mit z^2 und setze dann $z = 0$. In dieser Weise läßt sich häufig der Werth einer Funktion für $x = \infty$ erkennen.

6) In der Geometrie, Mechanik u. s. w. werden oft größte oder kleinste Werthe gefordert. Darunter sind absolut größte oder

kleinste Werthe verstanden, die nicht unendlich sind. Unter unseren relativ größten oder kleinsten Werthen befinden sich jedesmal die endlichen absolut größten oder kleinsten Werthe, wenn solche bestehen, aber es ist nicht umgekehrt ein relativ größter oder kleinster Werth jedesmal zugleich absoluter. In solchen Fällen muß man sich daher besonders überzeugen, ob ein gefundenes relatives Maximum oder Minimum zugleich absolutes ist. Gewöhnlich entscheidet sich die Frage sehr einfach, indem man den geometrischen u. s. w. Gegenstand betrachtet, während die veränderliche Größe, von der er abhängt, alle ihre Werthe durchläuft; läßt diese Betrachtung Zweifel übrig, so muß man den Gang der Funktion untersuchen.

Als Beispiel werde der normale Cylinder bestimmt vom Inhalt a und der kleinsten Oberfläche.

Der Radius der Grundebene sei x, die Höhe y. Dann ist

$$1)\quad \pi x^2 y = a$$

und die Oberfläche drückt sich aus durch

$$2\pi x^2 + 2\pi xy$$

oder, wenn wir für πxy den Werth aus 1) setzen, durch

$$2\pi x^2 + 2\frac{a}{x}.$$

Dieser Ausdruck sei, da der Faktor 2 gemeinschaftlich ist, durch $2f_x$ bezeichnet.

Betrachten wir den Gegenstand zunächst rein analytisch, so kommt es darauf an, zu entscheiden, ob und für welchen Werth von x die Funktion

$$f_x = \pi x^2 + \frac{a}{x}$$

einen endlichen absolut kleinsten Werth annehme. Es ist

$$\partial f_x = 2\pi x - \frac{a}{x^2}$$

$$\partial^2 f_x = 2\pi + \frac{2a}{x^3}.$$

Aus $$2\pi x - \frac{a}{x^2} = 0$$

folgt $$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}.$$

Die zweite Ableitung ist für diesen Werth von x positiv, also die Funktion ein Minimum. — Während nun x die Werthe von $-\infty$ bis negativ Unendlichklein durchläuft, dann den Werth 0 annimmt und steigt bis $+\infty$, durchläuft die Funktion alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$, springt dann, für $x = 0$, über in $+\infty$, nimmt ab bis auf ihr Minimum und steigt darauf bis $+\infty$. Bei dieser Betrachtung ist das Minimum kein absolutes, denn die Funktion durchläuft bei den negativen Werthen von x auch alle Werthe, welche kleiner sind als das Minimum.

Gehen wir aber auf die geometrische Aufgabe zurück, so kommen allein die positiven Werthe von x in Betracht, und während x von 0 bis $+\infty$ anwächst, durchläuft die Funktion stets abnehmend alle Werthe von $+\infty$ bis zu ihrem Minimum, und von da ab fortdauernd zunehmend alle Werthe bis $+\infty$. Das Minimum ist also in Bezug auf die Aufgabe ein absolutes, und der durch jenen Werth von x bestimmte Cylinder hat unter allen vom Inhalt a die kleinste Oberfläche.

Nur der klareren Einsicht wegen ist die Funktion betrachtet worden, auch während x die negativen Werthe durchläuft. Die geometrische Aufgabe erfordert die Betrachtung der Funktion bloß während x von 0 bis $+\infty$ anwächst. In aller Kürze und am einfachsten kommt man zum Ziel, wenn man den Cylinder verfolgt, während der Radius x von unendlich klein zunimmt bis unendlich groß.

7) Ein Gefäß in der Form eines rechtwinkeligen Parallelepipedums, oben offen, soll den Inhalt a und die Höhe h erhalten; man soll die Abmessungen x und y der Grundebene so bestimmen, daß die Oberfläche des Gefäßes am kleinsten ausfalle.

Die Oberfläche des Gefäßes ist,

$$1)\quad xy + 2xh + 2yh.$$

Diese Funktion enthält nicht die Bedingung, daß der Inhalt des Gefäßes a sein soll. Wir nehmen daher die Gleichung zu Hilfe

$$2)\quad xyh = a$$

und eliminiren den Veränderlichen y. Dadurch entsteht

$$\frac{a}{h} + 2xh + 2\frac{a}{x}$$

eine Funktion, welche die Oberfläche unter der Bedingung ausdrückt, daß der Inhalt a sei, und welche nur den einen Urveränderlichen x enthält. Wir bezeichnen diese Funktion durch f_x; und es folgt

$$\partial f_x = 2h - \frac{2a}{x^2}.$$

Aus $$2h - \frac{2a}{x^2} = 0$$

ergiebt sich $$x = \sqrt{\frac{a}{h}}.$$

Aus 2) ist $$y = \frac{a}{hx}$$

oder, wenn wir für x den Werth setzen,

$$y = \sqrt{\frac{a}{h}}.$$

Es ist also $x = y$.

Die Oberfläche eines Gefäßes von der Form eines rechtwinkeligen Parallelepipedums, welches oben offen sein, den Inhalt a und die Höhe h erhalten soll, wird demnach am kleinsten, wenn man zur Grundebene ein Quadrat nimmt; und es erhält den Inhalt a, wenn die Seite dieses Quadrats gleich $\sqrt{\frac{a}{h}}$ genommen wird.

Daß die Oberfläche für $x = y = \sqrt{\frac{a}{h}}$ am kleinsten ausfalle, giebt sich bei der Betrachtung des Körpers kund.

Die zweite Ableitung $\partial^2 f_x$ ist übrigens

$$\frac{4a}{x^3}$$

und aus $\partial f_x = 0$ ergiebt sich $x = +\sqrt{\frac{a}{h}}$ und $x = -\sqrt{\frac{a}{h}}$.
Bei unserer stereometrischen Aufgabe ist nur der erste von diesen Werthen zulässig, und für ihn wird $\partial^2 f_x$ positiv, also f_x ein Minimum. — Wäre die analytische Aufgabe gestellt gewesen, die größten und kleinsten Werthe der oberen Funktion f_x zu ermitteln, so hätte der zweite Werth von x, nämlich $-\sqrt{\frac{a}{h}}$, eben so wohl beachtet werden müssen, und für ihn wird $\partial^2 f_x$ negativ, also f_x ein Maximum. Eben so wird dieser zweite Werth zu beachten sein bei irgend einer andern speziellen Aufgabe, die negative Werthe von x gestattet, und die auf die eben erwähnte analytische Aufgabe führt.

8) Ein Gefäß von der Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedums, und oben offen, soll den Inhalt a erhalten; man soll die Abmessungen desselben angeben, so, daß die Oberfläche des Gefäßes am kleinsten ausfalle.

Bei einer gegebenen Höhe h muß nach 7) zur Grundebene des Gefäßes ein Quadrat genommen werden, damit die Oberfläche am kleinsten ausfalle. Daher muß auch bei der im gegenwärtigen Fall zu bestimmenden Höhe y die Grundebene ein Quadrat sein. Die Seite der Grundebene sei durch x bezeichnet. Die Oberfläche drückt sich alsdann aus durch

$$x^2 + 4xy$$

und es ist

$$x^2 y = a.$$

Hieraus folgt

$$1)\quad y = \frac{a}{x^2}$$

und wenn wir diesen Werth oben substituiren, entsteht für die Oberfläche die Funktion

$$x^2 + 4\frac{a}{x}$$

welche f_x bezeichnen mag.

Nun ist $$\partial f_x = 2x - 4\frac{a}{x^2}.$$

Aus $$2x - 4\frac{a}{x^2} = 0$$

folgt $$x = \sqrt[3]{2a}.$$

Es ist nach 1)

$$y = \frac{a}{x^2}$$

oder wenn wir für x den Werth setzen,

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a}.$$

Ein Gefäß von der Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedums, und oben offen, hat also die geringste Oberfläche, wenn seine Grundebene ein Quadrat, und seine Höhe gleich der Hälfte von der Seite dieses Quadrates ist. Und ist die Seite der Grundebene gleich $\sqrt[3]{2a}$, so ist a der Inhalt des Gefäßes.

9) Die Oberfläche eines Gefäßes, welches die Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedums hat, und oben offen ist, soll b sein; wie müssen die Abmessungen desselben genommen werden, damit der Inhalt am größten ausfalle?

Bezeichnen x und y die Abmessungen der Grundebene, und ist z die Höhe, so ist $x = y = \sqrt{\frac{b}{3}}$ und $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{3}}$ zu nehmen. Die Resultate ergeben sich durch Untersuchungen, ähnlich denen in 7) und 8), oder auch unmittelbar aus 8); denn hat das Gefäß bei einem gegebenen Inhalt a die kleinste Oberfläche, so hat es bei dieser Oberfläche den größten Inhalt. Die Abmessungen des Gefäßes, welches bei der Oberfläche b den größten Inhalt hat, stehen daher

in demselben Verhältniß zu einander, in welchem die Abmessungen des Gefäßes stehen, welches die kleinste Oberfläche hat bei dem Inhalt a; und aus dem Verhältniß der Abmessungen ergeben sich leicht die Werthe von x, y, z.

10) Ein rechtwinkeliges Parallelepipedum soll den Inhalt a haben, wie sind seine Abmessungen zu nehmen, damit seine Oberfläche am kleinsten werde?

Es muß die Gestalt eines Würfels erhalten.

11) Ein Gefäß von der Form eines normalen Cylinders, und oben offen, soll den Inhalt a erhalten, der Boden soll die Stärke b haben, die Wand die Stärke c; wie müssen die Abmessungen genommen werden, damit das wenigste Material zu dem Gefäß erforderlich sei?

Der Halbmesser von den Grundebenen des innern hohlen Raumes sei x, die Höhe des hohlen Raumes sei y. Alsdann ist

$$1)\quad \pi x^2 y = a$$

und das Volumen des Materials drückt sich aus

$$2)\quad \pi(x + c)^2(y + b) - a.$$

Aus 1) werde y entwickelt, und der Werth, welcher sich ergiebt, in 2) substituirt; dadurch entsteht für das Volumen des Materials die Funktion

$$\pi(x + c)^2\left(\frac{a}{\pi x^2} + b\right) - a$$

welche f_x bezeichnen möge. Durch eine leichte Reduction ergiebt sich

$$f_x = \frac{a(x + c)^2}{x^2} + b\pi(x + c)^2 - a.$$

Hieraus folgt

$$\partial f_x = \frac{2ax^2(c + x) - 2ax(c + x)^2}{x^4} + 2b\pi(c + x)$$

$$= \frac{-2a(c + x)c}{x^3} + 2b\pi(c + x)$$

$$= \frac{2(b\pi x^3 - ac)(c + x)}{x^3}.$$

Aus $$\partial fx = 0$$

ergiebt sich $$x = \sqrt[3]{\frac{ac}{b\pi}}.$$

(Der andere Werth $x = -c$ ist im vorliegenden Fall nicht brauchbar.)

Aus 1) ist $$y = \frac{a}{\pi x^2}$$

und wenn wir statt x den Werth setzen, entsteht

$$y = \frac{b}{c}\sqrt[3]{\frac{ac}{b\pi}}.$$

Es verhält sich also $x:y = c:b$.

12) Ein normaler Kegel soll den Inhalt a erhalten, wie sind seine Abmessungen zu nehmen, damit seine Oberfläche am kleinsten ausfalle.

Der Radius der Grundebene sei x, die Höhe y. Alsdann ist

$$1)\quad \tfrac{1}{3}\pi x^2 y = a$$

und die Oberfläche drückt sich aus durch

$$2)\quad \pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Aus 1) folgt

$$3)\quad y = \frac{3a}{\pi x^2}.$$

Diesen Werth substituire man in 2); das liefert für die Oberfläche die Funktion

$$\pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + \frac{9a^2}{\pi^2 x^4}}$$

oder $$\pi x^2 + \frac{1}{x}\sqrt{\pi^2 x^6 + 9a^2}$$

welche f_x bezeichnen mag. Es ist

$$\partial f_x = 2\pi x + \frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}6x^5\pi^2}{\sqrt{\pi^2x^6 + 9a^2}} - \frac{1}{x^2}\sqrt{\pi^2x^6 + 9a^2}$$

$$= \frac{2\pi x^3\sqrt{\pi^2x^6 + 9a^2} + 2\pi^2x^6 - 9a^2}{x^2\sqrt{\pi^2x^6 + 9a^2}}.$$

Aus
$$\partial f_x = 0$$
folgt
$$2\pi x^3\sqrt{\pi^2 x^6 + 9a^2} = 9a^2 - 2\pi^2 x^6$$
oder quadrirt
$$4\pi^4 x^{12} + 36a^2\pi^2 x^6 = 81a^4 - 36a^2\pi^2 x^6 + 4\pi^4 x^{12}$$
$$8\pi^2 x^6 = 9a^2$$
und hieraus $x = \sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3a}{\pi}}$.

Substituiren wir diesen Werth von x in 3), so entsteht
$$y = 2\sqrt[3]{\frac{3a}{\pi}}.$$
Es verhält sich demnach
$$x:y = 1:2\sqrt{2}.$$

Etwas bequemer löst sich diese Aufgabe, wenn man die Abmessungen des normalen Kegels sucht, welcher bei der gegebenen Oberfläche b den größten Inhalt darbietet.

Denn bezeichnet wieder x den Radius der Grundebene, y die Höhe, so ist
$$1)\quad \pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2} = b$$
und der Inhalt wird ausgedrückt durch
$$2)\quad \tfrac{1}{3}\pi x^2 y.$$
Aus 1) folgt
$$y = \sqrt{\left(\frac{b - \pi x^2}{\pi x}\right)^2 - x^2}$$
oder
$$3)\quad y = \frac{\sqrt{b^2 - 2b\pi x^2}}{\pi x}$$
und setzt man diesen Werth in 2) statt y, so ergiebt sich für den Inhalt die Funktion
$$\tfrac{1}{3}x\sqrt{b^2 - 2b\pi x^2}$$
oder
$$\tfrac{1}{3}\sqrt{b(bx^2 - 2\pi x^4)}.$$
Der letzte Ausdruck gewinnt offenbar seinen größten Werth, wenn der Ausdruck
$$bx^2 - 2\pi x^4$$

seinen größten Werth hat. Es ist

$$\partial(bx^2 - 2\pi x^4) = 2bx - 8\pi x^3.$$

Aus $$2bx - 8\pi x^3 = 0$$

folgt $$x = \sqrt{\frac{b}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{\pi}}.$$

Dieser Werth von x werde in 3) substituirt; das liefert

$$y = \sqrt{\frac{2b}{\pi}}.$$

Und es verhält sich wie oben

$$x:y = -\tfrac{1}{2}:\sqrt{2} = 1:2\sqrt{2}.$$

13) Es ist ein Kreis gegeben und ein Winkel α; man soll den Winkel α als Peripheriewinkel in den Kreis tragen, so, daß die Summe der Sehnen, welche von den Schenkeln abgeschnitten werden, ein Größtes oder ein Kleinstes sei.

Der Radius des Kreises sei r. Von der Spitze des Peripheriewinkels α werde ein Durchmesser gezogen, und angenommen, der Peripheriewinkel habe eine solche Lage, daß der Durchmesser innerhalb seiner Winkelebene falle. Der Winkel, welchen der Durchmesser mit dem einen Schenkel bildet, sei x, alsdann ist der Winkel, welchen der Durchmesser mit dem anderen Schenkel bildet, $\alpha - x$, die Sehne auf dem ersten Schenkel drückt sich aus durch $2r\mathrm{Cos}\,x$, die vom anderen durch $2r\mathrm{Cos}(\alpha - x)$ und die Summe der Sehnen ist

$$2r[\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Cos}(\alpha - x)].$$

Diese Funktion hat ihren größten oder kleinsten Werth, wenn der Faktor $\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Cos}(\alpha - x)$ seinen größten oder kleinsten Werth hat. Es sei $\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Cos}(\alpha - x)$ durch f_x bezeichnet. Dann ist

$$\partial f_x = -\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Sin}(\alpha - x)$$
$$\partial^2 f_x = -\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Cos}(\alpha - x).$$

Aus $$\partial f_x = 0$$

folgt $$\mathrm{Sin}(\alpha - x) = \mathrm{Sin}\,x$$

also $$\alpha - x = x$$

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Für $x = \frac{\alpha}{2}$ ist $\partial^2 f_x$ negativ, also die Funktion f_x und mit ihr die Summe der Sehnen ein Maximum.

14) Es ist ein Kreis gegeben und ein Winkel α; man soll den Winkel α als Peripheriewinkel in den Kreis tragen, so, daß das Produkt der Sehnen, welche von den Schenkeln abgeschnitten werden, ein Größtes oder Kleinstes sei.

Der Radius des Kreises sei r. Von der Spitze des Peripheriewinkels α werde wie in der vorigen Nummer ein Durchmesser gezogen, welcher mit dem einen Schenkel den Winkel x, mit dem anderen den Winkel $\alpha - x$ bilde. Das Produkt der Sehnen drückt sich alsdann aus durch

$$4r^2 \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos}(\alpha - x)$$
$$= 4r^2 f_x.$$

Es ist

$$\partial f_x = \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin}(\alpha - x) - \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}(\alpha - x)$$
$$= \operatorname{Sin}(\alpha - 2x)$$
$$\partial^2 f_x = -2\operatorname{Cos}(\alpha - 2x).$$

Aus $\operatorname{Sin}(\alpha - 2x) = 0$

folgt $\alpha - 2x = 0$

$$x = \frac{\alpha}{2}$$

und da für diesen Werth $\partial^2 f_x$ negativ ausfällt, so ist f_x und mit f_x das Produkt der Sehnen ein Maximum.

15) Es ist ein Kreis gegeben und ein Winkel α; man soll den Winkel α als Peripheriewinkel in den Kreis tragen, so, daß der innerhalb der Winkelebene von α liegende Theil des Kreises ein Größtes oder Kleinstes werde.

Der Halbmesser des Kreises sei r. Aus der Spitze des Peripheriewinkels α werde ein Durchmesser gezogen, und angenommen, er bilde mit dem einen Schenkel den Winkel x, mit dem andern den Winkel $\alpha - x$. Nach den nicht zusammenstoßenden Endpunkten der Sehnen ziehe man Radien. Der Winkel, welchen diese bilden, ist 2α. Der Theil des Kreises, welcher innerhalb der Winkelebene von α liegt, erscheint jetzt zerlegt in einen Kreisausschnitt, dessen Mittel-

punktswinkel 2α ist, und in zwei Dreiecke. Unter α Bogenmaaß für den Halbmesser 1 verstanden (wie hier jedesmal), ist der Inhalt des Kreisausschnitts gleich $r^2\alpha$; die Inhalte der beiden Dreiecke sind $r^2 \operatorname{Sin}x \operatorname{Cos}x$ und $r^2 \operatorname{Sin}(\alpha - x)\operatorname{Cos}(\alpha - x)$. Der Inhalt des erwähnten Theiles vom Kreise ist daher

$$\begin{aligned} & r^2[\alpha + \operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x + \operatorname{Sin}(\alpha - x)\operatorname{Cos}(\alpha - x)] \\ = & \tfrac{1}{2}r^2[2\alpha + \operatorname{Sin}2x + \operatorname{Sin}(2\alpha - 2x)] \\ = & \tfrac{1}{2}r^2 f_x. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \partial f_x &= \quad 2\operatorname{Cos}2x - 2\operatorname{Cos}(2\alpha - 2x) \\ \partial^2 f_x &= -4\operatorname{Sin}2x - 4\operatorname{Sin}(2\alpha - 2x). \end{aligned}$$

Aus

$$\partial f_x = 0$$

folgt

$$\operatorname{Cos}2x = \operatorname{Cos}(2\alpha - 2x)$$

$$x = \alpha - x$$

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

16) Die vier Seiten eines Vierecks sollen a, b, c, d sein, wie müssen die Winkel des Vierecks genommen werden, damit der Inhalt am größten ausfalle?

Der Winkel, welchen die Seiten a und b bilden, sei x, der x gegenüberliegende, also von c und d gebildete Winkel sei y; der Inhalt des Vierecks drückt sich alsdann aus durch

$$1)\quad \tfrac{1}{2}ab\operatorname{Sin}x + \tfrac{1}{2}cd\operatorname{Sin}y$$

und es sind die Werthe von x und y zu ermitteln, für welche diese Funktion ein Maximum ist. Um den einen Veränderlichen zu beseitigen, setzen wir die Gleichung an

$$a^2 + b^2 - 2ab\operatorname{Cos}x = c^2 + d^2 - 2cd\operatorname{Cos}y.$$

Aus ihr folgt

$$2)\quad 2cd\operatorname{Cos}y = c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\operatorname{Cos}x$$

und hieraus

$$\operatorname{Sin}y = \frac{1}{2cd}\sqrt{4c^2d^2 - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\operatorname{Cos}x)^2}.$$

Diesen Werth substituiren wir in 1) und erhalten für den Inhalt

$$\tfrac{1}{2}[ab \operatorname{Sin} x + \tfrac{1}{2}\sqrt{4c^2d^2 - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab \operatorname{Cos} x)^2}] = \tfrac{1}{2}f_x.$$

Nun ist

$$\partial f_x = ab \operatorname{Cos} x + \frac{ab(c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab \operatorname{Cos} x) \operatorname{Sin} x}{\sqrt{4c^2d^2 - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab \operatorname{Cos} x)^2}}$$

und bei dem Viereck, welches den größten Inhalt hat, ist dieser Ausdruck Null. Substituiren wir aus 2) den Werth von $c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab \operatorname{Cos} x$, so entsteht

$$ab \operatorname{Cos} x + \frac{ab \cdot 2cd \operatorname{Cos} y \cdot \operatorname{Sin} x}{\sqrt{4c^2d^2 - 4c^2d^2 \operatorname{Cos} y^2}} = 0$$

oder $$ab\left(\operatorname{Cos} x + \frac{\operatorname{Cos} y \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} y}\right) = 0$$

oder $$\frac{ab(\operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} y + \operatorname{Cos} y \operatorname{Sin} x)}{\operatorname{Sin} y} = 0$$

daher ist $$\operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} y + \operatorname{Cos} y \operatorname{Sin} x = 0$$

d. h. $$\operatorname{Sin}(x + y) = 0$$

also $$x + y = 180^\circ.$$

Und hieraus erhellet, daß das größte Viereck von allen, welche die Seiten a, b, c, d haben, dasjenige ist, welches in einem Kreise liegt.

Andere Entwickelung. Man setze

$$\alpha)\quad f_x = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{Sin} x + \tfrac{1}{2}cd \operatorname{Sin} y$$

indem man y als Funktion von x betrachtet, implicit gegeben durch die Gleichung

$$\beta)\quad a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos} x - c^2 - d^2 + 2cd \operatorname{Cos} y = 0.$$

Aus β) folgt, nach x differenzirend,

$$-2cd \operatorname{Sin} y\, \partial y_x + 2ab \operatorname{Sin} x = 0$$

oder $$\gamma)\quad \partial y_x = \frac{ab \operatorname{Sin} x}{cd \operatorname{Sin} y}$$

aus α) $$\partial f_x = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{Cos} x + \tfrac{1}{2}cd \operatorname{Cos} y\, \partial y_x$$

oder, den Werth nach γ) setzend,

$$\partial f_x = \tfrac{1}{2}ab \frac{\operatorname{Sin}(x + y)}{\operatorname{Sin} y}.$$

Diese Ableitung gleich Null gesetzt liefert wie zuvor

$$\operatorname{Sin}(x+y)=0.$$

17) Man denke einen Kreis und eine unendliche gerade Linie PQ. Der Radius des Kreises sei r, die Entfernung seines Mittelpunktes von der geraden Linie PQ sei a. Man denke eine zweite gerade Linie CD, welche den Kreis in den Punkten C und D schneidet und mit der Linie PQ parallel ist. Von den Punkten C und D denke man Normalen CP und DQ auf PQ gefällt. In welcher Entfernung vom Mittelpunkt muß die Linie CD gedacht werden, damit das Rechteck CDQP ein Maximum sei?

Die Entfernung ist $\frac{a \pm \sqrt{a^2+8r^2}}{4}$, und ist $a<r$, so gelten beide Vorzeichen, ist aber $a \geqq r$ so gilt nur —.

18) Unter allen Kugelausschnitten von dem Inhalt a denjenigen zu bestimmen, dessen Oberfläche ein Kleinstes ist.

Der Halbmesser der Kugel sei x, die Höhe des Kugelausschnitts y; alsdann ist

$$1)\quad \tfrac{2}{3}\pi x^2 y = a$$

und die Oberfläche des Kugelausschnitts drückt sich aus durch

$$2)\quad 2\pi xy + \pi x\sqrt{2xy-y^2}.$$

Aus 1) folgt

$$3)\quad y=\frac{3a}{2\pi x^2}.$$

Dieser Werth werde in 2) substituirt; das liefert für die Oberfläche den Ausdruck

$$\frac{3a}{x}+\pi x\sqrt{\frac{3a}{\pi x}-\frac{9a^2}{4\pi^2x^4}}$$

oder

$$\frac{6a+\sqrt{12a\pi x^3-9a^2}}{2x}$$

welchen f_x bezeichnen mag.

Es ist nun

$$\partial f_x = \frac{2x \cdot \frac{1}{2} \cdot 36a\pi x^2}{4x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}} - \frac{12a + 2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}{4x^2}$$

$$= \frac{18a\pi x^3 - 6a\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2} - 12a\pi x^3 + 9a^2}{2x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}$$

oder

$$4) \quad \partial f_x = \frac{3a}{2} \cdot \frac{2\pi x^3 + 3a - 2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}{x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}.$$

Aus

$$\partial f_x = 0$$

folgt

$$2\pi x^3 + 3a = 2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}$$

oder, wenn man quadrirt,

$$4\pi^2 x^6 - 36a\pi x^3 + 45a^2 = 0$$

$$x^6 - \frac{9a}{\pi}x^3 + \frac{45a^2}{4\pi^2} = 0$$

und hieraus

$$x = \sqrt[3]{\frac{9a}{2\pi} \pm \sqrt{\frac{81a^2}{4\pi^2} - \frac{45a^2}{4\pi^2}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9a}{2\pi} \pm \frac{6a}{2\pi}}$$

also $\quad 5) \quad x = \sqrt[3]{\frac{15a}{2\pi}}$

und $\quad 6) \quad x = \sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}}.$

Zu dem ersten Werth erhält man aus 3)

$$7) \quad y = \frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}} = \frac{1}{5}x.$$

Zu dem zweiten Werthe von x

$$8) \quad y = \sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}} = x.$$

Um zu entscheiden, ob die Oberfläche des Kugelausschnitts für die zusammengehörigen Werthe von x und y ein Größtes oder ein Kleinstes sei, werde die zweite Ableitung gebildet. Den Zähler in 4)

$$2\pi x^3 + 3a - 2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}$$

bezeichne man durch z; alsdann ist

$$\partial^2 fx = \frac{3a}{2} \cdot \left[\frac{x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}\left(6\pi x^2 - \frac{36a\pi x^2}{\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}\right)}{x^4(12a\pi x^3 - 9a^2)} - \frac{z \cdot \partial(x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2})}{x^4(12a\pi x^3 - 9a^2)} \right].$$

Man bedarf dieser Ableitung nur für die Werthe von x unter 5) und 6). Für diese Werthe von x wird wegen der Gleichung $\partial f_x = 0$ der Ausdruck z zu Null, und mit ihm das Glied von ∂f_x, welches z enthält. Für die Werthe von x unter 5) und 6) ist daher

$$\partial^2 f_x = \frac{3a}{2} \cdot \frac{x^2\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}\left(6\pi x^2 - \frac{36a\pi x^2}{\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2}}\right)}{x^4(12a\pi x^3 - 9a^2)}$$

$$= 3\pi \cdot \frac{\sqrt{12a\pi x^3 - 9a^2} - 6a}{4\pi x^3 - 3a}$$

und, wenn man hierin statt x den Werth $\sqrt[3]{\frac{15a}{2\pi}}$ setzt, entsteht $+\frac{\pi}{3}$, setzt man dagegen für x den Werth $\sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}}$, so entsteht -3π. Für den ersten Werth von x und den dazu gehörenden von y ist demnach die Oberfläche des Kugelausschnitts ein Minimum, für die zweiten zusammengehörenden Werthe dagegen ein Maximum. Bei den ersten zusammengehörigen Werthen verhält sich

$$x : y = 5 : 1$$

bei den zweiten $\quad x : y = 1 : 1$

bei den zweiten ist also der Kugelausschnitt eine Halbkugel.

19) Es ist ein normaler Kegel gegeben, der Radius der Grundebene sei r, die Höhe h; man soll aus dem Kegel den Cylinder vom größten Mantel, und den von der größten Oberfläche schneiden.

Der vom größten Mantel wird erhalten, wenn man seine Höhe gleich $\frac{1}{2}h$ nimmt, alsdann wird der Radius seiner Grundebene $\frac{1}{2}r$. Der von der größten Oberfläche geht hervor, wenn man seine Höhe gleich $\frac{1}{2}h\frac{h-2r}{h-r}$ nimmt, der Radius seiner Grundebene ist alsdann $\frac{1}{2}h\frac{r}{h-r}$.

20) Aus einer Kugel 1) den Cylinder vom größten Inhalt, 2) den vom größten Mantel, 3) den von der größten Oberfläche zu schneiden.

Bezeichnet r den Radius der Kugel, x den Radius von der Grundebene des Cylinders, y die Höhe desselben, so ist

1) $x = r\sqrt{\tfrac{2}{3}} \quad y = 2r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$

2) $x = r\sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad y = 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

3) $x = r\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{5}})} \quad y = 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{5}})}$.

Die zweite Ableitung wird hier für beide Werthe von x negativ, allein die erste wird nur für $x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ zu Null, wenn $\sqrt{r^2-x^2}$ positiv genommen wird, wie es nothwendig ist. Für $x = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ muß $\sqrt{r^2-x^2}$ in der Ableitung negativ genommen werden, um sie zu Null zu machen, und das entspricht nicht der Aufgabe.

21) Für welche Werthe von x wird die Funktion $f_x = b + \sqrt[3]{(2ax-x^2)^2}$ ein Maximum oder ein Minimum?

Es ist $\quad \partial f_x = \frac{4}{3}\cdot\frac{a-x}{\sqrt[3]{2ax-x^2}}$

und $\quad \partial^2 f_x = -\frac{4}{3}\cdot\frac{2ax-x^2+\frac{2}{3}(a-x)^2}{(2ax-x^2)\sqrt[3]{(2ax-x^2)^2}}$.

Aus $\partial f_x = 0$

folgt $a - x = 0$

$$x = a.$$

Für diesen Werth ist die zweite Ableitung negativ, also die gegebene Funktion ein Maximum.

Die erste Ableitung ∂f_x erhält die Form ∞, sowohl wenn x gleich 0, als auch, wenn x gleich 2a gesetzt wird.

Substituiren wir in der Ableitung für x die Werthe $0 \mp dx$, so entsteht

$$\frac{4}{3}\frac{a}{\sqrt[3]{\mp 2adx}} \text{ oder } \mp \frac{4}{3}\frac{a}{\sqrt[3]{2adx}}$$

das ist beziehlich $-\infty$ und $+\infty$. Dieselben Ausdrücke ergeben sich, wenn wir $2a \mp dx$ substituiren. In beiden Fällen ist also

$$\partial f_x \ldots . - \infty +$$

in beiden Fällen daher die Funktion ein Minimum.

Auf dem anderen Wege die Entscheidung zu treffen, vergleichen wir $f(0+h)$ und $f(0-h)$ mit $f0$, h unendlich klein angenommen. Es ist aber

$$f0 = b$$

$$f(0+h) = b + (2ah - h^2)^{\frac{2}{3}}$$

oder, wenn wir den binomischen Satz anwenden,

$$f(0+h) = b + (2a)^{\frac{2}{3}} \cdot h^{\frac{2}{3}} - \tfrac{2}{3}(2ah)^{\frac{2}{3}-1} h^2 + \ldots .$$

und

$$f(0-h) = b + [2a(-h) - h^2]^{\frac{2}{3}}$$

$$= b + (2a)^{\frac{2}{3}} h^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}(2ah)^{\frac{2}{3}-1} h^2 + \ldots .$$

und es erhellet, daß

$$f(0+h) > f0$$

und zugleich

$$f(0-h) > f0$$

also die gegebene Funktion ein Minimum ist für $x = 0$. Um zu entscheiden, ob die gegebene Funktion für $x = 2a$ ein Größtes oder Kleinstes sei, muß $f2a$ mit $f(2a+h)$

und $f(2a - h)$ verglichen werden, während h unendlich klein ist. Es ist aber

$$f2a = b$$

$$f(2a \pm h) = b + (\pm 2ah - h^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$= b + (2a)^{\frac{2}{3}} h^{\frac{2}{3}} \mp \ldots$$

folglich

$$f(2a \pm h) > f2a$$

also die gegebene Funktion auch ein Minimum für $x = 2a$.

22) Es sei die Funktion $f_x = c + \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$ gegeben; für welche Werthe von x nimmt sie einen größten oder kleinsten Werth an?

Es ist

$$\partial f_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

und $$\partial^2 f_x = - \frac{ab}{(2ax - x^2\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Aus $$\partial f_x = 0$$

folgt $$a - x = 0$$

oder $$x = a.$$

Für diesen Werth von x ist die zweite Ableitung negativ oder positiv, je nachdem die Wurzel in ihr positiv oder negativ genommen wird. Die gegebene Funktion ist daher für $x = a$ ein Minimum, wenn die Wurzel in ihr den negativen Werth vorstellt, und ein Maximum, wenn die Wurzel positiv zu nehmen ist.

Die erste Ableitung ∂f_x erhält die Form ∞, sobald x gleich 0 oder gleich 2a genommen wird.

Substituiren wir $0 \mp dx$ statt x in der Ableitung, so entsteht

$$\frac{b}{\sqrt{\pm 2adx}}$$

und $2a \mp dx$ liefert

$$\frac{-b}{\sqrt{\pm 2adx}}.$$

Im ersten Fall ist der Ausdruck $+\infty$ für $+dx$, und imaginair für $-dx$; im anderen ist der Ausdruck $-\infty$ für $+dx$, imaginair für $-dx$. Es findet daher kein größter oder kleinster Werth Statt, sondern ein Uebergang aus dem Reellen ins Imaginaire.

Auf dem anderen Wege zu verfahren, vergleichen wir $f0$ mit $f(0 \pm h)$, und $f2a$ mit $f(2a \pm h)$, unter h unendlich Kleines verstanden. Es ist

$$f0 = c$$

$$f(0 \pm h) = c + \frac{b}{a}\sqrt{2a(\pm h) - h^2} = c + \frac{b}{a}[2a(\pm h) - h^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= c + \frac{b}{a}\left[(2a)^{\frac{1}{2}} \cdot (\pm h)^{\frac{1}{2}} - \ldots\right]$$

$$= c + \frac{b}{a}\left[(2a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pm h} - \ldots\right].$$

Es ist also $f(0-h)$ imaginair. $f0$ kann daher mit dem nächsten Werthe $f(0-h)$ nicht verglichen werden, und ist deshalb weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Eben so findet sich, daß $f2a$ keine Vergleichung mit $f(2a+h)$ gestattet. Die Werthe $f0$ und $f2a$ sind Gränzwerthe, insofern die Funktion für Werthe von x, welche kleiner sind als 0, oder größer als $2a$, imaginair ist.

23) Eine Zahl a in drei Theile zu theilen, so, daß deren Produkt ein Größtes sei.

Jeder der Theile ist $\frac{1}{3}a$.

Zwei der Theile seien x und y, dann ist der dritte $a - x - y$; und es soll

$$f_{x,y} = xy(a - x - y)$$

ein Größtes sein. Es ist

$$\partial f_x = ay - 2xy - y^2$$
$$\partial f_y = ax - x^2 - 2xy$$
$$\partial_{1,1} f_{x,y} = a - 2x - 2y$$
$$\partial^2 f_x = -2y$$
$$\partial^2 f_y = -2x.$$

Aus $\partial f_x = 0$ und $\partial f_y = 0$ ergiebt sich $x = \frac{1}{3}a$, $y = \frac{1}{3}a$. Für diese Werthe von x und y ist

$$(\partial^{1,1} f_{x,y})^2 - \partial^2 f_x \partial^2 f_y < 0$$

und die zweiten Ableitungen sind negativ. Nach §. 292 ist also die Funktion ein Maximum für $x = y = \frac{1}{3}a$.

24) Eine Zahl a in drei Theile x, y, z zu theilen, so daß die Summe $nx^2 + py^2 + qz^2$ ein Kleinstes sei.

Die Theile sind $\frac{pqa}{np + nq + pq}$, $\frac{nqa}{np + nq + pq}$, $\frac{npa}{np + nq + pq}$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Fortsetzung.)

Methode der kleinsten Quadrate, Andeutung.

25) Das Maaß x einer Größe für irgend eine Einheit zu ermitteln, sind Messungen, Versuche angestellt worden, und durch n Messungen, Versuche hat man für x die Werthe a, b, c, d, ... erhalten. Diese Werthe sind ungleich, weil bei jedem einzelnen Versuch ein durch verschiedene Ursachen herbeigeführter, nicht zu vermeidender Fehler Statt findet, und dieser Fehler hat im Allgemeinen bei jedem einzelnen Versuch einen besonderen Werth aus besonderen Ursachen. Welches ist nun der Werth y, welcher jenen Werthen a, b, c, d, ... am meisten, nächsten entspricht?

Es ist $y = \frac{a + b + c + d + \ldots}{n}$.

Es ist y größer als der kleinste und kleiner als der größeste der Werthe a, b, ... Die Differenzen $y - a$, $y - b$, ... sind also theils positiv, theils negativ. Und es ist y derjenige Werth, für welchen

$$(y - a) + (y - b) + (y - c) + (y - d) + \ldots = 0$$

ist. Hieraus folgt aber

$$ny = a + b + c + d + \ldots$$

also für y der angegebene Werth.

Andere Herleitung. Die Quadrate der gedachten Diffe-

renzen sind sämmtlich positiv. Daher ist y der Werth, für welchen

$$(y-a)^2+(y-b)^2+(y-c)^2+(y-d)^2+\dots$$

ein Minimum ist, also die Ableitung dieser Summe nach y gleich Null. Das liefert

$$2(y-a)+2(y-b)+2(y-c)+2(y-d)+\dots=0$$

also wiederum

$$ny=a+b+c+d+\dots$$

Der Werth $\frac{a+b+c+d+\dots}{n}$ heißt das arithmetische Mittel, der mittlere Werth zu den Werthen a, b, c, ...

Es kann sich sehr wohl fügen, daß einer der Werthe a, b, c, ... dem wahren Werthe x näher liegt, als der mittlere Werth; dies wird z. B. schon eintreten, wenn die sämmtlichen Werthe a, b, c, ... zu groß, oder zu klein sind.

Eine Länge sei wiederholt in einerlei Weise gemessen und es habe sich der mittlere Werth y ergeben. Wird dieselbe Länge in derselben Weise neuerdings gemessen, so ist anzunehmen, es werde sich derselbe oder nahe derselbe mittlere Werth finden. Wird dieselbe Länge in anderer Weise vermittelst anderer Instrumente, Methoden gemessen, so kann der jetzige mittlere Werth z mit jenem y übereinstimmen, oder sich weniger oder mehr von ihm unterscheiden; u. s. w. Im letztern Fall kann man den mittleren Werth der mittleren Werthe nehmen; oder man wird, und selbst schon bei einer Reihe von Messungen in einerlei Weise, eine Kritik eintreten lassen, um zu entscheiden, welche Messungsmethode oder welche einzelne Messung das meiste Vertrauen verdiene und den wahren Werth x am genauesten liefere. Die Rechnung kann nicht gut machen, was mangelhafte Methoden verdorben haben, oder Unachtsamkeit.

26) Von mehreren gleichen Vorrichtungen arbeitet die eine mit dem Nutz-Effekt a, die zweite mit dem Nutz-Effekt b, die dritte mit dem Nutz-Effekt c u. s. f.; welchen Nutz-Effekt kann man sich von einer solchen Vorrichtung im Allgemeinen versprechen?

Den mittleren von jenen a, b, c ...., etwas mehr oder weniger.

27) Es sei

$$q = a + bx^{\alpha} + cy^{\beta} + dz^{\gamma} + \ldots.$$

Die Zahl q sei das Ergebniß eines Versuches; a, b, c, d, ... seien bekannte, diesem besonderen Versuche zugehörige, x, y, z, ... unbekannte constante, unter sich in keinem Zusammenhang stehende Werthe, α, β, γ, ... bekannte constante Exponenten. Einem zweiten, dritten u. s. w. Versuch entsprechend sei

$$q' = a' + b'x^{\alpha} + c'y^{\beta} + d'z^{\gamma} + \ldots.$$
$$q'' = a'' + b''x^{\alpha} + c''y^{\beta} + d''z^{\gamma} + \ldots.$$
$$\vdots$$

Wie finden sich die Werthe von x, y, z, ... welche den Resultaten q, q', q'' .... am meisten entsprechen.

Es seien v, v', v'', ... die an sich positiven oder negativen unbekannten Werthe, welche, wegen des bei jedem Versuche obwaltenden Fehlers, beziehlich zu q, q', q'', ... addirt werden müssen, also q + v, q' + v' .... die wahren, fehlerfreien Resultate der Versuche.

Dann ist

$$v = -q + a + bx^{\alpha} + cy^{\beta} + dz^{\gamma} + \ldots.$$
$$v' = -q' + a' + b'x^{\alpha} + c'y^{\beta} + d'z^{\gamma} + \ldots.$$
$$v'' = -q'' + a'' + b''x^{\alpha} + c''y^{\beta} + d''z^{\gamma} + \ldots.$$
$$\vdots$$

Sollen nun, wie es gefordert ist, die Unbekannten x, y, z dergestalt bestimmt werden, daß sie am meisten, so viel als möglich, den nicht verbesserten Werthen q, q', q'', ... entsprechen, so wähle man sie dergestalt, daß sie die Summe

der Quadrate der Fehler, nämlich $v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots$ zu einem Minimum machen. — Wenn man rechts quadrirt und addirt, entsteht eine Funktion F von x, y, z, ...; und da die Unbekannten x, y, z .... in keinem Zusammenhang stehen, werden sie bestimmt durch die Gleichungen

$$\partial F_x = 0$$
$$\partial F_y = 0$$
$$\partial F_z = 0 \text{ u. s. w.}$$

deren Anzahl gleich ist der der Unbekannten.

Es ergeben sich bei diesem Verfahren nicht die wahren Werthe von x, y, z, ..., sondern die, welche den Resultaten q, q′, q″, ... so viel als möglich entsprechen; und es sind so viel als möglich die unbekannten Fehler v, v′, v″, ... auf die Unbekannten x, y, z .... geworfen (die Ursachen der Fehler auf die Ursachen der Unbekannten). Dies ist kein Mangel der Methode, sondern im Gegentheil für praktische Anwendungen ein Vortheil. Denn es seien z. B. bei verschiedenen Maschinen einerlei Gattung Versuche und Berechnung wie oben angestellt, während x, y, z .... etwa Reibungs-Coefficienten u. s. w. vorstellen; so dürfte bei einer neuen Maschine derselben Gattung das Resultat q der Berechnung, wobei die gefundenen Werthe der Unbekannten x, y, z .... zu Grunde gelegt wurden, um so genauer mit dem Versuche übereinstimmen, als jene Unbekannten den Resultaten gemäß bestimmt wurden, und außerdem den Fehler v so viel als möglich tragen; ein Umstand, der die Methode sehr schätzbar macht. Nur muß man sich hüten die Werthe für x, y, z, ... bei der Berechnung von Maschinen anderer Gattung zu gebrauchen, weil bei diesen der Fehler v andere Ursachen hat und in anderen Verhältnissen zu x, y, z, ... steht.

Zwölftes Kapitel.

Bestimmung von Werthen unter der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ u. s. w.

§. 297.

Aufgabe. Es sei $F_x = \frac{f_x}{\phi_x}$ und für den besonderen Werth a von x gehe sowohl f_x als ϕ_x in Null über, man soll den Werth von F_a bestimmen.

Auflösung. Nach dem Taylorschen Satze hat man, wenn zunächst jede Ableitung nach x genommen, dann aber a statt x gesetzt wird,

$$F_{(a+h)} = \frac{f_a + \partial f_a h + \partial^2 f_a \frac{h^2}{2!} + \ldots}{\phi_a + \partial \phi_a h + \partial^2 \phi_a \frac{h^2}{2!} + \ldots}.$$

Nach der Voraussetzung ist $f_a = 0$ und $\phi_a = 0$. Wenn man daher durch h hebt, und dann h gleich Null setzt, so folgt

$$F_a = \frac{\partial f_a}{\partial \phi_a}.$$

Sollten auch ∂f_a und $\partial \phi_a$ Null sein, so würden die beiden ersten Glieder des Zählers und des Nenners in der oberen Entwickelung verschwinden, und wenn man dann mit h^2 hebt, und darauf h gleich Null setzt, entsteht

$$F_a = \frac{\partial^2 f_a}{\partial^2 \phi_a}$$

u. s. w. Und überhaupt erhellet jetzt, daß, wenn für den besonderen Werth a von x die sämmtlichen Funktionen f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x \ldots$ $\partial^{n-1} f_x$, und ϕ_x, $\partial \phi_x$, $\partial^2 \phi_x$, ... $\partial^{n-1} \phi_x$ in Null übergehen, aber nicht auch jede der Funktionen $\partial^n f_x$ und $\partial^n \phi_x$ zu Null wird, dann

$$F_a = \frac{\partial^n f_a}{\partial^n \phi_a} \text{ ist.}$$

Beispiele.

1) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}$ geht für $x = 1$ in $\frac{0}{0}$ über. Es ist aber $\partial(x^2 - 5x + 4) = 2x - 5$, und $\partial(x^2 + x - 2) = 2x + 1$. Daher ist für $x = 1$ jener Bruch gleich $\frac{2x - 5}{2x + 1} = -1$.

2) $\frac{x^n - 1}{x - 1} = n$ für $x = 1$.

3) $\frac{x^3 - a^2x - ax^2 + a^3}{x - a} = 0$ für $x = a$.

4) $\frac{\operatorname{Sin} x}{x} = 1$ für $x = 0$.

5) $\frac{x - \operatorname{Sin} x}{x^3} = \frac{1}{6}$ für $x = 0$.

§. 298.

Aufgabe. Es sei $F_x = \frac{f_x}{\phi_x}$, und für den besonderen Werth a von x nehme sowohl f_x als ϕ_x die Form ∞ an; man soll den Werth von F_a bestimmen.

Auflösung. Ist $f_a = \infty$ und $\phi_a = \infty$, so ist $\frac{1}{f_a} = 0$ und $\frac{1}{\phi_a} = 0$, und es ist nach dem vorigen Paragraph

$$\frac{\frac{1}{f_a}}{\frac{1}{\phi_a}} = \frac{\frac{\partial f_a}{f_a^{\,2}}}{\frac{\partial \phi_a}{\phi_a^{\,2}}}$$

oder

$$\frac{\phi_a}{f_a} = \frac{\partial f_a}{\partial \phi_a} \cdot \frac{\phi_a^{\,2}}{f_a^{\,2}}$$

oder

$$\frac{f_a}{\phi_a} = \frac{\partial f_a}{\partial \phi_a}$$

d. h.

$$F_a = \frac{\partial f_a}{\partial \phi_a}.$$

Wäre $\partial f_a = \infty$ und $\partial \phi_a = \infty$, so hätte man nach dem eben Erhaltenen

$$\frac{\partial f_a}{\partial \phi_a} = \frac{\partial^2 f_a}{\partial^2 \phi_a}$$

also auch
$$F_a = \frac{\partial^2 f_a}{\partial^2 \phi_a}$$

u. s. w.

So folgt z. B. $\frac{\ln x}{x} = 0$ für $x = \infty$. Denn es sei $\ln x = f_x$, $x = \phi_x$, so ist zunächst $f_x = \infty$ und $\phi_x = \infty$ für $x = \infty$. Aber es ist $\partial f_x = \frac{1}{x}$, $\partial \phi_x = 1$ also $\frac{\partial f_x}{\partial \phi_x} = 0$ für $x = \infty$.

§. 299.

Die Bestimmung von Werthen, welche unter der Form $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ u. s. w. erscheinen, läßt sich auf die vorangegangenen Paragraphen zurückführen, wie ein paar Beispiele zeigen:

Es sei $x \ln x$ für $x = 0$ zu bestimmen. Es ist $\ln 0 = -\infty$; daher nimmt die vorgelegte Funktion für $x = 0$ die Form $-\infty \cdot 0$ an. Man setze aber $\ln x = f_x$, $x = \frac{1}{\phi_x}$, also $\phi_x = \frac{1}{x}$, und es ist

$$x \ln x = \frac{f_x}{\phi_x}$$

während jetzt f_x und ϕ_x für $x = 0$ offenbar unendlich werden. Nun ist $\partial f_x = \frac{1}{x}$ und $\partial \phi_x = -\frac{1}{x^2}$, also

$$\frac{\partial f_x}{\partial \phi_x} = -x$$

welches 0 ist für $x = 0$, also ist $x \ln x = 0$ für $x = 0$.

Es sei $x^p e^{-x}$ zu bestimmen für $x = \infty$. Die vorgelegte Funktion ist gleich $\frac{x^p}{e^x}$ und nimmt die Form $\frac{\infty}{\infty}$ für $x = \infty$ an. Ist nun $f_x = x^p$, $\phi_x = e^x$, so ist $\partial f_x = p x^{p-1}$ und $\partial \phi_x = e^x$,

und $\partial^n f_x = p!$, und $\partial^n \phi_x = e^x$, also folgt, die gegebene Funktion ist, für $x = \infty$, gleich $\frac{p!}{e^x}$, und das giebt 0.

Es sei $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}$ zu bestimmen für den Werth 1 von x. Der vorgelegte Ausdruck geht für $x = 1$ in $\infty - \infty$ über. Wenn man aber auf gleiche Benennung bringt, entsteht $\frac{x-1}{1-x^2}$; und dies ist $\frac{1}{2}$ für $x = 1$, wie sich findet, entweder indem man hebt, oder durch Anwendung des §. 297.

§. 300.

Den Werth 0^0 zu bestimmen, wenn er aus ${f_x}^{\phi_x}$ hervorgeht, setze man

$$\psi_x = {f_x}^{\phi_x}$$

und es folgt

$$\ln \psi_x = \phi_x \ln f_x$$

also

$$\psi_x = e^{\phi_x \ln f_x}$$

$$= e^{\frac{\ln f_x}{\phi_x - 1}}$$

und ermittele den Werth des Quotienten $\frac{\ln f_x}{\phi_x - 1}$ nach §. 297. Es ergiebt sich dafür $-\frac{{\phi_x}^2 \partial f_x}{f_x \partial \phi_x}$, und der gesuchte Werth ist alsdann

$$e^{-\frac{{\phi_x}^2 \partial f_x}{f_x \partial \phi_x}}.$$

unter x den Werth verstanden, für welchen f_x und ϕ_x einzeln in Null übergehen.

Aehnlich ergiebt sich der Werh ∞^0 u. s. w.

So folgt z. B. für $x = 0$

$$x^x = e^{-\frac{x^2}{x}} = e^{-x} = e^{-0} = 1.$$

§. 301.

Zuweilen ist es vortheilhaft (zuweilen nothwendig), wenn $\frac{f_x}{\phi_x}$ für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, sofort $a + h$ statt x zu setzen,

Zähler und Nenner nach Potenzen von h zu entwickeln, so viel es angeht mit h zu heben, und darauf Null zu setzen statt h, um den Werth von $\frac{f_a}{\phi_a}$ zu erhalten.

Setzt man z. B. in §. 297 5) $0 + h$ für x, so entsteht

$$\frac{h - \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \ldots\right)}{h^3} = \frac{1}{3!} - \frac{h^2}{5!} + \ldots$$

und dies ist $\frac{1}{6}$ für $h = 0$.

Oder es sei

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$$

zu berechnen für $x = 1$. Der vorgelegte Ausdruck ist gleich

$$\frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}.$$

Man setze $1 + h$ statt x, und es entsteht

$$\frac{(1+h)[h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \ldots] - h}{h[h - \frac{1}{2}h^2 + \ldots]}$$

und dieser Ausdruck liefert, wenn man die Klammern aufgelöst denkt, mit h^2 hebt, und $h = 0$ setzt, $\frac{1}{2}$ als Werth des oberen Ausdrucks für $x = 1$.

Dreizehntes Kapitel.

Von den höheren Gleichungen.

I. Von den Gleichungen im Allgemeinen.

§. 302.

Eine algebraische Gleichung mit einem Unbekannten x heißt vom nten Grade, wenn sie auf die Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0$$

gebracht werden kann, und geordnet, wenn sie auf diese Form

gebracht ist. Jeder von den Coefficienten a_1, a_2, a_3 .... a^n stellt irgend eine positive oder negative oder imaginaire Zahl vor, oder auch Null.

Ist a_1 gleich Null, so hat die Gleichung die Gestalt

$$x^n + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

und heißt eine reducirte Gleichung vom nten Grade. Sind alle Coefficienten außer a_n gleich Null, so hat die Gleichung die Form

$$x^n + a_n = 0$$

und heißt eine reine Gleichung vom nten Grade. Ist keiner von den Coefficienten der Gleichung Null, so heißt die Gleichung eine vollständige Gleichung vom nten Grade. Jede Gleichung vom nten Grade, welche keine vollständige ist, heißt eine unvollständige, jede, welche keine reine ist, eine unreine Gleichung vom nten Grade.

Eine Gleichung vom nten Grade wird eine höhere Gleichung genannt, wenn n größer ist als 2. Gleichungen des dritten Grades pflegt man auch cubische Gleichungen zu nennen.

Das Ordnen der höheren Gleichungen geschieht dem Ordnen der quadratischen Gleichungen ähnlich.

Wir werden die höheren Gleichungen nur unter der Voraussetzung betrachten, daß keiner der Coefficienten a_1 .... a^n imaginair ist.

Die Funktion

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

bezeichnen wir durch f. Die Gleichung des nten Grades wird dann durch $f = 0$ ausgedrückt.

Einer höheren Gleichung $f = 0$ können sowohl reelle als imaginaire Werthe von x entsprechen (wie solches auch bei den quadratischen Gleichungen der Fall ist). Jeder reelle oder imaginaire Werth von x, welcher die Gleichung $f = 0$ identisch macht, heißt eine Wurzel der Gleichung.

§. 303.

Wir betrachten zunächst die Funktion f, während x, stetig wachsend, alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. — Es

seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots. \nu$ die steigend geordneten Werthe von x, für welche die Funktion f ein Größtes oder Kleinstes ist. Von den Werthen $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma \ldots.$ ist dann entweder der erste, dritte, fünfte u. s. f. ein Größtes, und der zweite, vierte, sechste u. s. f. ein Kleinstes, oder umgekehrt. — Ist nun n ungerade, so nimmt die Funktion f den Gang

$$-\infty \ldots f_\alpha \ldots f_\beta \ldots f_\gamma \ldots\ldots f_\nu \ldots +\infty.$$

Der Werth f_α ist ein Größtes, f_β ein Kleinstes u. s. f., zuletzt f_ν ein Kleinstes. Nehmen wir an, f_α sei positiv, f_β negativ, f_γ positiv, f_δ negativ u. s. f., zuletzt f_ν negativ, so leuchtet ein, daß wenn q größte oder kleinste Werthe der Funktion f vorhanden sind, dieselbe $q+1$ mal den Werth Null annimmt. Zugleich ist einleuchtend, daß die Funktion für nicht mehr als $q+1$ reelle Werthe von x gleich Null werden kann, wohl aber für weniger, wenn die Vorzeichen der größten und kleinsten Werthe andere sind. — Ist dagegen n gerade, so nimmt die Funktion folgenden Gang:

$$+\infty \ldots f_\alpha \ldots f_\beta \ldots f_\gamma \ldots\ldots f_\nu \ldots +\infty.$$

Diesmal ist f_α ein Kleinstes, f_β ein Größtes u. s. f., zuletzt f_ν ein Kleinstes. Ist nun f_α negativ, f_β positiv, f_γ negativ, f_δ positiv u. s. f., zuletzt f_ν negativ, so geht die Funktion, wenn q die Anzahl der größten oder keinsten Werthe vorstellt, wiederum $q+1$ mal durch Null; und die Funktion kann für nicht mehr als $q+1$ reelle Werthe von x den Werth Null erhalten, wohl aber für weniger, wenn die größten oder kleinsten Werthe der Funktion andere Vorzeichen führen.

Ist also q die Anzahl der Werthe von x, für welche die Funktion f ein Größtes oder Kleinstes wird, so hat die Gleichung $f = 0$ höchstens $q+1$ reelle Wurzeln.

Hieraus folgt weiter, daß die Gleichung $f = 0$ vom nten Grade höchstens n reelle Wurzeln haben kann. — Es hat nämlich die Gleichung des ersten Grades eine reelle Wurzel. Die Funktion f des zweiten Grades hat zur ersten Ableitung eine Funktion des ersten Grades, sie hat deshalb einen größten oder

kleinsten Werth (in der That einen kleinsten) und wird daher höchstens für zwei reelle Werthe von x zu Null. Die Ableitung der Funktion f vom dritten Grad ist vom zweiten Grade, wird höchstens für zwei reelle Werthe von x zu Null, deshalb hat die Funktion f vom dritten Grade höchstens zwei größte oder kleinste Werthe, also die Gleichung $f = 0$ des dritten Grades höchstens drei reelle Wurzeln. U. s. f.

§. 304.

1) Ist n ungerade, so hat die Gleichung $f = 0$ wenigstens eine reelle Wurzel.

Denn während x von $-\infty$ wächst bis $+\infty$, durchläuft f die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$.

2) Ist n gerade, so hat die Gleichung $f = 0$ nicht nothwendig eine reelle Wurzel.

Denn während x wächst von $-\infty$ bis $+\infty$, beginnt f mit $+\infty$ und endigt mit $+\infty$, und es kann das absolute Minimum positiv ausfallen.

3) Ist n gerade und das letzte Glied a_n von f negativ, so hat die Gleichung $f = 0$ wenigstens zwei reelle Wurzeln, von welchen die eine positiv, die andere negativ ist.

Denn für $x = 0$ ist $f = -a_n$, also muß f, während x wächst von $-\infty$ bis $+\infty$, von seinem ersten Werth $+\infty$ fallen bis $-a_n$ und darauf steigen bis $+\infty$, also zweimal durch 0 gehen, und zwar für einen negativen und für einen positiven Werth von x, da f negativ ist für $x = 0$.

§. 305.

Ist x_1 eine relle oder imaginaire Wurzel der Gleichung des nten Grades $f = 0$, so ist $f = (x - x_1)f_1$, unter f_1 eine Funktion des $(n-1)$sten Grades verstanden, von gleicher Form mit der Funktion f.

Wird f durch $x - x_1$ dividirt, so ergiebt sich als Quotient eine Funktion f_1 des $(n-1)$sten Grades, wie leicht aus dem

Verfahren der Division erhellet. Bliebe ein Rest r, so enthielte er, als vom 0ten Grade, kein x, und es wäre

$$f = (x - x_1)f_1 + r.$$

Für $x = x_1$ folgt hieraus

$$0 = 0 + r$$

also

$$0 = r.$$

§. 306.

Sind daher $x_1, x_2, x_3 \ldots. x_q$, q beliebige Wurzeln der Gleichung des nten Grades $f = 0$, so ist

$$f = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots. f_1$$

und es ist f_1 vom Grade $n - q$.

§. 307.

Es ist

$$(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3) \ldots. (x + x_n)$$

$$= x^n + \left\{\begin{matrix} x_1 \\ + x_2 \\ + x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + x_n \end{matrix}\right\} x^{n-1} + \left\{\begin{matrix} x_1 x_2 \\ + x_1 x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + x_1 x_n \\ + x_2 x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + x_2 x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} x^{n-2} + \left\{\begin{matrix} x_1 x_2 x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} x^{n-3} + \ldots$$

$$+ x_1 x_2 x_3 \ldots. x_n.$$

Die Coefficienten werden durch die einzelnen Combinationsklassen ohne Wiederholung aus den Elementen $x_1, x_2 \ldots x_n$ geliefert.

Man findet das Gesetz durch Multiplication, oder durch Combinationslehre.

§. 308.

Die Gleichung des nten Grades hat nicht mehr als n reelle oder imaginaire Wurzeln.

Denn sind $x_1, x_2, \ldots. x_q$ sämmtliche Wurzeln der Gleichung, so ist

$$f = (x - x_1)(x - x_2) \ldots. (x - x_q)$$

und wäre die Anzahl der rechts stehenden Faktoren größer als n, so wäre nach dem vorigen Paragraph die rechts stehende Funktion von einem höheren Grade als f, welches sich widerspricht.

§. 309.

Die Gleichung

$$x^n \mp a = 0$$

hat n Wurzeln.

Denn es ist

$$x = \sqrt[n]{\pm a}$$

und dieser Wurzel entsprechen nach §. 167 n verschiedene Werthe.

§. 310.

Die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots. a_{n-1} x + a_n = 0$$

hat stets eine reelle oder imaginaire Wurzel.

Wir unterscheiden zwei Fälle, entweder ist $a_n = 0$ oder es ist $a_n \gtrless 0$.

Ist $a_n = 0$, so kann die Gleichung in der Form

$$(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \ldots. a_{n-1})x = 0$$

dargestellt werden, und es fällt in die Augen, daß ihr der Werth $x = 0$ Genüge leistet.

Es sei andererseits a_n nicht gleich Null. In diesem Fall entspricht der Werth $x = 0$ der Gleichung nicht.

Wir setzen

$$x = p + qi$$

und betrachten p und q als reell und unveränderlich. x stellt alsdann alle reellen und imaginairen Werthe vor, und es kommt

darauf an, darzulegen, daß ein Paar Werthe p' und q' bestehe, so daß

$$x = p' + q'i$$

der Gleichung genüge. Unter der gegenwärtigen Annahme können p' und q' nicht gleichzeitig Null sein.

In f denke man $p + qi$ statt x gesetzt, die Potenzen nach dem binomischen Satz entwickelt, und die reellen Ausdrücke von den imaginairen gesondert. Man überblickt leicht daß

$$f_x = f_{p,q} = A + Bi$$

entsteht, unter A und B Funktionen von p und q verstanden, und daß in diesen Funktionen p und q nur mit positiven ganzen Exponenten auftreten.

Welche Vorzeichen A und B führen mögen, immer ist A^2 positiv, eben so B^2. Bilden wir daher, und wir haben Grund dazu, die Funktion

$$\phi = A^2 + B^2$$

so kann dieselbe keinen negativen Werth annehmen, sondern nur positiv sein, oder Null; und ist sie gleich Null, so muß $A = 0$ sein und $B = 0$.

Ist für irgend besondere Werthe von p und q

$$A + Bi = 0$$

so ist zugleich

$$A^2 + B^2 = 0$$

und umgekehrt. Denn jede dieser Gleichungen kann nur in Erfüllung gehen, wenn gleichzeitig A und B Null ist.

Alle Werthe der Funktion $A^2 + B^2$ zu erhalten, denke man etwa statt p alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, gesetzt, und bei jedem Werth von p sämmtliche Werthe von q. Die Funktion ist $+\infty$ sowohl, wenn $p = q = -\infty$, als wenn $p = q = +\infty$. Sie beginnt daher mit $+\infty$ und endigt mit $+\infty$, und hat also ein absolutes Minimum. Es läßt sich darthun, daß dies Minimum Null ist.

Zu dem Ende setzen wir

$$p + qi = r(\mathrm{Cos}\, z + i\, \mathrm{Sin}\, z)$$

und führen diese Form zunächst in f ein. Es entsteht

$$x^n = r^n[\cos nz + i \sin nz]$$
$$a_1 x^{n-1} = a_1 r^{n-1}[\cos(n-1)z + i \sin(n-1)z]$$
$$a_2 x^{n-2} = a_2 r^{n-2}[\cos(n-2)z + i \sin(n-2)z]$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n-1} x = a_{n-1} r[\cos z + i \sin z]$$
$$a_n = a_n$$

also

$$f = A + Bi$$

während nunmehr

$$A = r^n \cos nz + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)z + \ldots + a_{n-1} r \cos z + a_n$$
$$B = r^n \sin nz + a_1 r^{n-1} \sin(n-1)z + \ldots + a_{n-1} r \sin z.$$

Die Werthe von r und z, welche die Funktion $A^2 + B^2$ zu einem Minimum machen, müssen den beiden Gleichungen entsprechen

$$1) \quad A\partial A r + B\partial B r = 0$$
$$2) \quad A\partial A z + B\partial B z = 0.$$

Wir bilden und setzen beziehlich

$$\partial A r = n r^{n-1} \cos nz + a_1 (n-1) r^{n-2} \cos(n-1)z + \ldots + a_{n-1} \cos z = C$$
$$\partial B r = n r^{n-1} \sin nz + a_1 (n-1) r^{n-2} \sin(n-1)z + \ldots + a_{n-1} \sin z = D.$$

Diese Ableitungen C und D beziehlich von A und B nach r sind als Funktionen von r aufzufassen. Sie können im Allgemeinen, d. h. für jeden Werth von r nicht gleichzeitig Null sein; denn alsdann wäre nothwendig jeder ihrer Coefficienten Null, und aus

$$n \cos nz = n \sin nz = 0$$

würde folgen

$$\cos nz = \sin nz = 0$$

während Cos und Sin desselben Winkels niemals gleichzeitig den Werth Null annehmen.

Wir bilden weiter

$$\partial Az = -[nr^n \operatorname{Sin} nz + a_1(n-1)r^{n-1}\operatorname{Sin}(n-1)z + \ldots + a^{n-1} r \operatorname{Sin} z]$$

$$\partial Bz = \quad nr \operatorname{Cos} nz + a_1(n-1)r^{n-1}\operatorname{Cos}(n-1)z + \ldots + a^{n-1} r \operatorname{Cos} z$$

und es fällt in die Augen, daß

$$\partial Az = -rD$$
$$\partial Bz = \quad rC.$$

Die Gleichungen 1) und 2) gehen, wenn wir diese Werthe einführen, über in

$$3) \quad AC + BD = 0$$
$$4) \quad -ArD + BrC = 0.$$

Es sei $r \gtrless 0$; dann kann die Gleichung 4) durch r gehoben werden, und unsere Gleichungen sind

$$5) \quad AC + BD = 0$$
$$6) \quad -AD + BC = 0.$$

Wäre nun $C = 0$ oder $D = 0$, so hätte man sofort $A = 0$ und $B = 0$, also auch $A^2 + B^2 = 0$. Ist weder C noch D im Allgemeinen Null, so folgt

$$AC = -BD$$
$$-AD = -BC$$

also multiplicirend

$$-A^2 = B^2$$

oder

$$A^2 + B^2 = 0$$

Ist also $r \gtrless 0$, so bewirken die Werthe r' und z', welche den Gleichungen 1) und 2) entsprechen, daß $A^2 + B^2 = 0$, d. h. diese Funktion, welche nicht negativ sein kann, zu ihrem absoluten Minimum werde.

Dann aber ist auch $A = 0$ und $B = 0$, und jene Werthe r' und z' liefern einen Werth

$$x = p' + q'i$$

welcher unserer Gleichung genügt.

Die Gleichung 4) wird auch erfüllt durch den Werth

$r = 0$. Diesen ziehen wir hier indeß nicht in Betracht, weil $r = 0$ auch

$$x = p + qi = r(\operatorname{Cos} z + i \operatorname{Sin} z) = 0$$

bedingt, während $x = 0$ der Gleichung nicht entspricht, so lange $a_n \gtrless 0$ ist.

§. 311.

1) Die Funktion f des nten Grades läßt sich jedesmal in das Produkt $(x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n)$ von n Faktoren zerlegen, während $x_1, x_2, \dots x_n$ reelle oder imaginaire Werthe vorstellen.

Nach dem vorigen Paragraphen besteht jedesmal eine Wurzel x_1 der Gleichung $f = 0$. Daher läßt sich nach §. 305 setzen

$$f = (x - x_1) f_I$$

während f_I vom $(n-1)$sten Grade ist. Für f_I entsteht in gleicher Weise

$$f_I = (x - x_2) f_{II}$$

und es ist f_{II} vom Grade $n - 2$. In solcher Weise fortschließend ergiebt sich die Behauptung.

2) Die Gleichung des nten Grades $f = 0$ hat n Wurzeln.

Denn es sei $f = (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n)$, so wird f für jeden der n Werthe $-x_1, -x_2, \dots -x_n$ zu Null.

Die n Wurzeln kommen indeß nur insofern heraus, als man, wenn mehrere der Werthe $-x_1, -x_2, \dots$ einander gleich sind, diese doch als eben so viele Wurzeln zählt. Und haben p der Wurzeln einerlei Werth, so sagt man, dieser Werth sei eine pfache Wurzel.

3) Die Wurzeln der Gleichung, entgegengesetzt genommen, sind die Werthe $x_1, x_2, x_3 \dots$ in dem Produkt, welches f ausdrückt; und nach §. 307 übersieht sich nun der Zusammenhang, in welchem die Wurzeln der Gleichung mit ihren Coefficienten stehen. Für die Folge ist bemerkenswerth, daß das Produkt aus den sämmtlichen, entgegengesetzt genommenen Wurzeln das letzte Glied a_n giebt.

§. 312.

Hat die Gleichung des nten Grades $f=0$ die Wurzel x_1, so ist die Gleichung durch $x-x_1$ theilbar, und die Division liefert eine Gleichung des $(n-1)$sten Grades $f_I=0$, deren $n-1$ Wurzeln die übrigen der ursprünglichen Gleichung sind.

§. 313.

Sind $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ die n Wurzeln der Gleichung des nten Grades $f=0$, so ist, unter a_n den Coefficienten von x^0 in der Funktion f verstanden,

$$f = a_n\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\left(1-\frac{x}{x_3}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_n}\right).$$

Es ist nämlich

$$\alpha)\ f=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

und es ist

$$a_n = -x_1\cdot -x_2\cdot -x_3\ldots -x_n.$$

Wenn man daher den unter α) rechts stehenden Ausdruck mit a_n multiplicirt und durch das a_n gleiche Produkt dividirt, entsteht die Behauptung.

§. 314.

Es ist

$$\operatorname{Sin} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots$$

$$\operatorname{Cos} x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\ldots$$

Es ist nämlich

$$\operatorname{Cos} x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

und da Cos x gleich Null ist für die Werthe $\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi, \ldots$ von x, so dürfen diese Werthe als Wurzeln der Gleichung

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots=0$$

betrachtet werden; und dann ist nach dem vorigen Paragraph

$$\operatorname{Cos} x = \left(1-\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}\right)\ldots$$

welches der obere Werth für Cos x ist. Der Ausdruck für Sin x entsteht, wenn man

$$\operatorname{Sin} x = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)$$

setzt, und π, $-\pi$, 2π, -2π, ... als Wurzeln der Gleichung

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = 0$$

betrachtet.

§. 315.

Hat die Gleichung $f = 0$ die $p$fache Wurzel v, so enthält der größte gemeinschaftliche Theiler zu f und ∂f_x den Faktor $(x - v)^{p-1}$.

Denn es ist dann f von der Form $(x - v)^p \phi_x$, und aus

$$f = (x - v)^p \phi_x$$

folgt

$$\begin{aligned}\partial f_x &= (x - v)^p \partial \phi_x + p(x - v)^{p-1} \phi_x \\ &= (x - v)^{p-1}[(x - v)\partial \phi_x + p\phi_x].\end{aligned}$$

Der Satz gilt auch umgekehrt.

§. 316.

Giebt es daher einen Werth x_1 von x, für welchen ∂f_x zu Null wird und zugleich f, so hat die Gleichung $f = 0$ den Werth x_1 wenigstens als zweifache Wurzel.

§. 317.

Hat eine Gleichung des $n$ten Grades die Wurzel $p + q\sqrt{-1}$, so hat sie zugleich die Wurzel $p - q\sqrt{-1}$, und hat sie die letzte Wurzel, so hat sie auch die erstere.

Die Gleichung sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Wir setzen $p \pm qi = r(\operatorname{Cos}\phi \pm i \operatorname{Sin}\phi)$, substituiren diesen Ausdruck für x und wenden §. 163 an. Es entsteht:

$$\begin{aligned}&r^n \operatorname{Cos} n\phi + a_1 r^{n-1} \operatorname{Cos}(n-1)\phi + a_2 r^{n-2} \operatorname{Cos}(n-2)\phi \\ &\qquad + \ldots + a_n \\ &\pm i[r^n \operatorname{Sin} n\phi + a_1 r^{n-1} \operatorname{Sin}(n-1)\phi + a_2 r^{n-2} \operatorname{Sin}(n-2)\phi \\ &\qquad + \ldots + a_n] = 0.\end{aligned}$$

Ist diese Gleichung identisch, so sind r und ϕ von der Beschaffenheit, daß sowohl die eingeklammerte Summe Null ist, als die darüber stehende. Sind aber diese Summen gleich Null, so geht die Gleichung, sobald einer der Werthe $p \pm q\sqrt{-1}$ genügt, auch immer für den anderen in Erfüllung.

§. 318.

Es sei die Gleichung gegeben

$$1)\ x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Statt x werde die Funktion des ersten Grades $py + q$ substituirt. Das liefert

$$(py + q)^n + a_1 (py + q)^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

und diese Gleichung ist in Bezug auf jeden der Ausdrücke p, y, q vom n Grade, wie die ursprüngliche. Ordnen wir nach den Potenzen von y und dividiren durch p^n, so entsteht

$$2)\ y^n + (nq + a_1)\frac{y^{n-1}}{p} + [n_2 q^2 + a_1(n-1)q + a_2]\frac{y^{n-2}}{p^2} + \ldots = 0$$

wobei n, $n - 1$, ... mit Zeigern, a mit Stellenzahlen erscheint.

Wären für p, y und q besondere Werthe ermittelt, welche der Gleichung 2) entsprechen, so würde offenbar für diese Werthe die Summe $py + q$ einen Werth von x der Gleichung 1) ausmachen. Und setzt man in 2) statt p und q beliebige bestimmte Werthe p' und q', ermittelt darauf y der Gleichung 2) entsprechend, so ist auch $p'y + q'$ eine Wurzel der Gleichung 1). Darf man aber für p und q beliebige Werthe setzen, so ist es möglich, diese dergestalt zu wählen, daß dadurch Bedingungen erfüllt werden. Hierin liegt das Prinzip der sogenannten **Transformation** der Gleichungen. Wir werden nur zwei hierher gehörige Fälle anführen.

§. 319.

Es sei gegeben die Gleichung

$$1)\ x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Man substituire $\frac{1}{g}y$ statt x (d. h. im Sinn des vorigen Para-

graphen, man setze $p = \frac{1}{g}$ und $q = 0$), und es entsteht

$$2)\ y^n + a_1 g y^{n-1} + a_2 g^2 y^{n-2} + \ldots + a_n g^n = 0.$$

Und ist aus 2) y gefunden, so ist $x = \frac{1}{g} y$.

Dieser Umformung bedient man sich, Nenner zu beseitigen. Sämmtliche Nenner der Gleichung 1) fallen fort, wenn man g gleich dem Generalnenner setzt; oft reicht eine kleinere Zahl aus.

Die Gleichung 2) entsteht aus 1), indem man y setzt statt x, und die Glieder der (vollständig gedachten) Gleichung 1) der Reihe nach mit 1, g, $g^2, \ldots g^n$ multiplicirt.

§. 320.

Eine nicht reducirte Gleichung vom nten Grade

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

reduciren heißt, aus dieser Gleichung eine reducirte Gleichung vom nten Grade

$$y^n + b_2 y^{n-2} + \ldots + b_n = 0$$

ableiten, welche einen anderen Unbekannten y enthält, und welche zu der ersteren nicht reducirten Gleichung in einer solchen Beziehung steht, daß, wenn aus der reducirten Gleichung der Unbekannte y ermittelt ist, auch der Unbekannte x bekannt sei, welcher der nicht reducirten Gleichung zugehört.

§. 321.

Aufgabe. Die nicht reducirte Gleichung vom nten Grade

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

zu reduciren.

Auflösung. Man substituire nach §. 318 für x die Funktion $py + q$, während vorläufig p und q als unbestimmt gelten. Es entsteht die Gleichung 2) des §. 318. Damit diese eine reducirte werde, setze man

$$nq + a_1 = 0$$

d. h.

$$q = -\frac{a_1}{n}$$

p bleibt unbestimmt, darf also beliebig gewählt werden. Der Einfachheit wegen setzt man p gleich 1.

Will man also die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

reduciren, so substituire man

$$y - \frac{a_1}{n}$$

statt x; und ist die reducirte Gleichung nach y entwickelt, so hat man in $y - \frac{a_1}{n}$ das x der ursprünglichen Gleichung.

Auch reducirt sich die Gleichung, wenn man $py - \frac{a_1}{n}$ statt x substituirt, unter p einen beliebigen Ausdruck verstanden.

II. Von den Gleichungen des dritten Grades.

§. 322.

Aufgabe. Die drei Wurzeln der reinen Gleichung des dritten Grades

$$x^3 \mp a = 0$$

zu bestimmen.

Auflösung. Es sei zunächst

$$x^3 - a = 0$$

und es folgt

$$x = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{+1}$$

oder nach §. 167

$$x = \sqrt[3]{a}\left(\operatorname{Cos}\frac{2g\pi}{3} + i\operatorname{Sin}\frac{2g\pi}{3}\right)$$

während statt g die Werthe 0, 1, 2, oder 0, +1, —1, zu setzen sind. Die Substitution der letzten Werthe liefert

$$x = \sqrt[3]{a}(\operatorname{Cos}0 + i\operatorname{Sin}0)$$

$$x = \sqrt[3]{a}(\operatorname{Cos}\tfrac{2}{3}\pi + i\operatorname{Sin}\tfrac{2}{3}\pi)$$

$$x = \sqrt[3]{a}[\operatorname{Cos}(-\tfrac{2}{3}\pi) + i\operatorname{Sin}(-\tfrac{2}{3}\pi)].$$

Es ist $\mathrm{Cos}\,\frac{2}{3}\pi = -\mathrm{Cos}\,\frac{1}{3}\pi = -\mathrm{Sin}\,\frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{2}$, und $\mathrm{Sin}\,\frac{2}{3}\pi = \mathrm{Sin}\,\frac{1}{3}\pi = \mathrm{Cos}\,\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; daher entsteht

$$x = \sqrt[3]{a} \cdot 1$$
$$x = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

und dies sind die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 - a = 0$, oder, mit anderen Worten, die drei Werthe von $\sqrt[3]{a}$.

Ist andererseits

$$x^3 + a = 0$$

so folgt

$$x = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{-1}$$

oder

$$x = \sqrt[3]{a}\left[\mathrm{Cos}\,\frac{(2g+1)\pi}{3} + i\,\mathrm{Sin}\,\frac{(2g+1)\pi}{3}\right]$$

während für g die Werthe 0, 1, 2, oder 0, + 1, — 1 zu setzen sind; und es ergeben sich

$$x = \sqrt[3]{a} \cdot (-1)$$
$$x = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

als Wurzeln der Gleichung $x^3 + a = 0$.

Die Gleichung

$$x^3 \mp a = 0$$

löst sich auch in folgender Weise: Zuerst hat man

$$x = \pm \sqrt[3]{a}.$$

Daher ist $x \mp \sqrt[3]{a}$ Faktor der Gleichung; durch diesen Faktor dividirt entsteht die quadratische Gleichung

$$x^2 \pm x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 0$$

in deren Wurzeln die beiden übrigen Wurzeln der gegebenen Gleichung sich darbieten.

§. 323.

1) Die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

sind einander gleich, und jede ist $-\frac{a}{3}$, wenn

$$b = \frac{a^2}{3} \text{ ist und } c = \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Denn die Gleichung ist alsdann $\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 = 0.$

2) Sind die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ einander gleich, so ist $b = \frac{a^2}{3}$ und $c = \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

Denn ist x^1 jede der Wurzeln, so ist die Gleichung $(x - x_1)^3 = 0$ oder $x^3 - 3x_1x^2 + 3x_1^2x - x_1^3 = 0$, und setzen wir $-3x_1 = a$, $3x_1^2 = b$, $-x_1^3 = c$, so erhellet die Behauptung.

3) Die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ hat, unter der Voraussetzung, daß nicht gleichzeitig b und c Null sind, niemals drei gleiche Wurzeln, also höchstens deren zwei.

Denn wären die drei Wurzeln der Gleichung einander gleich, so müßte, da a Null ist, nach 2) auch b Null sein und zugleich c.

§. 324.

Jede Gleichung dritten Grades, deren drei Wurzeln nicht einander gleich sind, läßt sich auf die Form

$$x^3 + bx + c = 0$$

bringen, während nicht gleichzeitig b und c Null sind.

Denn reduciren wir die Gleichung

$$1)\quad y^3 + ny^2 + py + q = 0$$

indem wir nach §. 321 $x - \frac{n}{3}$ statt y setzen, so entsteht

$$2)\quad x^3 + \left(p - \frac{n^2}{3}\right)x + \left(\frac{2n^3}{27} - \frac{np}{3} + q\right) = 0.$$

Sollte nun $p - \frac{n^2}{3} = 0$

sein, zugleich

$$\frac{2n^3}{27} - \frac{np}{3} + q = 0$$

so folgte hieraus $p = \frac{n^2}{3}$ und $q = \left(\frac{n}{3}\right)^3$. Das ist aber nicht der Fall, so lange die Gleichung 1) nicht drei gleiche Wurzeln hat. Daher erhellet der Satz.

§. 325.

Die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + bx + c = 0$$

in welcher nicht gleichzeitig b Null ist und c, sind sämmtlich reell, wenn

b negativ

ist und in absoluter Hinsicht

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 \geqq \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Die Gleichung hat dagegen zwei imaginaire Wurzeln und eine reelle, wenn

b negativ

und in absoluter Hinsicht

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 < \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

ist, oder wenn

b positiv oder Null ist.

Nach §. 317 sind imaginaire Wurzeln von Gleichungen stets paarweise vorhanden. Daher kann eine Gleichung dritten Grades nur entweder drei reelle Wurzeln haben, oder eine reelle und zwei imaginaire. — Und hat eine Gleichung des dritten Grades zwei gleiche Wurzeln, so sind ihre sämmtlichen Wurzeln reell; denn hätte die Gleichung imaginaire Wurzeln, so hätte sie deren zwei, diese wären ungleich nach §. 317, und da die dritte Wurzel reell ist, so könnten nicht zwei gleiche Wurzeln sich vorfinden.

Die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ hat nach den Erörterungen in §. 303 drei reelle Wurzeln, sobald die Funktion $x^3 + bx + c$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, ein Maxi-

mum gewinnt, das positiv, und ein Minimum, das negativ ist. Die Gleichung hat ferner, nach dem vorhin Bemerkten, drei reelle Wurzeln, sobald zwei ihrer Wurzeln gleich sind.

Wir untersuchen zuerst, von welcher Beschaffenheit die Coefficienten b und c sein müssen, damit die Funktion $x^3 + bx + c$ ein Maximum habe, das positiv, und ein Minimum, das negativ sei.

Aus $$f = x^3 + bx + c$$
folgt $$\partial f_x = 3x^2 + b$$
$$\partial^2 f_x = 6x$$
$$\partial^3 f_x = 6$$
und $$3x^2 + b = 0$$
liefert $$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{3}}.$$

Soll die Funktion für diesen Werth von x einen größten oder kleinsten Werth erhalten, so muß b negativ, d. h. weder positiv noch Null sein (b kann nicht Null sein, weil sonst $x = 0$, ferner $\partial^2 f_x = 0$ und dabei $\partial^3 f_x$ constant sein würde; und dann wäre dte Funktion f kein Maximum oder Minimum, sondern im Wachsthum). Wir nehmen b negativ, also
$$f = x^3 - bx + c$$
und substituiren $-\sqrt{\frac{b}{3}}$ und $+\sqrt{\frac{b}{3}}$ statt x. Der erste Werth liefert, da die zweite Ableitung mit x einerlei Vorzeichen hat, das Maximum, der zweite das Minimum. Das Maximum selbst ist
$$\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c$$
das Minimum $$-\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c.$$

Das Maximum soll positiv, das Minimum negativ sein, als
$$\alpha)\quad \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c > 0$$
$$\beta)\quad -\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c < 0..$$

Ist c positiv, so tritt α) von selbst ein, damit aber β) erfüllt werde, muß in absoluter Hinsicht $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}$ größer sein als c. Ist c negativ, so versteht sich β) von selbst, und es muß, damit α) in Erfüllung gehe, in absoluter Hinsicht $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}$ größer als c sein. Die Bedingungen α) und β) sind also stets erfüllt, sobald in absoluter Hinsicht

$$\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} > c$$

oder

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Die Funktion $x^3 + bx + c$ hat hiernach ein positives Maximum und ein negatives Minimum, und die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ drei reelle Werthe, sobald

$$b \text{ negativ}$$

ist und

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ hat wegen der Voraussetzung, daß nicht b und c gleichzeitig Null sind, höchstens zwei gleiche Wurzeln. Nach §. 316 sind zwei gleiche Wurzeln vorhanden, wenn

$$f = x^3 + bx + c$$

und

$$\partial f_x = 3x^2 + b$$

für einerlei Werth von x in Null übergehen. Der Werth von x muß reell sein, weil er Wurzel der Gleichung ist, und die Gleichung drei reelle Wurzeln hat, sobald sie zwei gleiche besitzt. — Die Ableitung ist Null für $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{3}}$. Damit dieser Ausdruck reell ausfalle, muß b negativ sein, oder Null. Setzen wir b negativ und substituiren $\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$ in $f = x^3 - bx + c$, so entsteht

$$\mp\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} + c$$

und dies ist Null für das eine oder das andere Vorzeichen, wenn in absoluter Hinsicht

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Nehmen wir $b = 0$, so müßte, damit zugleich f Null werde, auch c Null sein; und das wäre gegen die Voraussetzung.

Die Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ hat demnach auch drei reelle Wurzeln, wenn

$$b \text{ negativ}$$

und
$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Damit ist der eine Theil des Satzes erwiesen. Der andere überblickt sich leicht nach diesen Erörterungen.

§. 326.

Aufgabe. Die reducirte kubische Gleichung

$$x^3 + bx + c = 0$$

aufzulösen.

Auflösung. Man setze statt x die Summe $y + z$; das liefert

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + b(y + z) + c = 0$$

oder $$y^3 + 3yz(y + z) + z^3 + b(y + z) + c = 0$$

oder $$y^3 + z^3 + c + (3yz + b)(y + z) = 0.$$

Ein Werth von x, welcher der gegebenen Gleichung entspricht, wird jedesmal erhalten in der Summe solcher Werthe von y und z, für welche die Summe

$$y^3 + z^3 + c + (3yz + b)(y + z)$$

zu Null wird. Diese Summe ist gleich Null, wenn $y^3 + z^3 + c = 0$ ist, und zugleich $3yz + b = 0$ ist. Daher wird ein Werth von x auch erhalten in der Summe solcher Werthe von y und z, welche den Gleichungen

$$1)\quad y^3 + z^3 + c = 0$$

$$2)\quad 3yz + b = 0$$

genügen, so daß wir, um x zu finden, nur nöthig haben, aus den beiden letzten Gleichungen y und z zu entwickeln, und die Summe der gefundenen Werthe zu bilden.

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$3)\quad z = -\frac{b}{3y}.$$

Diesen Werth substituiren wir in 1), und es entsteht

$$y^3 - \frac{b^3}{27y^3} + c = 0$$

oder

$$y^6 + cy^3 - \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 0.$$

Hieraus ist

$$y = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Nach 3) ist

$$z = -\frac{b}{3y}$$

oder, wenn man für y den Werth setzt,

$$z = -\frac{b}{3\sqrt[3]{-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}}.$$

Den letzten Ausdruck zu reduciren, werde Zähler und Nenner mit $\sqrt[3]{-\frac{c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$ multiplicirt, das liefert

$$z = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Man hat daher

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Diese Auflösung ist unter dem Namen der Cardanischen Formel bekannt.

Der für x erhaltene Ausdruck stellt neun verschiedene Werthe dar. Denn bezeichnen wir der Kürze wegen den ersten Summand

durch $\sqrt[3]{A}$, den andern durch $\sqrt[3]{B}$, so stellt nach §. 320 der erste Summand die drei Werthe

$$\sqrt[3]{A}, \quad \sqrt[3]{A}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \sqrt[3]{A}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

vor, der andere die drei Werthe

$$\sqrt[3]{B}, \quad \sqrt[3]{B}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \sqrt[3]{B}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

und wenn man jeden der drei Werthe von $\sqrt[3]{A}$ zu jedem der drei Werthe von $\sqrt[3]{B}$ addirt, ergeben sich neun verschiedene Summen. Die cubische Gleichung hat aber nur drei Auflösungen. Daher entsteht die Frage, welche drei der gedachten neun Summen der Gleichung als Wurzeln entsprechen. Diese Frage beantwortet sich durch die Gleichung 2). Nach derselben muß

$$yz = -\frac{b}{3}$$

sein, d. h.

$$\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B} = -\frac{b}{3}$$

und das trifft nur zu für folgende Werthe:

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

$$x = \sqrt[3]{A}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{B}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{A}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{B}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Hierin bestehen also die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Die Cardanische Formel ist ohne Weiteres anwendbar, so lange die in ihr vorkommenden Quadratwurzeln reell bleiben. Dies ist der Fall, wenn b positiv oder Null, wenn b negativ und in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 < \left(\frac{c}{2}\right)^2$, endlich, wenn b negativ und in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ ist; d. h. wenn die Gleichung eine reelle und zwei imaginaire Wurzeln hat, und

wenn sie drei reelle Wurzeln hat, unter denen sich aber zwei gleiche befinden. — Ist dagegen b negativ und in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$, so hat die Gleichung bloß reelle und ungleiche Wurzeln, aber die Cardanische Formel wird imaginair, und es muß für diesen Fall eine weitere Operation eintreten, die Wurzeln der Gleichung in reeller Gestalt zu erhalten.

Es sei

$$x^3 - bx + c = 0$$

also b negativ, dabei in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Die Cardanische Formel liefert

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

oder

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{-1}}$$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{-1}}.$$

Wir setzen

$$-\frac{c}{2} = p, \quad \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = q$$

so ist

$$-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{-1} = p + qi$$
$$-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{-1} = p - qi.$$

Es sei

$$p + qi = r(\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sin}\phi)$$
$$p - qi = r(\operatorname{Cos}\phi - i\operatorname{Sin}\phi)$$

dann ist

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} = + \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

$$\alpha)\quad \text{Cos}\,\phi = \frac{p}{r} = \left(-\frac{c}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

und es ist

$$\beta)\quad \sqrt[3]{p+qi} = \sqrt{\frac{b}{3}}\left(\text{Cos}\,\frac{2g\pi+\phi}{3} + i\,\text{Sin}\,\frac{2g\pi+\phi}{3}\right)$$

$$\gamma)\quad \sqrt[3]{p-qi} = \sqrt{\frac{b}{3}}\left(\text{Cos}\,\frac{2g\pi+\phi}{3} - i\,\text{Sin}\,\frac{2g\pi+\phi}{3}\right)$$

während g die Werthe 0, 1, 2, oder 0, + 1, — 1 repräsentirt. Nun ist

$$x = \sqrt[3]{p+qi} + \sqrt[3]{p-qi}$$

und hieraus ergeben sich, wenn wir für jede der Wurzeln ihre drei Werthe aus β) und γ) setzen, neun verschiedene Werthe von x. Als Wurzeln der Gleichung können aber diesmal nur die rellen Werthe dienen; lassen wir daher die imaginairen Summanden $+ i\,\text{Sin}\,\frac{2g\pi+\phi}{3}$ und $- i\,\text{Sin}\,\frac{2g\pi+\phi}{3}$ sich heben, so erhalten wir in

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\text{Cos}\,\frac{2g\pi+\phi}{3}$$

unter g die Werthe 0, 1, 2 oder 0, + 1, — 1 verstanden, die drei Wurzeln der Gleichung. Diese sind demnach

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{3}\phi$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\text{Cos}\,\frac{2\pi+\phi}{3}$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\text{Cos}\,\frac{2\pi-\phi}{3}$$

während φ sich nach α) durch

$$\text{Cos}\,\phi = -\frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

Der Winkel ϕ ist spitz, wenn c negativ, stumpf, wenn c positiv ist. Ist ϕ stumpf, so kann man $\phi = \frac{1}{2}\pi + \gamma$ setzen, und hat dann

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{3}\phi = \mathrm{Cos}(\tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{1}{3}\gamma) = \mathrm{Cos}[\tfrac{1}{2}\pi - (\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{3}\gamma)] = \mathrm{Sin}\frac{\pi - \gamma}{3}$$

$$\mathrm{Cos}\frac{2\pi + \phi}{3} = \mathrm{Cos}(\tfrac{5}{6}\pi + \tfrac{1}{3}\gamma) = \mathrm{Cos}[\tfrac{1}{2}\pi + (\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\gamma)] = -\mathrm{Sin}\frac{\pi + \gamma}{3}$$

$$\mathrm{Cos}\frac{2\pi - \phi}{3} = \mathrm{Cos}(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{3}\gamma) = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{3}\gamma$$

weiter $$\mathrm{Cos}(\tfrac{1}{2}\pi + \gamma) = -\frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

oder $$-\mathrm{Sin}\,\gamma = -\frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

also $$\mathrm{Sin}\,\gamma = \frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}.$$

Ist daher in absoluter Hinsicht $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$ und ist gegeben

$$x^3 - bx - c = 0$$

so setze man

$$\mathrm{Cos}\,\phi = \frac{c}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$$

und dann ist

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{3}\phi$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi + \phi}{3}$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi - \phi}{3}.$$

Ist aber gegeben

$$x^3 - bx + c = 0$$

so kann man setzen

$$\mathrm{Sin}\,\phi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$$

und hat dann

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{3}\phi$$

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi - \phi}{3}$$

$$x = -2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi + \phi}{3}.$$

Die letztern Erörterungen sind entbehrlich. Es genügt, festzuhalten, daß bei beliebigem Vorzeichen von c

$$\mathrm{Cos}\,\phi = \left(-\frac{c}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^3}$$

ist, und dann

$$x = 2\sqrt{\frac{b}{3}}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2g\pi + \phi}{3}.$$

§. 327.

Gleichungen von der Form

$$y^{3n} + ay^n + b = 0$$

lassen sich lösen, indem man $y^n = x$ setzt, wodurch

$$x^3 + ax + b = 0$$

entsteht; und ist hieraus x gefunden, so hat man $y = \sqrt[n]{x}$.

§. 328.

Für die Gleichungen des vierten Grades hat man keine allgemeine Auflösung entdeckt, deren man sich praktisch bedienen möchte; für Gleichungen noch höherer Grade aber überhaupt keine allgemeinen Auflösungen gefunden. Die reellen Wurzeln von Gleichungen des vierten, fünften u. s. w. Grades können indeß versuchsweise ermittelt werden, wenn die Coefficienten der Gleichungen numerisch gegeben sind. Die folgende Abtheilung giebt zu solcher versuchsweisen Bestimmung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen Anleitung.

In theoretischem Interesse mag beiläufig eine Lösung der Gleichung vierten Grades hier Platz finden.

§. 329.

Aufgabe. Die reducirte Gleichung des vierten Grades

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

aufzulösen.

Auflösung. Zur gegebenen Gleichung werde

$$2nx^2 + n^2 = 2nx^2 + n^2$$

addirt, unter n einen vorläufig willkürlichen, später zu bestimmenden Ausdruck verstanden. Es entsteht

$$(x^2 + n)^2 = (a + 2n)x^2 + bx + (c + n^2).$$

Der Kürze wegen setzen wir

$$a + 2n = q$$
$$c + n^2 = r.$$

Die erhaltene Gleichung erhält dadurch die Form

$$(x^2 + n)^2 = qx^2 + bx + r$$

und es folgt

$$q(x^2 + n)^2 = q^2x^2 + bqx + qr$$
$$= q^2x^2 + bqx + qr + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}$$

oder

$$\alpha) \quad q(x^2 + n)^2 = \left(qx + \frac{b}{2}\right)^2 + qr - \frac{b^2}{4}.$$

Als Bedingung für n setzen wir jetzt

$$qr - \frac{b^2}{4} = 0$$

d. h.

$$(a + 2n)(c + n^2) - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$ac + an^2 + 2cn + 2n^3 - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$\beta) \quad n^3 + \frac{a}{2}n^2 + cn + \frac{4ac - b^2}{8} = 0.$$

Diese Gleichung dritten Grades bestimmt n. Es geht dann die Gleichung α) über in

$$q(x^2 + n)^2 = \left(qx + \frac{b}{2}\right)^2$$

und hieraus ergiebt sich

$$x^2 + n = \pm\left[(a+2n)x + \frac{b}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{a+2n}}$$

$$x^2 \mp \sqrt{a+2n}\cdot x = \pm\frac{b}{2\sqrt{a+2n}} - n$$

$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a+2n} \pm \sqrt{\frac{a+2n}{4} \pm \frac{b}{2\sqrt{a+2n}} - n}$$

$$x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{a+2n} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a-2n+\frac{2b}{\sqrt{a+2n}}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{a+2n} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a-2n+\frac{2b}{\sqrt{a+2n}}}.$$

III. Von den numerischen Gleichungen.

§. 330.

Sind sämmtliche Coefficienten einer geordneten Gleichung ganze Zahlen, so sind die reellen Wurzeln der Gleichung ganze Zahlen oder irrationale.

Die Gleichung sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a = 0.$$

Wollte man annehmen, der Bruch $\frac{p}{q}$ sei Wurzel der Gleichung, so müßte

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

sein, oder mit q^{n-1} multiplicirt,

$$\frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \ldots + a_n q^{n-1} = 0.$$

Dies ist aber nicht möglich, da der erste Summand ein Bruch ist, während alle übrigen ganze Zahlen sind.

§. 331.

Wenn eine Gleichung $f = 0$ beliebig viele mehrfache Wurzeln hat, so läßt sich eine Gleichung herstellen, welche alle ver=

schiedenen Wurzeln jener Gleichung als bloß einfache Wurzeln enthält.

Es sei

$$f = (x - \alpha)^p (x - \beta)^q \ldots . V$$

während V das Produkt aller in f vorhandenen einfachen Faktoren vorstellt. Man bilde den größten gemeinschaftlichen Theiler t zu f und ∂f_x. Dieser hat nach §. 315 die Form

$$(x - \alpha)^{p-1} (x - \beta)^{q-1} \ldots .$$

Wenn man daher die Gleichung $f = 0$ durch t dividirt, so entsteht

$$(x - \alpha)(x - \beta) \ldots . V = 0$$

und diese Gleichung enthält alle verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f = 0$ als einfache Wurzeln.

§. 332.

Wenn zwei auf einander folgende Glieder einer algebraischen Summe einerlei Vorzeichen haben, sagt man, hier finde eine Zeichenfolge, wenn zwei auf einander folgende Glieder dagegen verschiedene Vorzeichen haben, sagt man, hier finde ein Zeichenwechsel Statt.

In der Summe z. B.

$$+ a + b - c + d - e - f - h - k$$

erscheinen vier Zeichenfolgen und drei Zeichenwechsel.

§. 333.

Die Gleichung $f = 0$ sei vom nten Grade und habe bloß einfache Wurzeln.

Die erste Ableitung ∂f_x sei hier bezeichnet durch f^1. Es werde f durch f^1 dividirt, der Rest entgegengesetzt genommen, und darauf bezeichnet durch f^2. Es werde weiter f^1 durch f^2 dividirt, der Rest entgegengesetzt genommen und darauf bezeichnet durch f^3. U. s. f. Die Funktionen $f^1, f^2, f^3 \ldots .$ sind beziehlich vom $(n-1)$sten, $(n-2)$ten, ... Grade; die Funktion f^n, also ist vom $(n-n)$ten Grade, d. h. constant, und mit ihr bricht die Division ab.

Es seien a und b zwei ungleiche, sonst beliebige reelle Werthe, und zwar $a < b$, und man bilde die Reihen

$$\text{a)}\ f_a,\ f^1_a,\ f^2_a,\ f^3_a\ \ldots.\ f^n_a$$

$$\text{b)}\ f_b,\ f^1_b,\ f^2_b,\ f^3_b\ \ldots.\ f^n_b.$$

Ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe a) eben so groß wie die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe b), so liegt keine reelle Wurzel der Gleichung $f = 0$ innerhalb der Gränzen a und b; ist aber die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe a) um q größer als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe b), so befinden sich q reelle Wurzeln der Gleichung $f = 0$ innerhalb der Gränzen a und b.

Der Beweis läßt sich folgendermaßen führen:

A) f und f^1, d. h. ∂f_x, haben keinen gemeinschaftlichen Theiler, weil vorausgesetzt worden, die Gleichung habe nur einfache Wurzeln. Daher giebt es keinen Werth von x, für welchen gleichzeitig f und f^1 in Null übergehen; und hieraus erhellet, daß wenn f gleich Null ist für einen Werth von x, es dabei niemals ein Maximum ist oder ein Minimum, sondern im Wachsthum steht oder im Abnehmen, d. h. vom Negativen ins Positive übergeht oder umgekehrt. Die Funktion f kann auch nicht für zwei unmittelbar auf einander folgende Werthe x_1 und $x_1 \pm dx$ zu Null werden, weil, insofern dx gegen x_1 verschwindet, die Gleichung wiederum zwei gleiche Wurzeln hätte.

B) Die Quotienten, welche sich bei den auf einander folgenden Divisionen ergeben, seien ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3, ... Dann ist

$$f = \phi^1 f^1 - f^2$$
$$f^1 = \phi^2 f^2 - f^3$$
$$f^2 = \phi^3 f^3 - f^4$$
u. s. f.

C) Zwei auf einander folgende Funktionen f^r und f^{r+1} gehen nicht für denselben Werth x_1 von x in Null über. Denn sonst hätten beide den Faktor $x - x_1$, und es wären f und f^1 theilbar durch $x - x_1$, welches aus B) [nach der Lehre von den Vielfachen und Theilern] folgt, aber gegen A) streitet.

D) Ist eine der Funktionen $f^1, f^2, \ldots,$ etwa f^r, Null für $x = \alpha$, so haben die benachbarten Funktionen f^{r-1} und f^{r+1} ungleiche Vorzeichen für den Werth α von x.

Denn es ist

$$f^{r-1} = \phi^r f^r - f^{r+1}$$

und ist f^r_α Null, so folgt

$$f^{r-1}_\alpha = - f^{r+1}_\alpha .$$

E) Ist $f^r_\alpha = 0$, so ist nicht $f^{r+1}_{\alpha \pm dx}$ gleich Null, noch $f^{r-1}_{\alpha \pm dx}$. Denn wäre z. B. $f^{r+1}_{\alpha + dx} = 0$, so hätte man $f^{r+1}_\alpha + df^{r+1}_\alpha = 0$, oder $f^{r+1}_\alpha = 0$, weil df^{r+1}_α verschwindet gegen f^{r+1}_α; es wäre also gleichzeitig $f^r_\alpha = 0$ und $f^{r+1}_\alpha = 0$, welches gegen C) streitet, und damit gegen A).

F) sei nun f^r_α gleich Null. Dann sind f^{r-1}_α und f^{r+1}_α nicht Null und haben entgegengesetzte Vorzeichen, und es ist keiner der Werthe $f^{r-1}_{\alpha \pm dx}$ und $f^{r+1}_{\alpha \pm dx}$ gleich Null. Wegen des letztern Umstandes müssen $f^{r-1}_{\alpha - dx}$ und $f^{r-1}_{\alpha + dx}$ einerlei Vorzeichen mit f^{r-1}_α haben, eben so $f^{r+1}_{\alpha - dx}$ und $f^{r+1}_{\alpha + dx}$ einerlei Vorzeichen mit f^{r+1}_α. Und wenn wir die Funktionen

$$f^{r-1}, \quad f^r, \quad f^{r+1}$$

in Bezug auf ihre Vorzeichen betrachten, während $\alpha - dx$, α, $\alpha + dx$ statt x gesetzt werden, so können nur folgende Fälle eintreten

für $\alpha - dx$	$+ + -$	oder	$+ + -$	oder	$- + +$	oder	$- + +$
für α	$+ \; 0 \; -$		$+ \; 0 \; -$		$- \; 0 \; +$		$- \; 0 \; +$
für $\alpha + dx$	$+ - -$		$+ + -$		$- - +$		$- + +$
oder	$+ - -$	oder	$+ - -$	oder	$- - +$	oder	$- - +$
	$+ \; 0 \; -$		$+ \; 0 \; -$		$- \; 0 \; +$		$- \; 0 \; +$
	$+ + -$		$+ - -$		$- + +$		$- - +$.

Bei den drei Gliedern f^{r-1}, f^r, f^{r+1}, ist also die Anzahl der Zeichenwechsel für $x = \alpha - dx$ eben so groß, wie für $x = \alpha + dx$, und es hat $f^{r-1}_{\alpha - dx}$ einerlei Vorzeichen mit $f^{r-1}_{\alpha + dx}$, eben so $f^{r+1}_{\alpha - dx}$ mit $f^{r+1}_{\alpha + dx}$, wie schon vorher bemerkt worden. Auch

für $x = \alpha$ haben die drei Glieder, wenn man Null überspringt, nicht weniger Zeichenwechsel. Hieraus ist einleuchtend, daß bei der Reihe

$$f, f^1, f^2, f^3, \ldots f^n$$

dadurch keine Verminderung in der Anzahl der Zeichenwechsel herbeigeführt wird, daß, während x sich stetig ändert, einzelne der Funktionen f^1, f^2, ... den Werth Null annehmen. Dieser Umstand ist aber der einzige, vermöge dessen einzelne der Funktionen ihr Zeichen vertauschen, und die Anzahl der Zeichenwechsel sich ändert.

G) Es sei f_α gleich Null. Dann haben wegen A) $f_{\alpha-dx}$ und $f_{\alpha+dx}$ entgegengesetzte Vorzeichen, und es ist die Ableitung ∂f_x positiv oder negativ. Mit Bezug auf E) sind daher für

f und f^1

folgende Fälle möglich:

für $x = \alpha - dx$	$-\,+$ oder	$+\,-$
$x = \alpha$	$0\,+$	$0\,-$
$x = \alpha + dx$	$+\,+$	$-\,-$.

Bei den Gliedern f und f^1 geht demnach ein Zeichenwechsel verloren, so oft während einer stetigen Aenderung des x die Funktion f den Werth Null erhält.

Aus F) und G) erhellet der Satz.

Wenn in der Reihe

$$f, f^1, f^2, f^3, \ldots f^n$$

für einen Werth c von x ein Glied f^r Null wird, so fällt in der Reihe der Vorzeichen das entsprechende Glied aus. Da aber die benachbarten Glieder f^{r-1} und f^{r+1} entgegengesetzte Vorzeichen führen, so bleibt, wenn man Null überspringt, die Anzahl der Zeichenwechsel ungeändert.

Die Funktionen f^1, f^2 .... dürfen, wie sie nach einander hervorgehen, mit beliebigen positiven und constanten Werthen multiplicirt werden, weil dies auf die Reihe der Vorzeichen keinen Einfluß übt. Dadurch verschafft man sich oft Erleichterung.

§. 334.

Aufgabe. Es ist eine numerische Gleichung des $n$ten Grades $f = 0$ mit bloß einfachen Wurzeln gegeben; man soll bestimmen, wie viel positive, wie viel negative, wie viel imaginaire Wurzeln die Gleichung hat.

Auflösung. Man bilde nach dem vorigen Paragraph die Reihe

$$f, f^1, f^2, \ldots. f^n.$$

Man setze $-\infty$ statt x; die Anzahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe jetzt zeigt, sei p. Man setze ferner 0 statt x, und $+\infty$; die Anzahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe dabei zeigt, sei beziehlich q und r. Die Differenz $p - q$ ist dann die Anzahl der negativen Wurzeln der Gleichung, die Differenz $q - r$ die der positiven. Die Differenz $p - r$ giebt die Anzahl der reellen Wurzeln, folglich ist $n - (p - r)$ die Anzahl der imaginairen Wurzeln der Gleichung. Welches alles aus dem vorigen Paragraphen und aus dem Umstande folgt, daß n die Anzahl aller Wurzeln einer Gleichung des $n$ten Grades ist.

§. 335.

Und ist eine Gleichung $f = 0$ vorgelegt, welche nicht bloß einfache Wurzeln hat, so kann man auch bestimmen, wie viele verschiedene reelle Wurzeln derselben zugehören, und wie viele davon positiv sind, wie viele negativ. — Denn wenn man den größten gemeinschaftlichen Theiler t zu f und ∂f_x aufsucht, und die Gleichung

$$\frac{f}{t} = 0$$

bildet, so kommt man wegen §. 331 auf den vorigen Paragraphen zurück.

§. 336.

Es sei gegeben die Gleichung $f = 0$. Es seien a und b zwei ungleiche reelle Werthe, $a < b$, zwischen welchen eine, und nur eine, reelle, unbekannte Wurzel der Gleichung liegt. Es sei,

während x alle Werthe von a bis b durchläuft, $\partial^2 f_x$ stets positiv oder stets negativ, also ∂f_x stets im Wachsthum oder stets im Abnehmen, und dabei behalte ∂f_x einerlei Vorzeichen, gehe also nicht durch 0. Dann sind, wenn f_a und $\partial^2 f_a$ einerlei Vorzeichen haben, oder wenn ∂f_a in absoluter Hinsicht größer ist als ∂f_b (beides bedingt dasselbe, wie sich zeigen wird),

$$a - \frac{f_a}{\partial f_a} \text{ und } b - \frac{f_b}{\partial f_a},$$

wenn aber f_b und $\partial^2 f_b$ einerlei Vorzeichen führen, oder wenn ∂f_b in absoluter Hinsicht größer ist als ∂f_a,

$$a - \frac{f_a}{\partial f_b} \text{ und } b - \frac{f_b}{\partial f_b}$$

zwei engere Gränzen als a und b, zwischen welchen jene unbekannte Wurzel der Gleichung sich befindet.

I. Die zwischen a und b befindliche Wurzel der Gleichung bezeichne x'. Wir setzen

$$x' = a + z = b - z'$$

und es ist

$$f_{a+z} = f_{b-z'} = f_{x'} = 0.$$

II. Nach den Voraussetzungen unterscheiden wir zwei Hauptfälle. Entweder ist

$$f_a = - \text{ und } f_b = +$$

dabei alsdann für alle Werthe von x von a bis b

$$\partial f = +$$

und
$$\partial^2 f = + \text{ oder } \partial^2 f = -$$

oder es ist

$$f_a = + \text{ und } f_b = -$$

und dabei für jedes x innerhalb der Gränzen a und b

$$\partial f = -$$

und
$$\partial^2 f = + \text{ oder } \partial^2 f = -.$$

Jeder dieser beiden Fälle umschließt daher zwei Unterfälle, je nachdem die zweite Ableitung innerhalb der Gränzen a und b stets positiv ist, oder stets negativ.

III. Nach §. 294 ist

$$f_{a+z} - f_a = \partial f_a dx + \partial f_{a+dx} dx + \ldots + \partial f_{a+z} dx$$
$$f_b - f_{b-z'} = \partial f_{b-z'} dx + \partial f_{b-z'+dx} dx + \ldots + \partial f_b dx$$

oder wegen I.

$$\alpha) \quad -f_a = \partial f_a dx + \ldots + \partial f_{a+z} dx$$

$$\beta) \quad f_b = \partial f_{b-z'} dx + \ldots + \partial f_b dx.$$

Die Anzahl der Summanden zur Rechten ist unendlich, und zwar ist sie in α) gleich $\frac{z}{dx}$, in β) gleich $\frac{z'}{dx}$.

IV. Nun sei

$$1) \quad f_a = -,\ f_b = +$$
$$\partial f = +$$
$$\partial^2 f = +.$$

Alsdann sind die sämmtlichen Glieder zur Rechten in α) und β) positiv, und sie schreiten in α) sowohl als in β) steigend fort. Das größte von allen ist $\partial f_b dx$.

Statt jedes Gliedes zur Rechten in α) und β) denke man das größte $\partial f_b dx$ gesetzt, und es folgt, weil in α) die Anzahl der Glieder gleich $\frac{z}{dx}$ ist, und in β) gleich $\frac{z'}{dx}$

$$-f_a < z\partial f_b$$
$$f_b < z'\partial f_b$$

oder

$$z > -\frac{f_a}{\partial f_b}$$
$$z' > \frac{f_b}{\partial f_b}.$$

Es sei

$$2) \quad f_a = -,\ f_b = +$$
$$\partial f = +$$
$$\partial^2 f = -$$

In α) und β) sind dann wiederum sämmtliche Glieder zur Rechten positiv, aber sie fallen, und es ist $\partial f_a dx$ das größte. Dies größte Glied werde in α) und in β) statt jedes einzelnen gesetzt, und es folgt:

$$-f_a < z\partial f_a$$
$$f_b < z'\partial f_a$$

oder

$$z > -\frac{f_a}{\partial f_a}$$
$$z' > \frac{f_b}{\partial f_a}.$$

Es sei

$$3)\quad f_a = +,\ f_b = -$$
$$\partial f = -$$
$$\partial^2 f = +.$$

Die Glieder zur Rechten in α) und β) sind sämmtlich negativ und steigend, in absoluter Hinsicht also fallend, und es ist $\partial f_a dx$ absolut das größte Glied. Dies werde statt jedes anderen gesetzt, und es folgt

$$-f_a > z\partial f_a$$
$$f_b > z'\partial f_a$$

also mit dem negativen Werth ∂f_a dividirend

$$z > -\frac{f_a}{\partial f_a}$$

$$z' > \frac{f_b}{\partial f_a}.$$

Endlich sei

$$4)\quad f_a = +,\ f_b = -$$
$$\partial f = -$$
$$\partial^2 f = -.$$

Die Glieder in α) und β sind negativ und fallend, also $\partial f_b dx$ absolut das größte, und es folgt, dies statt jedes anderen setzend

$$z > -\frac{f_a}{\partial f_b}$$

$$z' > \frac{f_b}{\partial f_b}.$$

V. Die Quotienten $\frac{f_a}{\partial f_a}$ und $\frac{f_a}{\partial f_b}$ sind negativ, weil f_a und ∂f entgegengesetzte Vorzeichen führen; die Quotienten $\frac{f_b}{\partial f_a}$ und $\frac{f_b}{\partial f_b}$ dagegen positiv, weil die Zeichen von f_b und ∂f übereinstimmen. Daher ist in den Fällen IV. 2) und 3)

$$a + z > a - \frac{f_a}{\partial f_a} > a$$

$$b - z' < b - \frac{f_b}{\partial f_a} < b$$

und in den Fällen 1) und 4)

$$a + z > a - \frac{f_a}{\partial f_b} > a$$

$$b - z' < b - \frac{f_b}{\partial f_b} < b.$$

Es ist $a + z = b - z' = x'$, und man hat steigend in den Fällen 2) und 3):

$$a,\quad a - \frac{f_a}{\partial f_a},\quad x',\quad b - \frac{f_b}{\partial f_a},\quad b$$

in den Fällen 1) und 4):

$$a,\quad a - \frac{f_a}{\partial f_b},\quad x',\quad b - \frac{f_b}{\partial f_b},\quad b.$$

In den Fällen 2) und 3) sind demnach

$$a - \frac{f_a}{\partial f_a} \text{ und } b - \frac{f_b}{\partial f_a}$$

in den Fällen 1) und 4) aber

$$a - \frac{f_a}{\partial f_b} \text{ und } b - \frac{f_b}{\partial f_b}$$

engere Gränzen für x' als a und b.

In den Fällen 2) und 3) ist absolut

$$\partial f_a > \partial f_b$$

und es haben f_a und $\partial^2 f_a$ einerlei Vorzeichen; in den Fällen 1) und 4) ist

$$\partial f_b > \partial f_a$$

und es führen f_b und $\partial^2 f_b$ einerlei Vorzeichen.

Darin liegt das Gesetz.

§. 337.

Nach dem vorigen Paragraph lassen sich aus den Gränzen a und b der unbekannten Wurzel engere Gränzen a' und b' herstellen, aus diesen nach dem nämlichen Gesetz wiederum engere a'' und b'', aus diesen noch engere Gränzen a''' und b''' u. s. f. Man kann sich in solcher Weise der unbekannten Wurzel beliebig nähern, und so weit zwei Gränzen, etwa a''' und b''', in ihren Decimalstellen übereinstimmen, so weit geben sie die Wurzel selbst genau. Die Berechnung würde sich vereinfachen, wenn

man nur die einen Gränzen z. B. a', a'', a''' .... zu bestimmen nöthig hätte, und man würde mit diesen einen Gränzen ausreichen, sobald die Genauigkeit sich beurtheilen ließe, welche sie einzeln gewähren. Zur Bestimmung dieser Genauigkeit führt folgende Erörterung.

Es sei

$$b - a = q$$

und es sei

$$b' - a' = q'.$$

Die Wurzel befindet sich zwischen a' und b'; die Differenz δ' zwischen der Wurzel, und a' oder b' ist daher kleiner als q'.

Es ist entweder

$$b' = b - \frac{f_b}{\partial f_a} \text{ oder } b' = b - \frac{f_b}{\partial f_b}$$

und $$a' = a - \frac{f_a}{\partial f_a} \text{ und } a' = a - \frac{f_a}{\partial f_b}$$

folglich

$$b' - a' = b - a - \frac{f_b - f_a}{\partial f_a} \text{ oder } b' - a' = b - a - \frac{f_b - f_a}{\partial f_b}$$

d. h. $$1)\quad q' = q - \frac{f_b - f_a}{\partial f_a}$$

oder $$2)\quad q' = q - \frac{f_b - f_a}{\partial f_b}.$$

Nun ist

$$f_b = f_{a+q} = f_a + \partial f_a q + \partial^2 f_a \frac{q^2}{2!} + \dots$$

$$f_a = f_{b-q} = f_b - \partial f_b q + \partial^2 f_a \frac{q^2}{2!} - \dots$$

oder, wenn wir α und β als diejenigen, innerhalb der Gränzen a und b liegende Werthe betrachten, für welche die dritten Glieder die ergänzenden sind

$$3)\quad f_b = f_a + \partial f_a q + \partial^2 f_\alpha \frac{q^2}{2!}$$

$$4)\quad f_a = f_b - \partial f_b q + \partial^2 f_\beta \frac{q^2}{2!}.$$

Die Werthe aus 3) und 4) substituiren wir beziehlich in 1) und 2), und erhalten

$$5)\quad q' = -\frac{\partial^2 f_\alpha}{2\partial f_a} q^2$$

$$6)\quad q' = +\frac{\partial^2 f_\beta}{2\partial f_b} q^2.$$

Der erste Ausdruck gilt, wenn man sich der Gränze a, der andere, wenn man sich der Gränze b zu bedienen hat. Beide Ausdrücke sind positiv, der erste, weil, im Fall a gebraucht wird, die erste und die zweite Ableitung entgegengesetzte Vorzeichen führen, der andere, weil die Ableitungen gleiche Vorzeichen haben, wenn man b gebraucht. Wir dürfen daher nur die absoluten Werthe in Betracht ziehen.

Die Werthe α, β sind unbekannt. Es sei $\partial^3 f_x$, während x von a bis b wächst stets positiv oder stets negativ. Unter dieser Voraussetzung befindet sich $\partial^2 f_x$, während x von a bis b zunimmt, stets im Wachsthum oder stets im Abnehmen; und es muß entweder $\partial^2 f_a$ oder $\partial^2 f_b$ der größte Werth in absoluter Hinsicht sein, welchen $\partial^2 f_x$ annimmt unter dem gedachten Gange von x. Dieser größte Werth sei A, dann hat man, weil δ' kleiner als q' ist

$$\delta' < \frac{A}{2\partial f_a} q^2 \quad \text{oder} \quad \delta' < \frac{A}{2\partial f_b} q^2$$

und hierdurch ist die Genauigkeit der Annäherung bestimmt, da δ' die Differenz zwischen der neuen Gränze a' oder b' und der Wurzel ausdrückt. Ist $\frac{A}{2\partial f_a}$ oder $\frac{A}{2\partial f_b}$ ein echter Bruch, q ein Decimalbruch, so erhellet, daß dann jede neue Anwendung des Verfahrens im vorigen Paragraphen doppelt so viele genaue Decimalstellen liefern muß, als man bereits von der Wurzel kennt.

§. 338.

Aufgabe. Es ist eine Gleichung f = 0 mit reellen numerischen Coefficienten gegeben, zu deren Auflösung kein direkter Weg bekannt ist oder betreten werden mag, man soll die reellen Wurzeln versuchsweise bestimmen.

Auflösung. A) Man kann erstens rein versuchsweise zu Werke gehen. Zu dem Ende setze man irgend zwei ganze Zahlen q und q′ statt x und berechne die Werthe, welche f_x dadurch annimmt. Es sei $f_q = Q$, $f_{q'} = Q'$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, entweder haben Q und Q′ verschiedene Vorzeichen oder gleiche. — Haben Q und Q′ verschiedene Vorzeichen, so befindet sich zwischen q und q′ wenigstens eine Wurzel der Gleichung. Man wähle eine Zahl q″, zwischen q und q′ liegend, und berechne $f_{q''} = Q''$. Der Werth Q″ liegt zwischen Q und Q′ und es haben entweder Q und Q″ gleiche, und Q′ und Q″ verschiedene Vorzeichen, oder umgekehrt. Führen Q und Q″ verschiedene Vorzeichen, so befindet sich die Wurzel zwischen q und q″, haben Q″ und Q′ verschiedene Vorzeichen, so liegt die Wurzel zwischen q″ und q′. Man hat also immer entweder in q und q″ oder in q″ und q′ zwei engere Gränzen, als die vorigen q und q′, zwischen welchen eine Wurzel sich befindet, und kann durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens die Gränzen enger und enger ziehen, bis man die Wurzel zunächst in den Ganzen, dann weiter mit beliebig vielen Decimalstellen genau erhalten hat. — Führen Q und Q′ einerlei Vorzeichen, so liegt entweder keine Wurzel der Gleichung zwischen q und q′ oder es liegen mehrere dazwischen. Um zu prüfen, ob Wurzeln zwischen q und q′ sich befinden, setze man Werthe, welche zwischen q und q′ liegen, statt x in f; nimmt f für einen solchen Werth m ein Vorzeichen an, das nicht mit denen von Q und Q′ übereinstimmt, so giebt es Wurzeln zwischen q und q′ und zwar zunächst wenigstens eine zwischen q und m, und wenigstens eine zwischen m und q′, und man ist auf den ersten Fall zurückgekommen; behält f für alle Werthe von x zwischen q und q′ einerlei Vorzeichen, so liegt zwischen q und q′ keine Wurzel. Eine Wurzel der Gleichung kann dann nur größer als die größere oder kleiner als die kleinere der Zahlen q und q′ sein, je nachdem der Werth welchen f durch die größere oder durch die kleinere erhält, näher an Null sich befindet. Man setze daher statt x eine Zahl q″ in f, welche größer als die größere der Zahlen q und q′ ist, oder kleiner als die kleinere, je nachdem die Wurzel selbst größer als

die größere, oder kleiner als die kleinere ist, fahre fort, bis man zwei Zahlen gefunden hat, zwischen denen die Wurzel liegen muß, und schlage alsdann den oben angegebenen Weg ein, um x näher zu bestimmen.

Es sei z. B. gegeben die Gleichung

$$x^4 - 12x - 3 = 0.$$

Wir setzen statt x zuerst 5, dann 3, und erhalten $f5 = +562$, $f3 = +42$. Daher ist die Wurzel kleiner als 3. Setzen wir 2 statt x, so entsteht

$$f2 = -11.$$

Die Wurzel befindet sich also zwischen 2 und 3. Es ist

$$f2{,}3 = -2{,}6$$
$$f2{,}4 = +1{,}3$$
$$f2{,}35 = -0{,}7\ldots.$$
$$f2{,}38 = +0{,}5\ldots.$$

Mit einer Genauigkeit von einer Decimalstelle ist also die Wurzel 2,3 .... Nun findet sich weiter

$$f2{,}36 = -0{,}09\ldots.$$
$$f2{,}369 = +0{,}06\ldots.$$

Daher ist die Wurzel auf zwei Decimalstellen genau 2,36 .... u. s. f.

Es ereignet sich zuweilen, daß, wenn man statt x eine Reihe von Werthen setzt, sich die Funktion f zuerst dem Werth Null nähert und sich dann, ohne ihr Zeichen zu ändern, wieder von Null entfernt. Man befindet sich dann jedesmal in der Gegend eines Maximums oder Minimums der Funktion.

B) Das eben angedeutete Verfahren kann geregelt werden und vereinfacht durch die Anwendung der vorher aufgestellten Gesetze, und mit Rücksicht auf diese lassen wir eine zweite Auflösung unserer Aufgabe folgen:

Die Gleichung $f = 0$ habe bloß einfache Wurzeln. — Man bestimme nach §. 334 wie viele positive, wie viele negative Wurzeln die Gleichung hat, und ermittele, §. 333 anwendend, für jede einzelne Wurzel zwei Gränzen, zwischen welchen sie sich befindet, so daß also auch zwischen je zwei solcher Gränzen immer nur eine Wurzel liegt. Hierauf ziehe man, wie unter A), die

Gränzen enger, bis man die Wurzeln mit einer Genauigkeit von einer Decimalstelle etwa erhalten hat. Die weiter gewünschten oder nothwendigen Decimalstellen ermittele man aber durch Hilfe von §. 336. — Wir wollen z. B. die Gleichung

$$x^3 - 9x + 6 = 0$$

in solcher Weise lösen. Es ist hier

$$f = x^3 - 9x + 6$$
$$\partial f_x = 3x^2 - 9$$
$$\partial^2 f_x = 6x.$$

Wir dividiren ∂f_x durch $+3$, und setzen $x^2 - 3 = f^1$. Die Division von f durch f^1 liefert $-6x + 6$ als Rest; dieses, entgegengesetzt genommen und durch $+6$ dividirt, giebt $x - 1$ als f^2. Die Division von f^1 durch f^2 giebt -2 zum Rest, also ist $f^3 = +2$. Wir haben demnach

$$f = x^3 - 9x + 6$$
$$f^1 = x^2 - 3$$
$$f^2 = x - 1$$
$$f^3 = +2.$$

Wir setzen hierin statt x die Werthe $-\infty$, 0, $+\infty$ und die Funktionen

$$f,\ f^1,\ f^2,\ f^3$$

erhalten beziehlich folgende Vorzeichen

$-\infty$	$- + - +$	drei Zeichenwechsel
0	$+ - - +$	zwei Zeichenwechsel
$+\infty$	$+ + + +$	kein Zeichenwechsel.

Die Gleichung hat demnach eine negative und zwei positive Wurzeln. Für $x = 10$ entsteht

$$+ + + +$$

Beide positiven Wurzeln befinden sich daher zwischen 0 und 10. Für $x = 1$ entsteht

$$- - +$$

Daher liegt eine positive Wurzel zwischen 0 und 1, die andere zwischen 1 und 10, und zwar, was sich leicht findet, zwischen 2 und 3. Die negative Wurzel liegt zwischen den Gränzen -4 und -3. — Wir wollen die zwischen 0 und 1 befindliche Wurzel genauer bestimmen. Einige nach A) angestellte Versuche

zeigen, daß diese Wurzel $a = 0{,}7$ und $b = 0{,}71$ zu Gränzen hat. Lassen wir jetzt das Verfahren des §. 336 eintreten, so findet sich

$$\frac{f_a}{\partial f_a} = \frac{0{,}043}{-7{,}53} = -0{,}0057$$

$$\frac{f_b}{\partial f_a} = \frac{-0{,}032}{-7{,}53} = +0{,}00424966\ldots.$$

folglich

$$a - \frac{f_a}{\partial f_a} = 0{,}7 + 0{,}0057 = 0{,}7057 = a'$$

$$b - \frac{f_b}{\partial f_a} = 0{,}71 - 0{,}00424966 = 0{,}70575033\ldots. = b'.$$

Die Wurzel ist also mit einer Genauigkeit von vier Decimalstellen gleich 0,7057....

Wenden wir auf a' und b' dasselbe Verfahren an, so entstehen

$$\frac{f_{a'}}{\partial f_{a'}} = \frac{+0{,}00014741}{-7{,}50596253} = -0{,}00001963\ldots.$$

$$\frac{f_{b'}}{\partial f_{a'}} = \frac{-0{,}00023036}{-7{,}50596253} = +0{,}00003069\ldots.$$

und als neue Gränzen

$$a' - \frac{f_{a'}}{\partial f_{a'}} = 0{,}70571963\ldots.$$

$$b' - \frac{f_{b'}}{\partial f_{a'}} = 0{,}70571964\ldots.$$

und es ist jetzt eine Genauigkeit von acht Decimalstellen erlangt.

Vermittelst §. 337 läßt sich eine leicht ersichtliche weitere Regelung und wesentliche Abkürzung herbeiführen.

§. 339.

Wir wollen eine zweite Methode der Annäherung, die sogenannte Regula falsi, mittheilen.

Die Gleichung sei

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots. + v = 0$$

und q und q' seien zwei versuchsweise gefundene Gränzen für eine Wurzel x_I der Gleichung, und es sei

$$q^n + aq^{n-1} + bq^{n-2} + \dots + v = Q$$
$$q'^n + aq'^{n-1} + bq'^{n-2} + \dots + v = Q'.$$

Von jeder dieser Gleichungen subtrahiren wir die Gleichung

$$x_I^n + ax_I^{n-1} + bx_I^{n-2} + \dots + v = 0$$

das liefert

$$1)\ (q^n - x_I^n) + a(q^{n-1} - x_I^{n-1}) + b(q^{n-2} - x_I^{n-2}) + \dots = Q$$
$$2)\ (q'^n - x_I^n) + a(q'^{n-1} - x_I^{n-1}) + b(q'^{n-2} - x_I^{n-2}) + \dots = Q'.$$

Nun sei

$$q = x_I + \delta, \quad q' = x_I + \delta'.$$

Diese Werthe substituiren wir in 1) und 2). Die Differenzen δ und δ' zwischen x_I und q und q' seien so klein (d. h. q und q' so nahe gelegen), daß wir, den binomischen Satz anwendend, die Glieder mit den zweiten und höheren Potenzen von δ und δ' vernachlässigen können; dann folgt aus 1) und 2)

$$nx_I^{n-1}\delta + a(n-1)x_I^{n-2}\delta + b(n-2)x_I^{n-3}\delta + \dots = Q$$
$$nx_I^{n-1}\delta' + a(n-1)x_I^{n-2}\delta' + b(n-2)x_I^{n-3}\delta' + \dots = Q'$$

deshalb näherungsweise

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{Q}{Q'}$$

oder

$$\frac{q - x_I}{q' - x_I} = \frac{Q}{Q'}$$

und hieraus ergiebt sich näherungsweise

$$x_I = \frac{q'Q - qQ'}{Q - Q'}.$$

Wählen wir z. B. die Gleichung des vorigen Paragraph

$$x^3 - 9x + 6 = 0$$

so sei

$$q = 0{,}7 \qquad q' = 0{,}71$$

also

$$Q = 0{,}043 \quad Q' = -0{,}032$$

und es ist

$$q'Q = 0{,}03053 \quad qQ' = -0{,}0224$$
$$\frac{q'Q - qQ'}{Q - Q'} = \frac{0{,}05293}{0{,}07500} = 0{,}70573$$

so daß sich vier richtige Decimalstellen ergeben. Setzt man $q'' = 0{,}7057$, berechnet $fq'' = Q''$, so bestimmt das Vorzeichen von Q'', ob die Wurzel zwischen q und q'' oder zwischen q' und q'' befindlich ist, und man kann dann dasselbe Verfahren von neuem anwenden. Bei diesem Verfahren bleibt es rathsam stets die erlangte Genauigkeit zu prüfen.

§. 340.

Eine dritte Methode, eine Wurzel x annähernd zu finden aus der Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + q = 0$$

oder

$$f_x = 0$$

ist folgende.

Man bestimme in der Weise des §. 338 eine ganze Zahl x_I, so, daß x gleich ist dieser ganzen Zahl x_I, vermehrt um einen echten Bruch $\frac{1}{z}$. In der gegebenen Gleichung substituire man $x_I + \frac{1}{z}$ statt x und ordne nach den Potenzen von z. Diese Operation kann durch den Taylorschen Satz erleichtert werden; es ist nämlich

$$f\left(x_I + \frac{1}{z}\right) = f_{x_I} + \partial f_{x_I}\frac{1}{z} + \frac{\partial^2 f_x}{2!}\frac{1}{z^2} + \dots$$

und es entsteht, wenn man mit z^n multiplicirt, die Gleichung

$$f_{x_I} z^n + \partial f_{x_I} z^{n-1} + \dots = 0.$$

Aus der erhaltenen Gleichung bestimme man nach §. 338 eine ganze Zahl x_{II}, so daß $z = x_{II} + \frac{1}{z_1}$. U. s. f., u. s. f. Dadurch ergiebt sich

$$x = x_I + \cfrac{1}{x_{II} + \cfrac{1}{x_{III} + \dots}}$$

so daß die Wurzel in der Gestalt eines Kettenbruchs hervorgeht.

Uebungen und Praktisches.

§. 341.

1) Was versteht man unter einer Gleichung des $n$ten Grades, wann heißt eine Gleichung geordnet, rein, unrein, vollständig, unvollständig, reducirt? Wie geschieht das Ordnen einer Gleichung? Was versteht man unter den Wurzeln einer Gleichung, und wie viele Wurzeln hat eine Gleichung $n$ten Grades? Wenn $f = 0$ ist, und es wird $f = (x - x_1)(x - x_2) \ldots$ gedacht, welche Beziehung findet zwischen den Wurzeln der Gleichung und den Werthen $x_1, x_2, \ldots$ Statt, welche Beziehung zwischen den Wurzeln der Gleichung und ihren Coefficienten, namentlich dem von x^0? Was versteht man unter einfachen, mehrfachen Wurzeln einer Gleichung? Wie wird erkannt, ob eine Gleichung bloß einfache Wurzeln habe; wie wird eine Gleichung mit mehrfachen Wurzeln auf eine mit bloß einfachen zurückgeführt? Wie wird eine Gleichung reducirt? Wie kann man die Nenner einer geordneten Gleichung fortschaffen und dabei eine geordnete Gleichung behalten? Wie viele Werthe hat $\sqrt[n]{\pm a}$, und wie werden sie erhalten? Welches sind die Werthe von $\sqrt[n]{p \pm qi}$? Wie wird eine Gleichung des dritten Grades gelöst? Wie läßt sich beurtheilen, wie viele reelle Wurzeln eine numerische Gleichung des $n$ten Grades hat, wie viele derselben positiv, wie viele negativ sind, wie viele zwischen beliebigen Gränzen a und b liegen? Welche Methoden haben wir angegeben zur versuchsweisen Bestimmung höherer numerischer Gleichungen?

---

2) Sind Wurzeln einer Gleichung ganze Zahlen, so sind diese Faktoren des von x unabhängigen Gliedes. Bildet man daher alle ganzen Faktoren des von x unabhängigen Gliedes und nimmt sie positiv und negativ, so werden dar-

unter sich die Wurzeln der Gleichung finden, welche ganze Zahlen sind.

3) $x^4 + 2x^3 - 31x^2 - 32x + 60 = 0$

$x = 1,\ x = -2,\ x = 5,\ x = -6.$

4) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$

$x = -1,\ x = -2,\ x = -3,\ x = -4.$

---

5) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

$$x = 2,\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Nachdem 2 als Wurzel der Gleichung gefunden, wird sie durch $x - 2$ dividirt und giebt dadurch die Gleichung zweiten Grades

$$x^2 + x + 1 = 0$$

welche die beiden übrigen Wurzeln liefert.

6) $x - 2 = \left(\frac{3}{x}\right)^2$

$$x = 3,\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}.$$

7) $\left(\sqrt{x} + \frac{5}{x}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{5}{x}\right) = 4$

$$x = 5,\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}.$$

8) $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

$x = 1,\ x = \pm\sqrt{-2}.$

9) $x^3 + 12x + 63 = 0$

$$x = -3,\ x = \frac{3 \pm 5\sqrt{-3}}{2}.$$

10) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3 + \frac{7}{x}$

$x = 4{,}30213 \ldots.$

11) $x^3 - 2x - 5 = 0$

$x = 2{,}09455 \ldots.$

12) $x^3 - 12x^2 + 45x - 53 = 0$
$x = 5{,}87938\ldots,\ x = 2{,}4678\ldots,\ x = 3{,}6522\ldots$

13) $x^3 - 15x^2 + 57x - 94 = 0$
$x = 10{,}38171\ldots$

14) $x^3 - 200x + 8 = 0$
$x = 0{,}04000\ldots,\ x = 14{,}12209\ldots,\ x = -14{,}16209\ldots$

15) $x^3 - 2100x + 24000 = 0$
$x = 12{,}31875\ldots,\ x = 38{,}40726\ldots,\ x = -50{,}72602\ldots$

16) $x^3 - 7x + 7 = 0$
$x = 1{,}35689\ldots,\ x = 1{,}69202\ldots,\ x = -3{,}04891\ldots$

---

17) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 8 = 0$
Die Gleichung hat keine reelle Wurzel.

18) $x^4 - 4x^3 - 56x^2 - 8x + 4 = 0$
$x = 9{,}795831\ldots,\ x = 0{,}204168\ldots,$
$x = -0{,}354248\ldots,\ x = -5{,}645751\ldots$

19) $x^4 - 15x^3 + 27x^2 + 26x + 42 = 0$
$x = 3{,}309584\ldots,\ x = 12{,}690415\ldots$ Die beiden übrigen Wurzeln sind imaginair.

20) $x^4 + x^3 - \frac{4}{9}x^2 - x - \frac{35}{9} = 0$
$x = 1{,}369924\ldots,\ x = -1{,}703257\ldots$ Die beiden anderen Wurzeln sind imaginair.

21) $x^6 + 4x^5 - 16x^4 - 40x^3 + 85x^2 + 100x - 150 = 0$
$x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{5},\ x = -2 \pm\sqrt{10}.$

Man bestimme den größten Theiler t zu f_x und ∂f_x, setze $t = 0$, entwickele aus dieser Gleichung die Wurzeln, und man hat die mehrfachen Wurzeln der vorgelegten Gleichung, welche dann durch Division auf eine quadratische zurückkommt.

---

22) Zwei leuchtende Punkte A und B befinden sich in der Entfernung 1 von einander. Die Itensitäten, mit welchen A und B leuchten, verhalten sich wie 1 : n. In welcher Entfernung x von A befindet sich auf der geraden

Linie AB derjenige Punkt, welcher die geringste Beleuchtung empfängt?

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{n}}.$$

Die Intensität der Beleuchtung, welche A in der Entfernung 1 gewährt, sei 1, die in der Entfernung x sei y. Dann verhält sich

$$1:y = x^2:1.$$

Die Intensität der Beleuchtung, welche B in der Entfernung 1 gewährt, ist n, die in der Entfernung 1 — x sei y^1, und es verhält sich

$$n:y^1 = (1-x)^2:1.$$

Ein in der Entfernung x von A auf AB befindlicher Punkt erhält daher überhaupt eine Beleuchtung von der Intensität

$$\frac{1}{x^2} + \frac{n}{(1-x)^2}$$

und den geforderten Punkt bestimmt dasjenige x, für welches diese Funktion ein Minimum ist. Es ist

$$\partial f_x = -\frac{2}{x^3} + \frac{2n}{(1-x)^3}$$

$$\partial^2 f_x = \frac{6}{x^4} + \frac{6n}{(1-x)^4}$$

$\partial f_x = 0$ giebt

$$nx^3 - (1-x)^3 = 0$$

oder $\sqrt[3]{n} = p$ gesetzt (I. Theil, §. 120 II.)

$$[px - (1-x)][p^2x^2 + px(1-x) + (1-x)^2] = 0.$$

Setzen wir

$$px - (1-x) = 0$$

so folgt

$$x = \frac{1}{1+p} = \frac{1}{1+\sqrt[3]{n}}$$

und da die zweite Ableitung für diesen Werth positiv ausfällt, so ist die Aufgabe gelöst.

---

23) Setzt man $\frac{1}{2}\pi$ statt x in dem Ausdruck für Sin x §. 322, so entsteht

$$1 = \tfrac{1}{2}\pi(1-\tfrac{1}{4})(1-\tfrac{1}{16})(1-\tfrac{1}{36})(1-\tfrac{1}{64})$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi\,\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{15}{16}\cdot\tfrac{35}{36}\cdot\tfrac{63}{64}\ldots.$$

und hieraus folgt

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\ldots.}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\ldots.}$$

Die Ausdrücke §. 322 für Sin x und Cos x eignen sich, die Logarithmen dieser Funktionen zu berechnen.

Vierzehntes Kapitel.

Vom Integriren.

§. 342.

Eine gegebene Funktion f_x **integriren** heißt, die Funktion ϕ_x bestimmen, deren erste Ableitung jene Funktion f_x ist. Die Funktion ϕ_x, deren erste Ableitung f_x ist, bezeichnet man durch

$$\int f_x$$

und nennt sie das **Integral** der Funktion f_x.

Ein gegebenes Differential $f_x dx$ einer Funktion integriren heißt, die Funktion ϕ_x bestimmen deren Differential jenes gegebene $f_x dx$ ist; und die Funktion ϕ_x, deren Differential $f_x dx$ ist, bezeichnet man durch

$$\int f_x dx$$

und nennt sie das **Integral** des Differentials $f_x dx$.

Das Integral des Differentials $f_x dx$ wird in der Funktion dargeboten, deren Ableitung f_x ist. Demnach ist

$$\int f_x dx = \int f_x.$$

Die zweite der oberen Erklärungen führt auf die erste zurück. In den Fällen der Anwendung treten fast stets Differentialien auf; und wir werden auch hier uns gewöhnlich des Zeichens $\int f_x dx$ bedienen.

§. 343.

Jede besondere Funktion beliebig vieler Veränderlichen erhält erst dadurch einen bestimmten Werth, daß statt ihrer Veränderlichen bestimmte Werthe eintreten.

Jede Funktion ist hier aufzufassen als eine Form, vermittelst deren eine Klasse von Werthen geboten wird dadurch, daß statt ihrer Veränderlichen die zulässigen bestimmten Werthe eintreten. Das Integriren ist hiernach zunächst zu betrachten, als eine Bestimmung von Formen.

Irrationale Werthe auszudrücken dienen die Formen a^x, $\ln x$, die trigonometrischen Funktionen $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$, u. s. w., und die Funktionen $\operatorname{arc}\sin x$ u. s. f. Es ist möglich, daß irrationale Werthe bestehen, welche sich vermittelst dieser Formen nicht ausdrücken lassen, die andere noch unbekannte Formen erheischen.

Das Integriren, wie jede indirekte Operation, kann nur gelingen, wenn es auf die Ausgangspunkte zurückführt, welche der entsprechenden direkten Operation, hier das Differenziren, zu Grunde lagen. Wenn daher das Integriren eines vorgelegten Differentials nicht glückt, so kann dies daran liegen, daß man den rechten Weg verfehlte, aber auch daran, daß man die gesuchte Form nicht kennt, nicht zu bilden vermag.

§. 344.

Es ist

$$1)\quad \partial\int f_x = f_x$$

$$2)\quad \int\partial f_x = f_x.$$

Denn es bezeichnet $\int f_x$ diejenige Funktion, deren Ableitung f_x ist, und ∂f_x ist die Funktion, deren Integral gleich ist f_x.

Daher ist auch

$$\partial\int f_x = \int\partial f_x.$$

§. 345.

Ist $$\int f_x dx = \phi_x$$
so ist, wenn C einen ganz beliebigen constanten Ausdruck vorstellt, auch

$$\int f_x dx = \phi_x + C.$$

Denn, welchen constanten Ausdruck C auch vorstellen möge, es ist immer $\partial(\phi_x + C) = \partial\phi_x = f_x$.

In den Anwendungen stellt sich heraus, daß in jedem besonderen Fall einem Integral ϕ_x noch ein constantes Glied C hinzugefügt werden muß, welches nach den obwaltenden Umständen sich bestimmt.

Ein Integral heißt allgemein, wenn es kein constantes Glied enthält, oder wenn das constante Glied einen beliebigen Werth hat; ein Integral heißt ein besonderes Integral, wenn es ein constantes Glied enthält, das einem bestimmten Fall der Anwendung entspricht. Aus einem allgemeinen Integral ϕ_x können unendlich viele besonderen Integrale $\phi_x + C$ hervorgehen. Alle besonderen Integrale eines allgemeinen Integrals sind unter sich und von diesem nur um einen constanten Werth verschieden, und stimmen unter sich und mit ihrem allgemeinen Integral darin überein, dieselbe Funktion als erste Ableitung zu liefern.

Sollten beim Integriren einer Funktion f_x die Operationen einen solchen Gang nehmen, daß $\phi_x + C$ als gesuchtes Integral hervorginge, so werden wir die Constante C streichen, als überflüssig, weil $\partial(\phi_x + C)$ nichts anderes ist, als $\partial\phi_x$; wir werden aber auch die Constante beibehalten, oder eine neue Constante hinzufügen dürfen, und hinzufügen, wenn dadurch dem erhaltenen Ausdruck eine einfachere Gestalt sich geben läßt. — Ueberhaupt, wenn sich ergeben hat $\int f_x dx = \phi_x$, so kann die Funktion ϕ_x durch Hinzufügung eines constanten Ausdruckes umgestaltet werden; und dergleichen Umformungen führt man aus, um eine Funktion auf eine einfachere oder einem bestimmten Zweck entsprechende Gestalt zu bringen. In dieser Hinsicht und in Bezug auf einige andere Umbildungen bemerke man die Sätze des folgenden Paragraphen.

§. 346.

1) Es ist nach §. 261

$$\partial \operatorname{arc}\sin\phi_x = -\partial \operatorname{arc}\cos\phi_x$$
$$\partial \operatorname{arc}\cos\phi_x = -\partial \operatorname{arc}\sin\phi_x$$

$$\partial \operatorname{arc\,tg} \phi_x = - \partial \operatorname{arc\,cotg} \phi_x$$
$$\partial \operatorname{arc\,cotg} \phi_x = - \partial \operatorname{arc\,tg} \phi_x$$

u. s. w.

Ist daher $\int f_x dx = \arcsin \phi_x$, so ist auch $\int f_x dx = - \arccos \phi_x$ u. s. w.

2) Es ist

$$\partial \ln(a\phi_x) = \partial \ln \phi_x$$
$$\partial \ln \frac{\phi_x}{a} = \partial \ln \phi_x$$
$$\partial \ln(-\phi_x) = \partial \ln \phi_x.$$

Ist daher $\int f_x dx = \ln \phi_x$, so ist auch $\int f_x dx = \ln(a\phi_x)$, $\int f_x dx = \ln \frac{\phi_x}{a}$ u. s. f.

3) Es ist

$$\operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} t' = \operatorname{arc\,tg} \frac{t + t'}{1 - tt'}. \quad [§. 176.]$$

Ist daher $\int f_x dx = \operatorname{arc\,tg} \phi_x$, so ist, unter c einen beliebigen constanten Ausdruck verstanden, auch $\int f_x dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{\phi_x + c}{1 - c\phi_x}$.

4) Es ist

$$\partial \operatorname{arc\,tg} \phi_x = - \partial \operatorname{arc\,tg} (-\phi_x)$$
$$\partial \operatorname{arc\,tg} \phi_x = \partial \operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{1}{\phi_x}\right).$$

Ist daher $\int f_x dx = \operatorname{arc\,tg} \phi_x$, so ist auch $\int f_x dx = - \operatorname{arc\,tg} (-\phi_x)$, und $\int f_x dx = \operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{1}{\phi_x}\right)$.

U. m. dergl.

§. 347.

Das Integriren ist, wie jede indirekte Operation, nur im Wege des Versuches ausführbar. Die Versuche, welche die früher behandelten indirekten Operationen (Dividiren, Radiciren) erfordern, ließen sich auf sehr enge Gränzen beschränken, so daß diese indirekten Operationen fast eben so leicht vollzogen werden, wie direkte Operationen. Eine Funktion f_x erleidet die wesentlichsten und mannigfachsten Veränderungen, während die Funk-

tion ∂f_x aus ihr gebildet wird. Daher ist das Integriren in vielen Fällen eine schwierige Operation, und läßt sich nicht auf einfache allgemeine Regeln zurückbringen. Wir werden die Funktionen in Klassen vorführen, und die Hilfsmittel zur Bestimmung ihrer Integrale angeben, das eine und das andere so weit, als der Zweck dieser Abhandlung es erlaubt.

§. 348.

Zunächst ergiebt sich eine Anzahl Integralformeln, wenn man die Formeln §. 260 und §. 261 umkehrt, d. h. in Integralformeln umgestaltet. Die wichtigsten Formeln, welche dadurch hervorgehen, enthält der folgende Paragraph.

§. 349.

Es ist

1) $\int(f_x \pm \phi_x)dx = \int f_x dx \pm \int \phi_x dx.$

2) $\int(f_x \partial\phi_x + \phi_x \partial f_x)dx = f_x \phi_x.$

3) $\int f_x \partial\phi_x dx = f_x \phi_x - \int(\phi_x \partial f_x)dx.$

4) $\int f_x \phi_x dx = f_x \int \phi_x dx - \int(\partial f_x \int \phi_x dx)dx.$

5) $\int a f_x dx = a \int f_x dx.$

6) $\int f_x{}^n \partial f_x dx = \frac{f_x{}^{n+1}}{n+1}.$

7) $\int \frac{\partial f_x}{f_x} dx = \ln f_x.$

8) $\int \frac{\partial f_x}{1 + f_n{}^2} dx = \text{arc}\,\text{tg}\, f_x.$

9) $\int \frac{\partial f_x}{\sqrt{1 - f_x{}^2}} dx = \text{arc}\sin f_x.$

Es steht nämlich unter 1) zur Linken diejenige Funktion, deren erste Ableitung $f_x \pm \phi_x$ ist; und rechts steht dasselbe, denn es ist $\partial(\int f_x \pm \int \phi_x)$ nach §. 203 gleich $\partial \int f_x \pm \partial \int \phi_x$, und dies ist $f_x \pm \phi_x$.

Die zweite Formel folgt unmittelbar aus §. 204.

Auf den Ausdruck unter 2) zur Linken wende man 1) an, das liefert

$$\int f_x \partial\phi_x dx + \int \phi_x \partial f_x dx = f_x \phi_x$$

und wird hieraus $\int f_x \partial\phi_x dx$ entwickelt, so entsteht die Formel 3).

Das Gesetz in 4) zu erhalten, setze man in 3) $\phi_x = \int \psi_x$ also $\partial\phi_x = \psi_x$; dadurch geht 3) über in

$$\int f_x \psi_x dx = f_x \int \psi_x dx - \int (\partial f_x \int \psi_x dx) dx$$

und das ist das Gesetz unter 4).

Unter 5) steht zur Linken der Ausdruck, dessen Ableitung af_x ist, und rechts steht derselbe Ausdruck, denn es ist $\partial a \int f_x = a \partial \int f_x = af_x$.

Unter 6) steht zur Linken der Ausdruck, dessen Ableitung $f_x{}^n \partial f_x$ ist, und rechts steht der gleiche Ausdruck, denn es ist $\partial \frac{f_x{}^{n+1}}{n+1} = f_x{}^n \partial f_x$.

Die Gesetze unter 7), 8), 9) ergeben sich unmittelbar aus §. 260 7) und §. 261 3), 1).

Die hier aufgestellten Formeln werden uns als Grundlage zur Bestimmung der Integrale dienen.

Wenn man die Formeln 3) oder 4) anwendet, pflegt man zu sagen, man integrire theilweise.

§. 350.

Von einer Funktion f beliebig vieler Ausdrücke kann das Integral irgend einem beliebigen derselben gedacht werden; und dies Integral ist stets die Funktion ψ, deren Ableitung nach jenem Ausdruck f ist. Das Zeichen

$$\int f dx$$

läßt sofort erkennen, nach welchem als veränderlich betrachteten Ausdruck (hier x) das Integral soll verstanden werden.

§. 351.

Es liege vor

$$\int f_x \text{ oder } \int f_x dx.$$

Beides führt zu einerlei Ergebniß. Es sei Grund vorhanden statt

x eine Funktion ϕ_z zu substituiren, und die Integration nach z zu vollziehen. Alsdann muß $\int f_x$ durch

$$\int f_{\phi_z} \partial \phi_z$$

ersetzt werden, und $\int f_x dx$ durch

$$\int f_{\phi_z} \partial \phi_z dz$$

damit das Ergebniß dasselbe bleibe.

Ist nämlich

$$\psi_x = \int f_x = \int f_x dx$$

so ist

$$\partial \psi_x = f_x$$

und setzt man

$$x = \phi_z$$

so folgt nach §. 223

$$\partial \psi_z = f_{\phi_z} \partial \phi_z$$

also

$$\psi_z = \int f_{\phi_z} \partial \phi_z = \int f_{\phi_z} \partial \phi_z dz.$$

Es springt dies einfach in die Augen, wenn man nur beachtet, daß die Funktion unter dem Integralzeichen stets die Ableitung der zu suchenden Funktion nach dem Veränderlichen sein muß, nach welchem man zu integriren beabsichtigt.

Das Zeichen

$$\int f_x dx$$

führt an sich ebenfalls auf obiges Gesetz; denn wird

$$x = \phi_z$$

gesetzt, so ist

$$dx = \partial \phi_z dz.$$

Nach vollzogener Integration nach z kann aus der gewonnenen Funktion ψ_z die ursprünglich verlangte ψ_x gebildet werden. Es geschieht, indem man z aus

$$x = \phi_z$$

entwickelt, und den für z erhaltenen Ausdruck, der eine Funktion von x ist, statt z in ψ_z substituirt.

Hierin liegt ein sehr fruchtbares oft angewendetes Hilfsmittel der Integration, die sogenannte Substitutions-Methode.

I. Integration rationaler ganzer Funktionen.

§. 352.

Jede Funktion, welche auf die Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots. + vx^n$$

gebracht werden kann, heißt eine rationale ganze Funktion vom nten Grade.

So ist z. B. $x^n(a + bx^q)^r$ eine rationale ganze Funktion, wenn n, q, r positive ganze Zahlen vorstellen; denn durch Anwendung des binomischen Satzes und Auflösung der Klammer geht eine Summe von der Gestalt der oberen hervor.

§. 353.

Die Integrale aller rationalen ganzen Funktionen bestimmen sich durch Anwendung der Gesetze

$$1)\quad \int(f_x \pm \phi_x)dx = \int f_x dx \pm \int \phi_x dx$$

$$2)\quad \int a f_x dx = a\int f_x dx$$

und

$$3)\quad \int f_x{}^n \partial f_x dx = \frac{f_x{}^{n+1}}{n+1}.$$

Beispiele.

1) $\int 1 dx = \int x^0 dx = \int x^0 \partial x dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = x$. Auch nach §. 344 2).

2) $\int x^n dx = \int x^n \partial x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

3) $\int ax^n dx = a\int x^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$.

4) $\int adx = \int ax^0 dx = a\int x^0 dx = ax$.

5) $\int (a + bx - cx^2)dx = \int a + \int bxdx - \int cx^2 dx = ax + \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3$.

6) $\int (1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{6}x^9 - 12x^{15})dx = x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{12}x^{10} - \frac{3}{4}x^{16}$.

7) $\int [(1+x^2)(2-x) - (1-x)^2]dx = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$.

8) $\int(3 + 5xy + y^2)dx = 3x + \frac{5}{2}x^2y + xy^2$.

9) $\int(3 + 5xy + y^2)dy = 3y + \frac{5}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3$.

10) $\int(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)dx = ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \frac{1}{4}dx^4 + \ldots$

§. 354.

Wir machen darauf aufmerksam, daß die Formel $\int f_x{}^n \partial f_x dx = \frac{f_x{}^{n+1}}{n+1}$ nicht auf Ausdrücke von der Form $\int f_x{}^n dx$ angewendet werden darf, sondern nur auf Integrale von der Form $\int f_x{}^n \partial f_x dx$. Zuweilen aber läßt sich Integralen von der Form $\int f_x{}^n dx$ die Gestalt $\int f^n \partial f_x dx$ geben.

Es ist, unter a einen beliebigen constanten Ausdruck verstanden, $\int f_x dx = \frac{1}{a}\int a f_x dx$; denn man hat $\frac{1}{a}\int a f_x dx = \frac{1}{a} a \int f_x dx = \int f_x dx$. Ist daher in einem besonderen Fall die Ableitung von f_x constant, etwa $\partial f_x = a$, so kann $\int f_x dx = \frac{1}{a}\int f_x \partial f_x dx$, eben so $\int f_x{}^n dx = \frac{1}{a}\int f_x{}^n \partial f_x dx$ gesetzt, und dann die Formel $\int f_x{}^n \partial f_x dx = \frac{f_x{}^{n+1}}{n+1}$ auf diese Integrale angewendet werden. Und ist $\partial f_x = ax^q$, so ist $\int x^q f_x{}^n dx = \frac{1}{a}\int f_x{}^n \partial f_x dx$ und dieselbe Formel anwendbar. Aehnliches gilt für die Formeln §. 349 7), 8), 9), welches für die Folge zu bemerken ist.

Beispiele.

1) $\int(5 + x)^3 dx = \int(5 + x)^3 \partial(5 + x)dx = \frac{1}{4}(5 + x)^4$.

2) $\int(2 + 7x)^6 dx = \frac{1}{7}\int(2 + 7x)^6 \partial(2 + 7x)dx = \frac{1}{49}(2 + 7x)^7$.

3) $\int(1 - 3x)^2 dx = -\frac{1}{3}\int(1 - 3x)^2 \partial(1 - 3x)dx = \frac{1}{9}(3x - 1)^3$.

4) $\int 5x(2 + 3x^2)^2 dx = \frac{5}{6}\int(2 + 3x^2)^2 \partial(2 + 3x^2)dx = \frac{5}{18}(2 + 3x^2)^3$.

5) $\int 8x^4(1-x^5)^7 dx = -\frac{1}{5}(1-x^5)^8.$

6) $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}.$

7) $\int x^{q-1}(a+bx^q)^n dx = \frac{(a+bx^q)^{n+1}}{bq(n+1)}.$

Diese Integrale werden auch erlangt, wenn man vermittelst des binomischen Satzes die Klammern auflöst, und die einzelnen Glieder integrirt; es fällt aber in die Augen, daß in solcher Weise die Resultate umständlicher erhalten werden und in weniger einfachen Gestalten. Dagegen sind sie dann frei von überflüssigen constanten Gliedern, während jedes der obigen Resultate ein constantes Glied in sich schließt, welches zum Vorschein tritt, wenn man die Klammern beseitigt.

II. Integration rationaler gebrochener Funktionen.

§. 355.

Jede Funktion, welche auf die Form

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3+\ldots}$$

gebracht werden kann, heißt eine rationale gebrochene Funktion. Eine rationale gebrochene Funktion heißt echt gebrochen, wenn der höchste Exponent von x im Zähler kleiner ist als der höchste Exponent von x im Nenner, unecht im entgegengesetzten Fall.

Unecht gebrochene Funktionen verwandeln sich, durch Division des Nenners in den Zähler, in die Summe einer ganzen Funktion und einer echt gebrochenen. Deshalb bedarf es nur für das Integriren echt gebrochener Funktionen der Anleitung.

§. 356.

Die Hilfsmittel, welche sich zunächst für das Integriren gebrochener Funktionen darbieten, bestehen in den Formeln

$$1)\quad \int f_x{}^n \partial f_x dx = \frac{f_x{}^{n+1}}{n+1}.$$

$$2)\quad \int \frac{\partial f_x}{f_x} dx = \ln f_x.$$

$$3)\quad \int \frac{\partial f_x}{1 + f_x{}^2} dx = \operatorname{arc\,tg} f_x.$$

Nach der Formel 2) integriren sich alle Brüche von der Form $\frac{1}{a + bx}$. Und es ist

$$\alpha)\quad \int \frac{1}{a + bx} dx = \frac{1}{b} \int \frac{\partial(a + bx)}{a + bx} dx = \frac{1}{b} \ln(a + bx).$$

Nach der Formel 1) integriren sich alle Brüche von der Form $\frac{1}{(a + bx)^n} dx$. Es ist nämlich

$$\beta)\quad \int \frac{1}{(a + bx)^n} dx = \frac{1}{b} \int (a + bx)^{-n} \partial(a + bx) dx$$

$$= \frac{1}{b} \cdot \frac{(a + bx)^{-n+1}}{-n + 1} = -\frac{1}{b(n - 1)(a + bx)^{n-1}}.$$

Die Formel α) erscheint als ein besonderer Fall der Formel β), ist das indeß nicht. Die Formel β) ist nämlich unbrauchbar, wenn $n = 1$ ist, weil dann der Nenner des Resultates in Null übergeht. Die Formel α) ist daher nicht überflüssig, sondern ergänzt die Formel β).

Vermittelst der Formel 3) bestimmt sich das Integral $\int \frac{1}{a + bx^2}$. Es ist nämlich

$$\gamma)\quad \int \frac{1}{a + bx^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \frac{b}{a} x^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(x \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a}{b}} \int \frac{\partial\left(x \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{1 + \left(x \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Wenn b negativ ist, entsteht hieraus

$$\int \frac{1}{a - bx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{-1}} \operatorname{arc\,tg} x \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{-1}.$$

Der letzte Ausdruck läßt sich durch die Formel §. 177 3) in einen reellen umwandeln; und es ist nach dieser Formel

$$\frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{-1}} \operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{1 - x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 - x\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

so daß sich ergiebt

$$\delta)\quad \int \frac{1}{a - bx^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}.$$

Aus δ) entspringt

$$\varepsilon)\quad \int \frac{1}{-a + bx^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{x\sqrt{b} - \sqrt{a}}{x\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Es ist nämlich

$$\int \frac{1}{-a + bx^2} dx = -\int \frac{1}{a - bx^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}$$

oder §. 346 2) angewendet

$$\int \frac{1}{-a + bx^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{x\sqrt{b} - \sqrt{a}}{x\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Durch Integriren gewonnene Resultate nehmen häufig für besondere Werthe in ihnen vorkommender Ausdrücke die Form $\frac{a}{0}$, oder imaginaire Gestalt an. Diese Erscheinung hat ihren Grund darin, daß sich als Ableitungen von Funktionen ganz verschiedener Gattung öfter Funktionen derselben Art ergeben [wozu die Gleichungen α), β), γ) und δ) Beispiele liefern], während bei der Operation des Integrirens die gesuchte Funktion

nicht unbestimmt gelassen, sondern als eine Funktion von bestimmter Form vorausgesetzt wird. Die Voraussetzung, als Folge von Vermuthung, Wahrscheinlichkeit, führt, je nachdem sie richtig ist, oder unrichtig, zu einem brauchbaren Resultat, oder zu einem unbrauchbaren, oder zu keinem. Ergiebt sich bei einem Integriren $\int f_x = \frac{1}{0}$, so berechtigt ein solches Resultat nicht zu dem Schluß, daß der Werth des Integrals $\int f_x$ unendlich groß sei, sondern es muß, weil es sich beim Integriren zunächst bloß um die Bestimmung von Formen, nicht um die Bestimmung von Werthen, handelt, jenes Resultat dahin gedeutet werden, daß keine Funkion von der beim Integriren vorausgesetzten Gattung bestehe, welche das Integral von f_x sein könnte, oder, was dasselbe sagt, die zur Ableitung eine Funktion von der Form der f_x gewähre. Und ergiebt sich $\int f_x$ gleich einer imaginairen Funktion, die in Fällen der Anwendung im Allgemeinen unbrauchbar ist, so darf nicht das Integral als imaginair betrachtet werden; es ist nur in der vorausgesetzten Form imaginair. In beiden Fällen muß man die Voraussetzung ändern und von neuem integriren, wenn das erhaltene unbrauchbare Resultat sich in ein brauchbares umgestalten läßt.

Unter β) z. B. läßt sich vermuthen, $\int \frac{1}{(a+bx)^n} dx$ werde zu einer Potenz führen, und wir haben, solches voraussetzend, vermittelst der Formel 1) das Integral bestimmt. Diese Voraussetzung ist auch richtig, den Fall ausgenommen, daß $n = 1$ ist. Denn $\int \frac{1}{a+bx} dx$, eben so behandelt, liefert ein Resultat von der Form $\frac{1}{0}$; es besteht also keine Potenz, welche das Integral von $\frac{1}{a+bx}$, oder deren Ableitung $\frac{1}{a+bx}$ wäre. Unter der abgeänderten Voraussetzung, $\frac{1}{a+bx}$ sei die Ableitung eines Logarithmus, oder $\int \frac{1}{a+bx} dx$ sei ein Logarithmus, ergab sich unter α) ein brauchbares Resultat.

$\int \frac{1}{a+bx^2}dx$ ist unter γ) als auf eine Funktion von der Form arc tg führend vorausgesetzt und behandelt worden, und es ergab sich ein brauchbares Resultat. $\int \frac{1}{a-bx^2}dx$, eben so behandelt, führt zu einem imaginairrn Resultat. Dies läßt sich, wie oben geschehen ist, in eine reelle Funktion von der Form ln umgestalten, auch unmittelbar erhalten, wenn man die Voraussetzung dahin abändert, daß dieses Integral auf einen Logarithmus führe, und die Integration demgemäß (in einer später zu zeigenden Weise) vollzieht.

§. 357.

Die Resultate des vorigen Paragrahen

1) $\int \frac{1}{a+bx}dx = \frac{1}{b}\ln(a+bx)$

2) $\int \frac{1}{(a+bx)^n}dx = -\frac{1}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}}$

3) $\int \frac{1}{a+bx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{b}{a}}$

4) $\int \frac{1}{a-bx^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{1+x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1-x\sqrt{\frac{b}{a}}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$$

5) $\int \frac{1}{-a+bx^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{x\sqrt{b}-\sqrt{a}}{x\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

und ganz besonders die Formeln 1) und 2) bilden die Grundlage für das Integriren der übrigen rationalen gebrochenen Funktionen.

Wenn nämlich eine gebrochene Funktion $\frac{f_x}{\phi_x}$ zu integriren ist, und es läßt sich ϕ_x durch ein Produkt $(a+bx)^n \times (a'+b'x)^q \times \ldots\ldots$

ausdrücken, so kann man, wie wir zeigen werden, $\frac{f_x}{\phi_x}$ durch eine Summe

$$\frac{c}{(a+bx)^n}+\frac{c'}{(a'+b'x)^q}+\dots$$

wiedergeben, und alsdann ist

$$\int\frac{f_x}{\phi_x}dx=\int\frac{c}{(a+bx)^n}dx+\int\frac{c'}{(a'+b'x)^q}dx+\dots$$

während die rechts stehenden Integrale sich nach den Formeln 1) und 2) bestimmen.

Wird eine gebrochene Funktion in eine Summe von Brüchen umgeformt, deren Nenner die Faktoren des Nenners der Funktion sind, so sagt man, jene Funktion werde in Partialbrüche zerlegt, und nennt diese Brüche Partialbrüche.

Der folgende Paragraph enthält das Nothwendigste über das Zerlegen gebrochener Funktionen in Partialbrüche.

§. 358.

I) Um anzudeuten, daß eine ganze Funktion f_x vom $n$ten Grade sei, werden wir in diesem Paragraphen schreiben ${}^nf_x$.

Jede echt gebrochene Funktion wird dann durch $\frac{{}^{n-1}f_x}{{}^n\phi_x}$ vorgestellt, wenn wir nämlich zulassen, daß im Zähler auch solche Coefficienten Null seien, deren Verschwinden die Funktion ${}^{n-1}f_x$ auf einen niedrigeren Grad zurückbringt.

II) Es sei $\frac{{}^{n-1}f_x}{{}^n\phi_x}$ eine beliebige echt gebrochene Funktion. Die Funktion ${}^n\phi_x$ drücke sich aus durch das Produkt der beiden Funktionen P und P'. Ist P vom Grade q, so muß nothwendig P' vom $(n-q)$ten Grade sein. Es sei ferner

$$1)\quad \frac{{}^{n-1}f_x}{{}^n\phi_x}=\frac{A}{{}^qP}+\frac{A'}{{}^{n-q}P'}$$

und wir wollen zunächst bestimmen, von welchen Graden die Funktionen A und A' zu denken sind. Aus 1) folgt

$$2)\quad {}^{n-1}f_x=A\cdot{}^{n-q}P'+A'\cdot{}^qP.$$

Soll die rechts stehende Summe eine Funktion vom $(n-1)$sten Grade ausmachen, so muß wenigstens der eine ihrer Summanden vom $(n-1)$sten Grade (der andere kann von einem geringeren) sein. Im Allgemeinen ist nicht auszumitteln, welcher Summand, oder ob jeder vom $(n-1)$sten Grade sein werde, und deshalb ist man gezwungen, beide Summanden vom $(n-1)$sten Grade anzunehmen, indem man zuläßt, daß bei dem einen oder dem andern nöthigenfalls solche Coefficienten zu Null werden, deren Verschwinden den Summand auf einen geringeren Grad zurückbringt. Damit $A \cdot {}^{n-q}P'$ vom Grade $n-1$ ausfalle, muß A vom $(q-1)$sten Grade sein, und damit $A \cdot {}^{q}P$ vom $(n-1)$sten Grade werde, A' vom Grade $n-q-1$. Und jetzt erhellet aus 1), daß, wenn eine echt gebrochene Funktion in Partialbrüche zerlegt wird, der Zähler jedes Partialbruchs um einen Grad niedriger zu denken ist, als der Nenner. Es fällt in die Augen, daß das Gesetz giltig bleibt, wenn eine gebrochene Funktion in mehr als zwei Partialbrüche zerlegt wird.

III) Es sei $\frac{{}^{n-1}f_x}{{}^{n}\phi_x}$ eine beliebige echt gebrochene Funktion. Es sei ${}^{n}\phi_x = {}^{q}P \cdot {}^{q'}P' \cdot {}^{q''}P'' \ldots.$ Will man jene gebrochene Funktion in Partialbrüche zerlegen, deren Nenner in den Funktionen ${}^{q}P$, ${}^{q}P' \ldots.$ bestehen, so schlage man folgenden Weg ein: Man nehme eine ganze Funktion $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots. + \varkappa x^{q-1}$ vom $(q-1)$sten Grade mit den unbestimmten Coefficienten $\alpha, \beta \ldots.$ an, eben so eine ganze Funktiou $\alpha' + \beta' x + \ldots.$ vom $(q'-1)$sten Grade u. s. f. und setze

$$\frac{{}^{n-1}f_x}{{}^{n}\phi_x}$$

$$= \frac{\alpha + \beta x + \ldots. + \varkappa x^{q-1}}{{}^{q}P} + \frac{\alpha' + \beta' x + \ldots.}{{}^{q'}P'} + \frac{\alpha'' + \beta'' x + \ldots.}{{}^{q''}P''}$$

Man beseitige die Nenner, löse die Klammern auf, ordne und bringe auf Null. Es entsteht eine Gleichung $F_x = 0$, in welcher F_x vom $(n-1)$sten Grade ist. Jeder Coefficient der Summe F_x muß Null sein nach einem bekannten Satz. Man setze jeden der Coefficienten gleich Null, und es entstehen n einfache Gleichungen für die Unbekannten α, $\beta \ldots.$, $\alpha' \ldots.$, deren

Anzahl, wie leicht erhellet, ebenfalls n ist, die also im Allgemeinen sich aus diesen Gleichungen entwickeln lassen, und deren Werthe nur oben zu substituiren sind, um die verlangten Partialbrüche zu erhalten.

Sind die Funktionen ^{q}P.... vom ersten Grade, so sind die Zähler der Partialbrüche constant.

IV) Ist ϕ_x gleich $(a + bx)P$, unter P eine Funktion verstanden, welche nicht den Faktor $a + bx$ enthält, so läßt sich zerlegen

$$\frac{f_x}{\phi_x} = \frac{\alpha}{a + bx} + \frac{Q}{P}$$

während α einen constanten Ausdruck vorstellt.

Besteht die obere Gleichung, so muß sein

$$1) \quad f_x = \alpha P + (a + bx)Q$$

für jeden Werth von x, also auch für den Werth von x, für welchen

$$a + bx = 0$$

ist, d. h. für $x = -\frac{a}{b}$. Und wird dieser Werth von x in 1) substituirt, so verschwindet das Glied $(a + bx)Q$ und es folgt

$$2) \quad \alpha = \frac{f_x}{P}$$

während x sowohl in f_x als in P den Werth $-\frac{a}{b}$ vorstellt.

Der Ausdruck P ist nicht Null für den Werth $-\frac{a}{b}$ von x, daher besteht der Coefficient α, und dann auch, wie sich leicht übersieht, der Ausdruck Q. Daraus erhellet der Satz.

Ist also die Funktion $\frac{f_x}{\phi_x}$ gegeben, deren Nenner ϕ_x den Faktor $a + bx$ einmal enthält, so ergiebt sich der Zähler α zu dem Partialbruch, dessen Nenner dieser Faktor $a + bx$ ist, wenn man f_x durch das Produkt P der Faktoren dividirt, welche außer $a + bx$ in ϕ_x vorkommen, und für x den Werth setzt, welcher $a + bx$ zu Null macht.

Und ist ϕ_x ein Produkt $(a + bx)(a' + b'x) \dots$ von q einfachen Faktoren, deren jeder nur einmal (in der ersten Potenz) erscheint, so kann die Funktion $\frac{f_x}{\phi_x}$ nach dem Obigen sehr leicht in q Partialbrüche zerlegt werden, die zu Nennern jene einfachen Faktoren haben.

Der Werth von α unter 2) läßt sich noch anders ausdrücken. Es ist nämlich

$$\partial\phi_x = \partial(a + bx)P = (a + bx)\partial P + P \cdot b.$$

Für den Werth $-\frac{a}{b}$ von x entspringt hieraus

$$P = \frac{\partial\phi_x}{b}$$

und dies in 2) substituirt, liefert

$$3) \quad \alpha = \frac{bf_x}{\partial\phi_x}$$

unter x den Werth $-\frac{a}{b}$ gedacht.

V) Ist $\phi_x = (a + bx)^n P$, während in P nicht weiter der Faktor $a + bx$ erscheint, so läßt sich zerlegen:

$$1) \quad \frac{f_x}{\phi_x}$$

$$= \frac{\alpha}{(a+bx)^n} + \frac{\beta}{(a+bx)^{n-1}} + \frac{\gamma}{(a+bx)^{n-2}} + \dots + \frac{\tau}{a+bx} + \frac{V}{P}.$$

Die Zähler $\alpha, \beta, \dots \tau$ sind constant, V im Allgemeinen eine Funktion von x.

Es ist nämlich

$$2) \quad \frac{f_x}{\phi_x} = \frac{1}{(a + bx)^{n-1}} \cdot \frac{f_x}{(a + bx)P}$$

und wegen IV) darf man setzen

$$\frac{f_x}{(a + bx)P} = \frac{\alpha}{a + bx} + \frac{Q}{P}.$$

Dies in 2) substituirt, liefert

$$3) \quad \frac{f_x}{\phi_x} = \frac{\alpha}{(a + bx)^n} + \frac{Q}{(a + bx)^{n-1}P}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{Q}{(a+bx)^{n-1}P} = \frac{1}{(a+bx)^{n-2}} \cdot \frac{Q}{(a+bx)P}$$

während nach IV) gesetzt werden darf

$$4)\quad \frac{Q}{(a+bx)P} = \frac{\beta}{a+bx} + \frac{Q'}{P}$$

und wenn man diesen Werth in 3) setzt, entsteht

$$5)\quad \frac{f_x}{\phi_x} = \frac{\alpha}{(a+bx)^n} + \frac{\beta}{(a+bx)^{n-1}} + \frac{Q'}{(a+bx)^{n-2}P}.$$

Durch Wiederholung dieser Operation gelangt man offenbar zur Behauptung.

Den Zähler α zu bestimmen, bilde man aus 3)

$$6)\quad f_x = \alpha P + (a+bx)Q$$

und setze für x den Werth $-\frac{a}{b}$, für welchen $a+bx$ in Null übergeht. Dann folgt aus 6)

$$7)\quad \alpha = \frac{f_x}{P}, \text{ für } x = -\frac{a}{b}.$$

Diesen Werth von α substituire man in 6), entwickele

$$8)\quad Q = \frac{f_x - \alpha P}{a+bx}\,{}^{*)}$$

setze den erhaltenen Werth in 4), und es ergiebt sich hieraus

$$9)\quad \beta = \frac{Q}{P}, \text{ für } x = -\frac{a}{b}.$$

U. s. w.

VI) Nach dem Bisherigen läßt sich jede echt gebrochene Funktion, deren Nenner ϕ_x ein Produkt einfacher Faktoren ist,

---

*) $f_x - \alpha P$ ist durch $a + bx$ theilbar. Aus 6) erhellet nämlich, daß $f_x - \alpha P$ Null ist für den Werth $-\frac{a}{b}$ von x. Genügt aber $x = -\frac{a}{b}$ der Gleichung $f_x - \alpha P = 0$, so muß $f_x - \alpha P$ den Faktor $x + \frac{a}{b}$ enthalten, also von der Form $\left(x + \frac{a}{b}\right)F_x$ oder $(a+bx)\frac{F_x}{b}$ sein, und dann ist es theilbar durch $a + bx$.

in Partialbrüche zerlegen, welche constante Zähler haben und Nenner von der Form $(a + bx)^n$. Erscheinen die Faktoren in ϕ_x sämmtlich in der ersten Potenz, so wird die Zerlegung bloß vermittelst IV) vollzogen, erscheinen die Faktoren auch in höheren Potenzen, so bewirkt man die Zerlegung durch IV) und V) oder bloß durch V). Einige Abkürzung findet sich bei den folgenden Beispielen angegeben.

Enthält der Nenner ϕ_x einer echt gebrochenen Funktion quadratische oder höhere Faktoren, und wäre man in einem besonderen Fall veranlaßt, die Funktion in Partialbrüche zu zerlegen, welche die quadratischen oder höheren Faktoren zu Nennern haben, so giebt III) dazu die Anleitung; und kommen diese Faktoren in höheren Potenzen vor, so hätte man ähnlich zu zerlegen wie in 1) unter II).

Beispiele.

1) $$\frac{3+5x+x^2}{(2+3x)(4x-9)(x-2)} = \frac{\frac{1}{280}}{2+3x} + \frac{\frac{309}{35}}{4x-9} - \frac{\frac{17}{8}}{x-2}.$$

Man setze

$$\frac{3+5x+x^2}{(2+3x)(4x-9)(x-2)} = \frac{\alpha}{2+3x} + \frac{\beta}{4x-9} + \frac{\gamma}{x-2}.$$

Nach IV) ist

$$\alpha = \frac{3+5x+x^2}{(4x-9)(x-2)}$$

für den Werth von x, welcher der Gleichung $2+3x=0$ entspricht, d. h. für $x = -\frac{2}{3}$. Und es ist

$$\frac{3-5\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}}{(-\frac{8}{3}-9)(-\frac{2}{3}-2)} = \frac{1}{280}.$$

Weiter ist

$$\beta = \frac{3+5x+x^2}{(2+3x)(x-2)} \text{ für } x = \tfrac{9}{4}.$$

und

$$\gamma = \frac{3+5x+x^2}{(2+3x)(4x-9)} \text{ für } x = 2.$$

2) $\frac{1-3x+x^2}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{5}{2(x-4)} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{2(x-2)}$.

3) $\frac{x-3}{(x-5)^2(x-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-5)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{x-5} - \frac{\frac{1}{8}}{x-1}$.

Man setze

$$\frac{x-3}{(x-5)^2(x-1)} = \frac{\alpha}{(x-5)^2} + \frac{\beta}{x-5} + \frac{\gamma}{x-1}.$$

Für γ ergiebt sich nach IV) $\frac{1-3}{(1-5)^2}$ oder $-\frac{1}{8}$.

Nach V) 7) ist $\alpha = \frac{5-3}{5-1} = \frac{1}{2}$

β zu erhalten bestimme man zunächst nach V) 8)

$$Q = \frac{x-3-\frac{1}{2}(x-1)}{x-5} = \frac{x-5}{2(x-5)} = \frac{1}{2}$$

und dann ist nach V) 9)

$$\beta = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}.$$

Oder man setze

$$\frac{x-3}{(x-5)^2(x-1)} = \frac{\alpha}{(x-5)^2} + \frac{\beta}{x-5} + \frac{\gamma}{x-1}$$

und beseitige die Nenner. Das liefert

a) $x-3 = \alpha(x-1) + \beta(x-5)(x-1) + \gamma(x-5)^2$.

Dem x, das urveränderlich ist, darf man jeden Werth beilegen, und dadurch kann man aus der Gleichung a) so viele Gleichungen herstellen, als nöthig sind die Unbekannten zu bestimmen. Setzt man hier z. B. $x = 1$, $x = 5$, $x = 0$, so erhält man aus a) die Gleichungen.

$$\begin{aligned} -2 &= 16\gamma \\ 2 &= 4\alpha \\ -3 &= -\alpha + 5\beta + 25\gamma \end{aligned}$$

und aus ihnen

$$\begin{aligned} \gamma &= -\tfrac{1}{8} \\ \alpha &= \tfrac{1}{2} \\ \beta &= \tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

4) $\frac{5-x}{(x-2)^3(3-x)} = \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{3-x}$.

Man setze

b) $$\frac{5-x}{(x-2)^3(3-x)}=\frac{\alpha}{(x-2)^3}+\frac{\beta}{(x-2)^2}+\frac{\gamma}{x-2}+\frac{\delta}{3-x}.$$

Nach V) ist dann

$$\alpha=\frac{5-2}{3-2}=3$$

$$Q=\frac{5-x-3(3-x)}{x-2}=2$$

$$\beta=\frac{2}{3-2}=2$$

und eben so weiter gehend

$$Q'=\frac{Q-\beta P}{x-2}=\frac{2-2(3-x)}{x-2}=2$$

$$\gamma=\frac{2}{3-2}=2$$

δ wird nach IV) gefunden.

Oder man beseitige in der Gleichung b) die Nenner; es entsteht:

c) $$5-x=\alpha(3-x)+\beta(x-2)(3-x)+\gamma(x-2)^2(3-x)$$
$$+\delta(x-2)^3.$$

Hier setze man $x=2$, und es folgt

$$\alpha=3$$

$x=3$ liefert

$$\delta=2.$$

Die Werthe für α und δ substituire man in c) und setze darauf $x=0$ und $x=1$, das liefert

$$2=-\beta+2\gamma$$
$$0=-\beta+\gamma$$

und hieraus entspringt

$$\gamma=2$$
$$\beta=2.$$

5) $$\frac{5+x}{(x-3)(7-4x+x^2)}=\frac{2}{x-3}+\frac{3-2x}{7-4x+x^2}.$$

6) $$\frac{11+8x+x^2-x^3-x^4}{(x-1)^2(x+2)^2(x+1)}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x+2)^2}$$
$$-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}.$$

7) $$\frac{-2+x+3x^2+5x^3+3x^4}{x^3(x^2-1)} = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{5}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

8) $$\frac{1+2x-x^4}{x^3(x+1)^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Schließlich werde bemerkt, daß, wenn man in der Gleichung V) 1) die Nenner beseitigt, und die entstehende Gleichung $(n-1)$mal nach x differenzirt, die Anzahl von Gleichungen gewonnen wird, welche zur Bestimmung der Unbekannten $\alpha, \beta \ldots$ ausreicht, und aus denen sich dieselben leicht entnehmen lassen.

§. 359.

Wenn der Nenner einer echt gebrochenen Funktion als ein Produkt von Faktoren gegeben ist, welche die Form $a+bx$ oder $(a+bx)^n$ haben, oder wenn man im Stande ist, den Nenner in ein solches Produkt zu verwandeln, so kann die Funktion selbst nach dem vorigen Paragraphen in Partialbrüche zerlegt werden, deren Zähler constant und deren Nenner jene Faktoren sind; und das Integral der gebrochenen Funktion ist alsdann die Summe der Integrale der Partialbrüche, während diese Integrale sich nach §. 357 bestimmen.

Wir lassen die Integrale der echt gebrochenen Funktionen folgen, deren Nenner vom zweiten Grade sind und vom dritten (vorausgesetzt, daß die Faktoren der letztern vorliegen), mit Ausnahme derjenigen, welche geradezu die Formel §. 357 2) liefert.

1) $$\int \frac{x}{(a+x)^2}dx = \frac{a}{a+x} + \ln(a+x).$$

Es ist nämlich

$$\frac{x}{(a+x)^2} = -\frac{a}{(a+x)^2} + \frac{1}{a+x}$$

folglich $$\int \frac{x}{(a+x)^2}dx = \int \frac{dx}{a+x} - a\int \frac{dx}{(a+x)^2}$$

$$= \ln(a+x) + \frac{a}{a+x}$$

nach §. 357) 1) und 2).

2) $$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\ln\frac{x+a}{x+b}.$$

3) $$\int\frac{x}{(x+a)(x+b)}dx=\frac{1}{a-b}[a\ln(x+a)-b\ln(x+b)].$$

4) $$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Der erste Ausdruck dient für den Fall, daß

$$b^2-4ac>0$$

der zweite für den, daß

$$b^2-4ac<0.$$

Ist

$$b^2-4ac=0$$

so ist

$$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=-\frac{1}{\frac{1}{2}b+cx}.$$

Der erste Ausdruck wird durch Zerlegen in Partialbrüche gewonnen. Man setze zu dem Ende

$$\frac{1}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2}$$

und, um den Nenner in Faktoren zu zerlegen

$$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$$

woraus folgt

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}.$$

Die Faktoren sind also

$$x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

und

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}.$$

Sie mögen bezeichnet werden beziehlich durch $x + a'$ und $x + b'$. Hiernach ist

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c} \int \frac{dx}{(x + a')(x + b')}.$$

Das letzte Integral ist bereits unter 2) bestimmt worden. Indem man die Formel 2) anwendet, entsteht

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c(b' - a')} \ln \frac{x + a'}{x + b'}$$

und wenn man hierin die Werthe für a' und b' setzt, geht der erste Ausdruck für das gesuchte Integral hervor.

Der zweite Ausdruck kann vermittelst §. 357 3) erhalten werden, wenn man den Nenner wie eine höhere Gleichung reducirt. Man setze deshalb

$$x = z - \frac{b}{2c}$$

und es entsteht

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} x + x^2 = \frac{4ac - b^2}{4c^2} + z^2.$$

Nach §. 351 ist jetzt

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{\frac{4ac - b^2}{4c^2} + z^2} \partial x_z dz.$$

Es ist aber $\partial x_z = \partial\left(z - \frac{b}{2c}\right) = 1$, also ist

$$\int \frac{1}{a + bx + cx^2} dx = \frac{1}{c} \int \frac{1}{\frac{4ac - b^2}{4c^2} + z^2} dz.$$

Auf das letzte Integral wende man §. 357 3) an, und es entsteht

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} z \frac{2c}{\sqrt{4ac - b^2}}$$

und wenn man für z noch den Werth $x + \frac{b}{2c}$ substituirt, ergiebt sich der zweite Ausdruck für das gesuchte Integral.

Der zweite Ausdruck läßt sich auch aus dem ersten bilden vermittelst der Formel §. 177 6). Es entsteht

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2cx+b}$$

und diese Form genügt bereits insofern, als sie reell ist, wenn die Wurzeln in der ersten imaginair ausfallen. Um genau auf den zweiten Ausdruck zu kommen, werde beachtet, daß nach §. 346 $\partial\operatorname{arc\,cotg}\phi_x = -\partial\operatorname{arc\,tg}\phi_x$ ist; daher darf für den erhaltenen Ausdruck gesetzt werden

$$\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2cx+b}$$

und das ist

$$\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.\quad [§. 175.]$$

Für den Fall endlich, daß $b^2=4ac$, ist

$$a+bx+cx^2 = a+2x\sqrt{ac}+cx^2 = (\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2$$

und $$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\int\frac{dx}{(\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}+x\sqrt{c}}\quad [§. 357\ 2).]$$

$$=-\frac{1}{\frac{1}{2}b+cx}.$$

Die Integrale unter 4) lassen sich auch in nachstehender Weise aus den Formeln §. 357 3) und 5 erlangen.

Nach der angezogenen Formel 3) ist

$$\int\frac{dx}{\alpha+\beta x^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\operatorname{arc\,tg}x\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

oder, wenn man $\gamma+x$ statt x setzt, und weil $d(\gamma+x)=dx$ bleibt

$$\int\frac{dx}{\alpha+\beta(\gamma+x)^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\operatorname{arc\,tg}(\gamma+x)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

oder

$$\phi)\quad \int \frac{dx}{\alpha + \beta\gamma^2 + 2\beta\gamma x + \beta x^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{arc\,tg} (\gamma + x)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Man setze nun

$$\alpha + \beta\gamma^2 = a$$
$$2\beta\gamma = b$$
$$\beta = c$$

und es folgt

$$\gamma = \frac{b}{2c}$$
$$\alpha = a - \frac{b^2}{4c} = \frac{4ac - b^2}{4c}$$
$$\sqrt{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4ac - b^2}$$
$$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{2c}{\sqrt{4ac - b^2}}$$
$$\gamma + x = \frac{2cx + b}{2c}$$

und wenn man diese Werthe in ϕ) substituirt, entsteht

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

Nach der Formel §. 357 5) ist

$$\int \frac{dx}{-\alpha + \beta x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{x\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - 1}{x\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + 1}$$

oder $\gamma + x$ statt x eingeführt:

$$\int \frac{dx}{-\alpha + \beta\gamma^2 + 2\beta\gamma x + \beta x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{(\gamma + x)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - 1}{(\gamma + x)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + 1}.$$

Man setze

$$-\alpha + \beta\gamma^2 = a$$
$$2\beta\gamma = b$$
$$\beta = c$$

und es folgt

$$\gamma = \frac{b}{2c}$$

$$\alpha = \frac{b^2}{4c} - a = \frac{b^2 - 4ac}{4c}$$

$$\sqrt{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{2c}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$\gamma + x = \frac{2cx + b}{2c}$$

also wenn man substituirt

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{2cx + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cx + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

5) $$\int \frac{x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c}\left[\ln(a+bx+cx^2) - b\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}\right].$$

Es ist

$$\partial(a + bx + cx^2) = b + 2cx.$$

Deshalb setzen wir

$$\int \frac{x}{a + bx + cx^2} dx = \frac{1}{2c}\int \frac{b + 2cx - b}{a + bx + cx^2} dx$$

$$= \frac{1}{2c}\int \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2} dx - \frac{b}{2c}\int \frac{1}{a + bx + cx^2} dx$$

und wenn wir auf das erstere Integral §. 349 7) anwenden, entsteht der obere Ausdruck.

6) $$\int \frac{x}{(a + bx)^3} dx = - \frac{a + 2bx}{2b^2(a+bx)^2}.$$

Es zerlegt sich

$$\frac{x}{(a + bx)^3} = \frac{1}{b}\left[\frac{-a}{(a + bx)^3} + \frac{1}{(a + bx)^2}\right].$$

7) $$\int \frac{x^2}{(a + bx)^3} dx = \frac{3a^2 + 4abx}{2b^3(a + bx)^2} + \frac{1}{b^3}\ln(a + bx).$$

Es zerlegt sich

$$\frac{x^2}{(a + bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a^2}{(a + bx)^3} - \frac{2a}{(a + bx)^2} + \frac{1}{a + bx}\right].$$

8) $$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)} = \frac{1}{(a-b)(x+a)} + \frac{1}{(a-b)^2}\ln\frac{x+b}{x+a}.$$

$$9)\ \int \frac{x}{(x+a)^2(x+b)}dx = \frac{-a}{(a-b)(x+a)} - \frac{b}{(a-b)^2}\ln\frac{x+b}{x+a}.$$

$$10)\ \int \frac{x^2}{(x+a)^2(x+b)}dx = \frac{a^2}{(a-b)(x+a)} + \frac{b^2}{(a-b)^2}\ln(x+b) + \frac{a^2-2ab}{(a-b)^2}\ln(x+a).$$

$$11)\ \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{1}{(b-a)(c-a)}\ln(x+a) + \frac{1}{(a-b)(c-b)}\ln(x+b) + \frac{1}{(a-c)(b-c)}\ln(x+c).$$

$$12)\ \int \frac{x}{(x+a)(x+b)(x+c)}dx = -\frac{a}{(b-a)(b-c)}\ln(x+a) - \frac{b}{(a-b)(c-b)}\ln(x+b) - \frac{c}{(a-c)(b-c)}\ln(x+c).$$

$$13)\ \int \frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}dx = \frac{a^2}{(b-a)(c-a)}\ln(x+a) + \frac{b^2}{(a-b)(c-b)}\ln(x+b) + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)}\ln(x+c).$$

$$14)\ \int \frac{1}{(x+q)(a+bx+x^2)}dx = \frac{1}{a-bq+q^2}\left[\ln\frac{x+q}{\sqrt{a+bx+x^2}} + \left(q-\frac{b}{2}\right)\int\frac{1}{a+bx+x^2}\right].$$

Man setze

$$\frac{1}{(x+q)(a+bx+x^2)} = \frac{\alpha}{x+q} + \frac{\beta}{a+bx+x^2}.$$

Nach §. 358 ist $\alpha = \frac{1}{a-bq+q^2}$.

Diesen Werth substituire man, und beseitige die Nenner; das liefert

$$a - bq + q^2 = a + bx + x^2 + \beta(a-bq+q^2)(x+q)$$

also
$$\beta = \frac{q-b-x}{a-bq+q^2}.$$

Hiernach ist

$$\frac{1}{(x+q)(a+bx+x^2)} = \frac{1}{a-bq+q^2}\left[\frac{1}{x+q} + \frac{q-b-x}{a+bx+x^2}\right]$$

$$\int\frac{dx}{(x+q)(a+bx+x^2)} = \frac{1}{a-bq+q^2}\left[\int\frac{dx}{x+q}\right.$$

$$\left.+(q-b)\int\frac{dx}{a+bx+x^2} - \int\frac{x}{a+bx+x^2}dx\right].$$

Nach 5) ist

$$\int\frac{x}{a+bx+x^2}dx = \tfrac{1}{2}\ln(a+bx+x^2)$$

$$-\frac{b}{2}\int\frac{dx}{a+bx+x^2}$$

diesen Werth substituire man, und es ergiebt sich das obere Resultat.

15) $$\int\frac{x}{(x+q)(a+bx+x^2)}dx = \frac{1}{a-bq+q^2}\left[q\ln\frac{\sqrt{a+bx+x^2}}{x+q}\right.$$

$$\left.+(a-\tfrac{1}{2}bq)\int\frac{dx}{a+bx+x^2}\right].$$

Es zerlegt sich

$$\frac{x}{(x+q)(a+bx+x^2)} = \frac{1}{a-bq+q^2}\left[\frac{-q}{x+q} + \frac{a+qx}{a+bx+x^2}\right]$$

und dann ist

$$\int\frac{x}{(x+q)(a+bx+x^2)}dx = \frac{1}{a-bq+q^2}\left[-q\int\frac{dx}{x+q}\right.$$

$$\left.+a\int\frac{dx}{a+bx+x^2} + q\int\frac{x}{a+bx+x^2}\right]$$

und setzt man für das letzte Integral den Werth nach 5), so ergiebt sich der obere Ausdruck.

16) $$\int\frac{x^2}{(x+q)(a+bx+x^2)}dx = \frac{1}{a-bq+q^2}\left[q^2\ln(x+q)\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}(a-bq)\ln(a+bx+x^2) + (\tfrac{1}{2}b^2q-\tfrac{1}{2}ab-aq)\int\frac{dx}{a+bx+x^2}\right].$$

Es zerlegt sich

$$\frac{x^2}{(x+q)(a+bx+x^2)} = \frac{1}{a-bq+q^2}\left[\frac{q^2}{x+q} + \frac{-aq+(a-bq)x}{a+bx+x^2}\right].$$

Die Formeln 14), 15), 16) sind unbrauchbar, sobald

$$a - bq + q^2 = 0$$

ist. Dann ist aber

$$a + bx + x^2 = bq - q^2 + bx + x^2 = (q + x)(x - q + b)$$

und

$$(x + q)(a + bx + x^2) = (x + q)^2(x + b - q)$$

und die Integrale ergeben sich nach 8), 9) und 10).

17) $$\int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk^2}\left[\ln \frac{x+k}{\sqrt{x^2-kx+k^2}} + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right]$$

während $k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ ist.

Man setze

$$\frac{1}{a + bx^3} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} + x^3} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{k^3 + x^3},$$

so daß also

$$k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

ist. Nun zerlegt sich

$$\frac{1}{k^3 + x^3} = \frac{1}{3k^2}\left[\frac{1}{k + x} + \frac{2k - x}{k^2 - kx + x^2}\right]$$

und es ist

$$\int \frac{dx}{a + bx^3} = \frac{1}{3bk^2}\left[\int \frac{1}{k + x} + 2k\int \frac{1}{k^2 - kx + x^2} - \int \frac{x}{k^2 - kx + x^2}\right].$$

Auf das letzte Integral wende man die Formel 5) an, und es ergiebt sich

$$\int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk^2}\left[\ln \frac{x + k}{\sqrt{x^2 - kx + k^2}} + \tfrac{3}{2}k\int \frac{1}{k^2 - kx + x^2}\right]$$

und hieraus entsteht der obere Ausdruck, wenn man das jetzt noch vorhandene Integral nach 4) bestimmt.

$$18)\quad \int \frac{x}{a+bx^3}dx = -\frac{1}{3bk}\left[\ln \frac{x-k}{\sqrt{x^2-kx+k^2}}\right.$$
$$\left. -\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right]$$

während $k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ ist.

Man setze, wie in der vorigen Nummer

$$\frac{x}{a+bx^3} = \frac{1}{b}\cdot\frac{x}{k^3+x^3}$$

und zerlege

$$\frac{x}{k^3+x^3} = -\frac{1}{3k}\left[\frac{1}{k+x} - \frac{k+x}{k^2-kx+x^2}\right].$$

Dann folgt

$$\int\frac{x}{a+bx^3}dx = -\frac{1}{3bk}\left[\int\frac{dx}{k+x} - k\int\frac{dx}{k^2-kx+x^2}\right.$$
$$\left.-\int\frac{x}{k^2-kx+x^2}dx\right].$$

Vermittelst 5) geht dies über in

$$\int\frac{x}{a+bx^3}dx = -\frac{1}{3bk}\left[\ln\frac{x-k}{\sqrt{k^2-kx+x^2}}\right.$$
$$\left.-\tfrac{3}{2}k\int\frac{dx}{k^2-kx+x^2}\right]$$

auf das letzte Integral wende man die Formel 4) an, und es ergiebt sich der obere Ausdruck.

$$19)\quad \int\frac{x^2}{a+bx^3}dx = \frac{1}{3b}\ln(a+bx^3).$$

Es ist nämlich

$$\partial(a+bx^3) = 3bx^2,$$

daher

$$\int\frac{x^2}{a+bx^3}dx = \frac{1}{3b}\int\frac{\partial(a+bx^3)}{a+bx^3}dx = \frac{1}{3b}\ln(a+bx^3)$$

nach §. 349 7).

Beispiele.

1) $\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}.$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x.$

3) $\int \frac{x^2}{x-1} dx = x + \frac{1}{2}x^2 + \ln(x-1).$

4) $\int \left(\frac{(x-3)^2}{x^5} + \frac{x}{1+x^2}\right) dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{9}{4x^4}$
$+ \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

5) $\int \left(\frac{50x}{25x^2-9} + \frac{1+2x}{1-x-x^2}\right) dx = \ln \frac{9-25x^2}{1-x-x^2}.$

6) $\int \frac{6x}{1-4x+3x^2} dx = \ln \frac{(x-1)^3}{3x-1}.$

7) $\int \frac{7}{2(1-2x+x^2)} dx = \frac{7}{2(1-x)}.$

8) $\int \frac{1+4x}{5+6x+2x^2} dx = \ln(5+6x+2x^2) - 5 \operatorname{arc\,tg}(2x+3).$

9) $\int \frac{3}{(5x+6)(3+8x+5x^2)} dx = \frac{1}{2}\ln \frac{(3+5x)(6+5x)^2}{(1+x)^3}.$

10) $\int \frac{x}{(x-3)(3x-2)^2} dx = \frac{2}{21(3x-2)} + \frac{3}{49}\ln \frac{x-3}{3x-2}.$

11) $\int \frac{1+2x}{1+2x+3x^2} dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+2x+3x^2)$
$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x+1}{\sqrt{2}}\Big].$

12) $\int \frac{3x}{(1-x)(1-x-3x^2)} dx = \frac{1}{2}\Big[\ln \frac{(x-1)^2}{1-x-3x^2}$
$+ \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \frac{6x+1+\sqrt{13}}{6x+1-\sqrt{13}}\Big].$

13) $\int \frac{1}{x(1+2x+x^2)} dx = \frac{1}{1+x} + \ln \frac{x}{1+x}.$

14) $\int \frac{2-x^2}{(x-1)(x^2-4x+5)}dx = \frac{1}{2}[\ln(x-1) - \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)$
$- 5\,\mathrm{arc\,tg}(x-2)].$

15) $\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \int \frac{dx}{(a^2+x^2+ax\sqrt{2})(a^2+x^2-ax\sqrt{2})}$

$$= \frac{1}{2a^2}\int\left[\frac{1+\frac{1}{a\sqrt{2}}x}{a^2+ax\sqrt{2}+x^2} + \frac{1-\frac{1}{a\sqrt{2}}x}{a^2-ax\sqrt{2}+x^2}\right]$$

u. s. w.

III. Integration einfacher irrationaler Funktionen.

§. 360.

Die Hilfsmittel, welche sich für das Integriren irrationaler Funktionen zunächst darbieten, beschränken sich auf die Formeln

$$1)\quad \int f_x{}^n \partial f_x dx = \frac{f_x{}^{n+1}}{n+1}.$$

$$2)\quad \int \frac{\partial f_x}{\sqrt{1-f_x{}^2}}dx = \arcsin f_x.$$

Beide reichen nicht weit aus.

Ein ziemlich fruchtbares Hilfsmittel für das Integriren irrationaler Funktionen besteht in dem Rationalmachen derselben durch zweckmäßige Substitutionen. Allgemeine Vorschriften dafür lassen sich nicht aufstellen. Man wird die Substitutionsmethode und andere Hilfsmittel in dem folgenden Paragraphen und in den nächsten Abtheilungen aus der Anwendung kennen lernen.

§. 361.

$$1)\quad \int (a+bx)^{\frac{n}{q}}dx = \frac{q(a+bx)^{\frac{n+q}{q}}}{b(n+q)}.$$

Denn es ist $\int (a+bx)^{\frac{n}{q}} = \frac{1}{b}\int (a+bx)^{\frac{n}{q}}\partial(a+bx)$ und

hierauf ist die Formel unter 1) im vorigen Paragraphen anzuwenden.

$$2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a + bx}.$$

Es ist das gegebene Integral gleich $\int (a + bx)^{-\frac{1}{2}}$ und dies ergiebt sich nach 1).

$$3) \quad \int \frac{x}{\sqrt{a + bx}} dx = [\tfrac{1}{3}(a + bx) - a]\frac{2\sqrt{a + bx}}{b^2}.$$

Man setze

$$\sqrt{a + bx} = z$$

so ist

$$x = \frac{z^2 - a}{b}$$

$$\partial x_z = \frac{2z}{b}.$$

Betrachtet man in dem gegebenen Integral x als Funktion von z, dann das Integral selbst als Funktion von z, und will man nach z integriren, so ist nach §. 351 für das gegebene Integral zu setzen.

$$\int \frac{x \partial x_z}{\sqrt{a + bx}} dz$$

und wenn man hierin die Werthe setzt, geht das Integral über in

$$\frac{2}{b^2}\int (z^2 - a)$$

welches gleich ist

$$\frac{2}{b^2}(\tfrac{1}{3}z^3 - az) = (\tfrac{1}{3}z^2 - a)\frac{2}{b^2}z.$$

In dem letzten Ausdruck setze man für z den Werth, und es entsteht das obere Resultat.

$$4) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}}$$

und

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-a + bx}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{-1 + \frac{b}{a}x}.$$

Man substituire, wie in 3) und es entsteht

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = 2\int \frac{dz}{z^2 - a} = 2\int \frac{dz}{(z-\sqrt{a})(z+\sqrt{a})}.$$

Auf das letzte Integral wende man §. 359 2) an, dadurch geht es über in

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{z - \sqrt{a}}{z + \sqrt{a}}$$

$z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$

und dies ist der erstere von den oberen Ausdrücken, wenn für z der Werth gesetzt wird.

Ist a negativ, so entsteht zunächst

$$\int \frac{1}{x\sqrt{-a+bx}}\,dx = 2\int \frac{dz}{a + z^2} = \frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} z \sqrt{\frac{1}{a}}$$

[§. 357 3)] und dies giebt für $z = \sqrt{-a+bx}$ den zweiten Ausdruck.

5) $\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{15b^2}(3b - 2a)(a+bx)^{\frac{3}{2}}.$

Man setze

$$\sqrt{a+bx} = z$$

so ist

$$x = \frac{z^2 - a}{b}$$

$$\partial x_z = \frac{2z}{b}$$

und

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{b^2}\int (z^4 - az^2)\,dz = \frac{2}{b^2}\left(\tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{3}az^3\right)$$

und wenn man für z den Werth setzt, entsteht der obere Ausdruck.

6) $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}\ln \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}}$

$$\int \frac{\sqrt{-a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{-a+bx} - 2\sqrt{a}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{-1 + \frac{b}{a}x}.$$

Es ist

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = \int \frac{a+bx}{x\sqrt{a+bx}}\,dx$$

$$= b\int \frac{1}{\sqrt{a+bx}}\,dx + a\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

Die letzten Integrale bestimme man nach 2) und 4) und es entstehen die oberen Resultate.

$$7) \quad \int \frac{1}{\sqrt{a - bx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin x \sqrt{\frac{b}{a}}$$

und

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + bx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln (x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}).$$

Der erste Ausdruck ergiebt sich vermittelst §. 360 2). Es ist nämlich

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - bx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \int \frac{\partial\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{1 - \left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin x \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Ist b negativ, so entsteht hieraus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin x \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

oder, wenn man §. 177 1) anwendet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left(\sqrt{1 + \frac{bx^2}{a}} + x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} [\ln (\sqrt{a + bx^2} + x\sqrt{b}) - \ln\sqrt{a}].$$

Das constante Glied darf gestrichen werden; dann bleibt der zweite Ausdruck.

Der zweite Ausdruck findet sich auch leicht im Wege der Substitution.

Man setze.

$$\alpha) \quad \sqrt{a + bx^2} = z - x\sqrt{b}$$

und es folgt

$$a = z^2 - 2zx\sqrt{b}$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{b}} \cdot \frac{z^2 - a}{z}$$

$$dx = \partial x_z dz = \frac{1}{2\sqrt{b}} \cdot \frac{z^2 + a}{z^2} dz$$

$$\sqrt{a + bx^2} = z - x\sqrt{b} = \frac{z^2 + a}{2z}$$

also, wenn man substituirt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln z$$

oder wenn man statt z den Werth aus α) setzt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}).$$

8) $$\int \sqrt{a + bx^2} dx = \frac{x\sqrt{a + bx^2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \ln(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}$$

$$\int \sqrt{a - bx^2} dx = \frac{x\sqrt{a - bx^2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Es ist

$$\int \sqrt{a + bx^2} dx = \int \sqrt{a + bx^2} \partial x dx$$

und nach §. 349 3)

$$\int \sqrt{a + bx^2} \partial x dx = x\sqrt{a + bx^2} - \int x \partial \sqrt{a + bx^2} dx$$

$$= x\sqrt{a + bx^2} - \int \frac{bx^2}{\sqrt{a + bx^2}} dx$$

$$= x\sqrt{a + bx^2} - \int \frac{a + bx^2 - a}{\sqrt{a + bx^2}} dx$$

oder

$$\int \sqrt{a + bx^2} dx = x\sqrt{a + bx^2} - \int \sqrt{a + bx^2} dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}.$$

Hieraus folgt

α) $$\int \sqrt{a + bx^2} dx = \frac{x\sqrt{a + bx^2}}{2} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}.$$

Das letzte Integral bestimme man nach 7) und es ergeben sich die oberen Resultate.

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2c - b}{2\sqrt{c}\sqrt{a + bx - cx^2}}.$$

Das vorgelegte Integral läßt sich auf 5) zurückführen, indem man den Radicand, wie eine höhere Gleichung, reducirt. Zu dem Ende setze man

$$x = z - \frac{b}{2c}$$

und es entsteht, da diesmal $\partial x_z = 1$ ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + bx + cx^2}} dz = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4c} + cz^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(z\sqrt{c} + \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4c} + cz^2}\right) \quad 7).$$

Setzt man hierin statt z den Werth $x + \frac{b}{2c}$ und multiplicirt den Ausdruck in der Klammer mit dem constanten $2\sqrt{c}$ (§. 347), so ergiebt sich der erste Ausdruck.

Den zweiten Ausdruck zu erhalten, setze man

$$x = z + \frac{b}{2c}$$

und es entsteht

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + bx - cx^2}} dz = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{4ac + b^2}{4c} - cz^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cz}{\sqrt{4ac + b^2}} \quad [7)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{4ac + b^2}}.$$

Nun ist

$$\arcsin y = \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

und wenn man diese Formel auf den letzteren Ausdruck anwendet, entsteht das zweite Resultat.

Im Wege der Substitution ist die Integration folgende: Man setze

$$\alpha) \quad \sqrt{a + bx + cx^2} = z - x\sqrt{c}$$

und es folgt

$$a + bx = z^2 - 2zx\sqrt{c}$$

$$x = \frac{z^2 - a}{b + 2z\sqrt{c}}$$

$$dx = \partial x_z dz = 2\frac{(a + z^2)\sqrt{c} + bz}{(b + 2z\sqrt{c})^2}dz$$

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = z - x\sqrt{c}$$

$$= \frac{(a + z^2)\sqrt{c} + bz}{b + 2z\sqrt{c}}$$

und es entsteht, wenn man substituirt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = 2\int\frac{dz}{b + 2z\sqrt{c}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\ln(b + 2z\sqrt{c})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\ln(b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2})$$

indem man zuletzt für z den Werth aus α) setzt.

Man setze andererseits

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = zx - \sqrt{a}$$

und es folgt

$$b - cx = z^2x - 2z\sqrt{a}$$

$$x = \frac{b + 2z\sqrt{a}}{c + z^2}$$

$$dx = \partial x_z dz = 2\frac{(c - z)^2\sqrt{a} - bz}{(c + z^2)^2}$$

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = zx - \sqrt{a}$$

$$= \frac{bz - (c - z^2)\sqrt{a}}{c + z^2}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -2\int\frac{dz}{c + z^2}$$

$$= -\frac{2}{c}\int\frac{dz}{1 + \left(\frac{z}{\sqrt{c}}\right)^2}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{\partial \frac{z}{\sqrt{c}}}{1 + \left(\frac{z}{\sqrt{c}}\right)^2} dz$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{c}}$$

oder den Werth für z aus β) setzend

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + bx - cx^2}}{x\sqrt{c}}.$$

Noch ein anderer Weg ist der:

Man hat nach 7)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln(x\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha + \beta x^2})$$

also

$$\int \frac{d(\gamma + x)}{\sqrt{\alpha + \beta(\gamma + x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln[(\gamma + x)\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha + \beta(\gamma + x)^2}]$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta\gamma^2 + 2\beta\gamma x + \beta x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln[(\gamma + x)\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha + \beta\gamma^2 + 2\beta\gamma x + \beta x^2}].$$

Nun setze man

$$\alpha + \beta\gamma^2 = a$$
$$2\beta\gamma = b$$
$$\beta = c$$

und es folgt $\gamma = \frac{b}{2c}$

und, wenn man substituirt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left[\left(\frac{b}{2c} + x\right)\sqrt{c} + \sqrt{a + bx + cx^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}}{2\sqrt{c}}$$

oder, die überflüssige Constante streichend

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}).$$

Andererseits ist nach 7)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha - \beta x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{arc Sin} \, x \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

also

$$\int \frac{d(\gamma + x)}{\sqrt{\alpha - \beta(\gamma + x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{arc Sin} \, (\gamma + x) \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha - \beta\gamma^2 - 2\beta\gamma x - \beta x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{arc Sin} \, (\gamma + x) \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Nun sei

$$\alpha - \beta\gamma^2 = a$$
$$-2\beta\gamma = b$$
$$-\beta = -c$$

und es folgt

$$\gamma = -\frac{b}{2c}$$
$$\alpha = \frac{4ac + b^2}{2c}$$

und, wenn man substituirt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc Sin} \frac{2cx - b}{\sqrt{4ac + b^2}}.$$

10) $$\int \frac{x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} dx = \frac{1}{c} \sqrt{a + bx + cx^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Es ist

$$\partial(a + bx + cx^2) = b + 2cx.$$

Nun setzen wir

$$\frac{x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{2c} \frac{b + 2cx - b}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$
$$= \frac{1}{2c}(a + bx + cx^2)^{-\frac{1}{2}} \partial(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c} \frac{1}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

und es folgt

$$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} dx = \frac{1}{c} \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

11) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}} dx = \frac{2cx-3b}{4c^2}\sqrt{a+bx+cx^2}$$
$$+\left(\frac{3b^2}{8c^2}-\frac{a}{2c}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Es ist

$$\partial x\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{a+\frac{3}{2}bx+2cx^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

und wenn man rechts die einzelnen Summanden dividirt, darauf integrirt und 10) anwendet, ergiebt sich die obere Gleichung.

12) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{2a+bx-2\sqrt{a}\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{-2a+bx}{2\sqrt{a}\sqrt{-a+bx+cx^2}}.$$

Man setze

$$x = \frac{1}{z}$$

also

$$\partial x_z = -\frac{1}{z^2}$$

und es ist

$$\int\frac{\partial x_z}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}dz = -\int\frac{dz}{\sqrt{az^2+bz+c}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(b+2az+2\sqrt{a}\sqrt{az^2+bz+c}) \quad [9)]$$

oder, für z den Werth $\frac{1}{x}$ gesetzt

$$= -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{bx+2a+2\sqrt{a}\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{x}{bx+2a+2\sqrt{a}\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

und wenn man Zähler und Nenner des letzten Quotienten mit $bx+2a-2\sqrt{a}\sqrt{a+bx+cx^2}$ multiplicirt, und die überflüssige Constante streicht, entsteht der erste Ausdruck.

Ist a negativ, so entsteht zunächst

$$\int \frac{\partial x_z}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}}dz = -\int \frac{dz}{\sqrt{-az^2+bz+c}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2az-b}{2\sqrt{a}\sqrt{-az^2+bz+c}} \quad [9)]$$

und wenn man für z den Werth $\frac{1}{x}$ setzt, geht dies über in

$$-\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2a-bx}{2\sqrt{a}\sqrt{-a+bx+cx^2}}$$

oder weil

$$\partial \operatorname{arc\,tg} f_x = -\partial \operatorname{arc\,tg}(-f_x)$$

in

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{-2a+bx}{2\sqrt{a}\sqrt{-a+bx+cx^2}}.$$

Beide Resultate werden unbrauchbar, wenn a Null ist. Für diesen Fall ist

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{bx+cx^2}} = -\frac{2\sqrt{bx+cx^2}}{bx}.$$

Man setze nämlich

$$\sqrt{bx+cx^2} = xz$$

und es folgt

$$x = \frac{b}{z^2-c}$$

$$\partial x_z = -\frac{2bz}{(z^2-c)^2}$$

$$\int \frac{\partial x_z}{x\sqrt{bx+cx^2}}dz = -\frac{2}{b}\int dz = -\frac{2}{b}z$$

und das ist der obere Ausdruck, wenn man für z den Werth setzt.

$$13) \int \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}dx = \sqrt{a+bx+cx^2}$$

$$+ a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Es sei $a+bx+cx^2$ durch X bezeichnet. Dann ist

$$\int \frac{\sqrt{X}}{x}dx = \int \frac{X}{x\sqrt{X}}dx = \int \frac{a+bx+cx^2}{x\sqrt{X}}dx$$

$$= a\int\frac{1}{x\sqrt{X}}dx + b\int\frac{1}{\sqrt{X}}dx + c\int\frac{x}{\sqrt{X}}dx$$

$$= a\int\frac{1}{x\sqrt{X}}dx + b\int\frac{1}{\sqrt{X}}dx + \sqrt{X} - \frac{b}{2}\int\frac{1}{\sqrt{X}}dx \quad [10)]$$

$$= \sqrt{X} + a\int\frac{1}{x\sqrt{X}}dx + \frac{b}{2}\int\frac{1}{\sqrt{X}}dx$$

und das ist der obere Ausdruck.

$$14)\ \int\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx = \frac{(b + 2cx)\sqrt{a + bx + cx^2}}{4c} + \frac{4ac - b^2}{8c}\int\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Man setze

$$x = z - \frac{b}{2c}$$

so ist $\partial x_z = 1$ und

$$\int\sqrt{a + bx + cx^2}\,dz = \int\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4c} + cz^2}$$

und wenn man auf das letzte Integral die Formel α) unter 8) anwendet, und darauf für z den Werth setzt, entsteht das obere Resultat.

Oder man setze

$$\int\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx = \int\frac{a + bx + cx^2}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

dividire jeden einzelnen Summand und wende die Formeln 8) und 9) an.

$$15)\ \int x\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx = \frac{(a + bx + cx^2)^{\frac{3}{2}}}{3c} - \frac{b}{2c}\int\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx.$$

Es ist

$$\partial(a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

also
$$x = \frac{\partial(a + bx + cx^2) - b}{2c}$$

deshalb

$$\int x\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx$$

$$= \int \frac{\partial(a + bx + cx^2) - b}{2c}\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2c}\int (a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}}\,\partial(a + bx + cx^2)$$

$$- \frac{b}{2c}\int\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx$$

$$= \frac{(a + bx + cx^2)^{\frac{3}{2}}}{3c} - \frac{b}{2c}\int\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx.$$

Beispiele.

1) $\int \sqrt[n]{x^q}\,dx = \int x^{\frac{q}{n}} = \dfrac{x^{\frac{q}{n}+1}}{\dfrac{q}{n}+1} = \dfrac{n}{n+q}x\sqrt[n]{x^q}.$

2) $\int x\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}.$

3) $\int x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\,dx = \frac{6}{17}x^2\sqrt{x}\sqrt[3]{x}.$

4) $\int x\sqrt[3]{x^2}\,dx = \frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}.$

5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{x}}.$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}\,dx = -\frac{6}{5\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}.$

7) $\int \sqrt{3x + 2}\,dx = \frac{2}{9}(3x + 2)\sqrt{3x + 2}.$

8) $\int \frac{4x(1 + ax^2)}{3\sqrt[3]{(2x^2 + ax^4)^2}}\,dx = \sqrt[3]{2x^2 + ax^4}.$

9) $\int \frac{3x(1 - 6x)}{\sqrt[3]{(x^2 - 4x^3)^2}}\,dx = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2(1 - 4x)}.$

10) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}}\,dx = 2\ln(1 + \sqrt{x}).$

Man setze $\sqrt{x} = z$.

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}).$$

Man setze $x = z^6$.

12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{(x+1)\sqrt{x+1}-(x-1)\sqrt{x-1}}{3}.$$

Man multiplicire Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}.$$

13) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x}\sqrt{3+x}} = \ln(5+2x+2\sqrt{2+x}\sqrt{3+x}).$$

14) $$\int \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{3+x}}dx = \sqrt{2+x}\sqrt{3+x}$$
$$-\tfrac{1}{2}\ln(5+2x+2\sqrt{2+x}\sqrt{3+x}).$$

15) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})} = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} + \ln\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}.$$

Man setze $\sqrt{1+x} = z$.

16) $$\int \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}}{6\sqrt{(1+x)^3}}dx = \sqrt[6]{1+x}.$$

Man setze $1+x = z^6$.

17) $$\int \frac{x-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}dx = \frac{2(x-2)\sqrt{1+x}}{3}$$
$$+\frac{3(x-3)\sqrt[3]{1+x}}{4} + \frac{6(x-6)\sqrt[6]{1+x}}{7}$$
$$-6\ln(\sqrt[6]{1+x}-1).$$

Man setze $1+x = z^6$.

Nachtrag

zu den Integralen, betreffend den Ausdruck $a + bx + cx^2$.

§. 362.

I.

Wir setzen

$$1)\quad y = a + bx + cx^2$$

und es ist

$$2)\quad \partial y = b + 2cx$$

$$3)\quad \partial^2 y = 2c.$$

Hieraus folgt

$$2y\partial^2 y = 4ac + 4bcx + 4c^2x^2$$

$$\partial y^2 = b^2 + 4bcx + 4c^2x^2$$

also, und wenn wir der Kürze wegen

$$4ac - b^2 = p$$

setzen.

$$4)\quad 2y\partial^2 y - \partial y^2 = 4ac - b^2 = p.$$

II.

Aus 4) ergiebt sich nun

$$y = \frac{p + \partial y^2}{2\partial^2 y}.$$

$$5)\quad \frac{1}{y} = \frac{2\partial^2 y}{p + \partial y^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{p}} \frac{\frac{1}{\sqrt{p}}\partial^2 y}{1 + \left(\frac{\partial y}{\sqrt{p}}\right)^2}$$

also

$$\int \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{p}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\partial y}{\sqrt{p}}$$

d. h.

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b + 2cx}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

Das ist die eine der Formeln unter 4).

III.

Es ist unmittelbar aus 5)

$$\frac{1}{y} = \frac{2\partial^2 y}{(\partial y - \sqrt{-p})(\partial y + \sqrt{-p})}$$

also, in Partialbrüche zerlegt

$$\frac{1}{y} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\sqrt{-p}}}{\partial y - \sqrt{-p}} - \frac{\frac{\partial^2 y}{\sqrt{-p}}}{\partial y + \sqrt{-p}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-p}}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial y - \sqrt{-p}} - \frac{\partial^2 y}{\partial y + \sqrt{-p}}\right]$$

folglich

$$\int \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{-p}} \ln \frac{\partial y - \sqrt{-p}}{\partial y + \sqrt{-p}}$$

d. h.

$$\int \frac{1}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{b + 2cx - \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + 2cx + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Das ist die andere Formel unter 4).

IV.

Ist

$$4ac - b^2 = 2y\partial^2 y - \partial y^2 = 0$$

so folgt $\frac{1}{y} = 2\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 2\partial y^{-2}\partial^2 y$

also $\int \frac{1}{y} = -\frac{2}{\partial y}$

oder $\int \frac{1}{a + bx + cx^2} = -\frac{2}{b + 2cx}.$

V.

Aus 4) folgt, indem man 3) beachtet

$$(2\sqrt{c}\sqrt{y} + \partial y)(2\sqrt{c}\sqrt{y} - \partial y) = 4ac - b^2.$$

Die Faktoren zur Linken bieten mancherlei Beziehungen, die mitzutheilen hier nicht der Ort ist. Inzwischen bilden wir

$$\partial(2\sqrt{c}\sqrt{y} + \partial y) = \sqrt{c}\, y^{-\frac{1}{2}}\partial y + \partial^2 y.$$

Dies liefert 3) beachtend

$$\partial(2\sqrt{c}\sqrt{y} + \partial y) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{y}}(2\sqrt{c}\sqrt{y} + \partial y).$$

Daraus ist

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\partial(2\sqrt{c}\sqrt{y} + \partial y)}{2\sqrt{c}\sqrt{y} + \partial y}$$

also

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(\partial y + 2\sqrt{c}\sqrt{y}$$

oder

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}).$$

Das ist die Formel 9).

VI.

Es ist

$$\partial \frac{\partial y}{\sqrt{y}} = \frac{\partial^2 y\sqrt{y} - \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\partial y^2}{y}$$

$$= \frac{2y\partial^2 y - \partial y^2}{2y\sqrt{y}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2y\partial \dfrac{\partial y}{\sqrt{y}}}{2y\partial^2 y - \partial y^2}$$

oder, wenn wir 3) beachten, und c als negativ voraussetzen

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{\partial \dfrac{\partial y}{\sqrt{y}}}{-2c - \dfrac{\partial y^2}{2y}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\partial \dfrac{\partial y}{2\sqrt{c}\sqrt{y}}}{1 + \left(\dfrac{\partial y}{2\sqrt{c}\sqrt{y}}\right)^2}.$$

Folglich ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg} \frac{\partial y}{2\sqrt{c}\sqrt{y}}$$

d. h.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg} \frac{b - 2cx}{2\sqrt{c}\sqrt{a + bx - cx^2}}.$$

Das ist die andere Formel unter 9).

VII.

Es ist

$$\partial(\partial y \sqrt{y}) = \sqrt{y}\,\partial^2 y + \tfrac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \partial y^2$$

$$= \frac{\partial y^2 + 2y\partial^2 y}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{4y\partial^2 y - (2y\partial^2 y - \partial y^2)}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{8cy - (4ac - b^2)}{2\sqrt{y}}$$

$$= 4c\sqrt{y} - \frac{4ac - b^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

und daraus folgt

$$\int \sqrt{y} = \frac{1}{4c}\left[\partial y \sqrt{y} + \frac{4ac - b^2}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}}\right]$$

oder

$$\int \sqrt{a + bx + cx^2}\,dx = \frac{1}{4c}\left[(b + 2cx)\sqrt{a + bc + cx^2} \right.$$

$$\left. + \frac{4ac - b^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}\right].$$

Das ist die Formel 14).

IV. Reductions-Formeln.

§. 363.

Es ist, unter X den Ausdruck $a + bx^n$ verstanden

I) $$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1}X^p}{m + 1} - \frac{npb}{m + 1} \int x^{m+n} X^{p-1} dx.$$

$$\text{II)}\quad \int x^m X^p dx = \frac{x^{m-n+1}X^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}X^{p+1}dx.$$

$$\text{III)}\quad \int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1}X^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{(m+n+np+1)b}{a(m+1)}\int x^{m+n}X^p dx.$$

$$\text{IV)}\quad \int x^m X^p dx = \frac{x^{m-n+1}X^{p+1}}{b(m+np+1)} - \frac{(m-n+1)a}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}X^p dx.$$

$$\text{V)}\quad \int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1}X^p}{m+np+1} - \frac{npa}{m+np+1}\int x^m X^{p-1}dx.$$

$$\text{VI)}\quad \int x^m X^p dx = -\frac{x^{m+1}X^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{m+n+np+1}{an(p+1)}\int x^m X^{p+1}dx.$$

Es ist nämlich

$$1)\quad \partial x^{m+1}X^p = (m+1)x^m X^p + npbx^{m+n}X^{p-1}.$$

Für X^p werde rechts $(a+bx^n)X^{p-1}$ substituirt; dadurch entsteht

$$2)\quad \partial x^{m+1}X^p = (m+1)ax^m X^{p-1} + (m+1+np)bx^{m+n}X^{p-1}.$$

Ferner werde in 1) $X-a$ statt bx^n gesetzt; das liefert

$$3)\quad \partial x^{m+1}X^p = (m+1+np)x^m X^p - npax^m X^{p-1}.$$

Die Gleichung 1) integrire man und entwickele jedes einzelne der Integrale; dadurch ergiebt sich

$$4)\quad \int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1}X^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1}\int x^{m+n}X^{p-1}dx.$$

$$5)\quad \int x^{m+n}X^{p-1}dx = \frac{x^{m+1}X^p}{npb} - \frac{m+1}{npb}\int x^m X^p dx.$$

Die Gleichung 2), eben so behandelt, liefert

$$6)\quad \int x^m X^{p-1}dx = \frac{x^{m+1}X^p}{a(m+1)} - \frac{(m+1+np)b}{a(m+1)}\int x^{m+n}X^{p-1}dx.$$

$$7)\quad \int x^{m+n}X^{p-1}dx = \frac{x^{m+1}X^p}{b(m+1+np)}$$
$$-\frac{(m+1)a}{b(m+1+np)}\int x^m X^{p-1}dx.$$

und aus 3) entsteht

$$8)\quad \int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1}X^p}{m+1+np} + \frac{npa}{m+1+np}\int x^m X^{p-1}dx.$$

$$9)\quad \int x^m X^{p-1}dx = -\frac{x^{m+1}X^p}{npa} + \frac{m+1+np}{npa}\int x^m X^p dx.$$

In den Gleichungen 5) und 7) setze man m — n statt m, und p + 1 statt p in den Gleichungen 6) und 9) p + 1 statt p, und die Gleichungen 4) bis 9) sind alsdann die oben aufgestellten.

Durch die Anwendung der Formeln I) bis VI) wird ein Integral von der Form $\int x^m (a + bx^n)^p$ auf ein anderes Integral von derselben Gestalt gebracht, in welchem aber jeder der Exponenten m und p, oder doch der eine, sich geändert hat. Und zwar wird durch die Formel I) m vermehrt und p vermindert, durch II) umgekehrt m verringert, p vermehrt. Die Formeln III) und IV) lassen p ungeändert, vergrößern oder verringern aber m; die V) und VI) dagegen lassen m ungeändert, vermindern oder vermehren aber p.

Da durch die Anwendung irgend einer der Formeln I) bis VI) ein Integral von der Gestalt $\int x^m X^p$ auf ein anderes von derselben Gestalt gebracht wird, so kann auf das erhaltene Integral wiederum jede der Formeln angewendet werden, u. s. f. Man gebraucht die Formeln, um die Exponenten m und p in absoluter Hinsicht zu vermindern, und wiederholt die Anwendung der Formeln, so lange dadurch noch eine Verminderung möglich ist. Um einen positiven Exponenten zu verringern, muß man Formeln anwenden, welche jenen Exponenten vermindern; um einen negativen Exponenten in absoluter Hinsicht kleiner zu machen dagegen Formeln gebrauchen, welche jenen Exponenten vergrößern.

Es sei z. B. gegeben $\int x^{-4}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$. Die Formel I) giebt

$$\int x^{-4}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = -\frac{x^{-3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \int x^{-2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

weiter ist nach I)

$$\int x^{-2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = -x^{-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

und wenn man diesen Werth substituirt, entsteht

$$\int x^{-4}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + \arcsin x.$$

Wenn für besondere Werthe der constanten Ausdrücke die Nenner in der einen und der anderen der oberen Gleichungen in Null übergehen, so bleiben die übrigen Gleichungen anwendbar, oder die Integration ist in anderer Weise zu vollziehen.

Formeln, durch welche Integrale auf andere von derselben Gestalt mit verminderten Exponenten gebracht werden, nennt man Reductions-Formeln.

§. 364.

Es ist

$$\text{I)}\quad \int (ax+b)^m (px+q)^n\,dx = \frac{(ax+b)^m (px+q)^{n+1}}{(n+1)p} - \frac{ma}{(n+1)p}\int (ax+b)^{m-1}(px+q)^{n+1}dx.$$

$$\text{II)}\quad \int (ax+b)^m (px+q)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{m+1} (px+q)^{n}}{(m+1)a} - \frac{np}{(m+1)a}\int (ax+b)^{m+1}(px+q)^{n-1}dx.$$

$$\text{III)}\quad \int (ax+b)^m (px+q)^n\,dx = \frac{(ax+b)^m (px+q)^{n+1}}{(m+n+1)p} - \frac{m(aq-bp)}{(m+n+1)p}\int (ax+b)^{m+1}(px+q)^{n}dx.$$

$$\text{IV)}\quad \int (ax+b)^m (px+q)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{m+1} (px+q)^{n+1}}{(m+1)(aq+bp)} - \frac{(m+n+2)q}{(m+1)(aq+bp)}\int (ax+b)^{m+1}(px+q)^{n}dx.$$

$$\text{V)}\quad \int (ax+b)^m (px+q)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{m+1} (px+q)^{n}}{(m+n+1)a} - \frac{n(bp-aq)}{(m+n+1)a}\int (ax+b)^{m}(px+q)^{n+1}dx.$$

$$\text{VI)}\quad \int (ax+b)^m (px+q)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{m+1} (px+q)^{n+1}}{(n+1)(bp-aq)} - \frac{(m+n+2)a}{(n+1)(bp-aq)}\int (ax+b)^{n}(px+q)^{n+1}dx.$$

Wir setzen $ax + b = y$
$px + q = z.$

Es ist

1) $\partial(y^m z^{n+1}) = (n+1)py^m z^n + may^{m-1}z^{n+1}$

$= [(n+1)p(ax+b) + ma(px+q)]y^{m-1}z^n.$

Nun ist

$$ma(px+q) = mpax + may + mpb - mpb$$
$$= mp(ax+b) + m(aq-bp)$$

und wenn man diesen Werth in der zweiten Form von 1) substituirt, entsteht

2) $\partial(y^m z^{n+1}) = (m+n+1)\,py^m z^n + m(aq-bp)y^{m-1}z^n.$

Andererseits ist

$$(n+1)p(ax+b) = (n+1)apx + (n+1)bp + (n+1)aq - (n+1)aq$$
$$= (n+1)a(px+q) + (n+1)(bp-aq)$$

und dies in der zweiten Form von 1) substituirt, liefert

3) $\partial(y^m z^{n+1}) = (m+n+1)ay^{m-1}z^{n+1} + (n+1)(bp-aq)y^{m-1}z^n.$

Aus 1) folgt jetzt

$$y^m z^{n+1} = (n+1)p\int y^m z^n + ma\int y^{m-1}z^{n+1}$$

und daraus

$$\alpha)\quad \int y^m z^n = \frac{y^m z^{n+1}}{(n+1)p} - \frac{ma}{(n+1)p}\int y^{m-1}z^{n+1}$$

ferner

$$\int y^{m-1}z^{n+1} = \frac{y^m z^{n+1}}{ma} - \frac{(n+1)p}{ma}\int y^m z^n$$

oder, wenn man hier $m+1$ statt m und $n-1$ statt n setzt

$$\beta)\quad \int y^m z^n = \frac{y^{m+1}z^n}{(m+1)a} - \frac{np}{(m+1)a}\int y^{m+1}z^{n-1}.$$

α) und β) sind nun die Formeln I) und II). In ähnlicher Weise ergeben sich aus 2) und 3) die Formeln III) bis VI).

§. 365.

Es ist, unter y den Ausdruck $a + bx + cx^2$ verstanden

$$\text{I)}\quad \int\frac{1}{y^n} = \frac{b+2cx}{(n-1)(4ac-b^2)y^{n-1}} + \frac{2c(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{1}{y^{n-1}}.$$

$$\text{II)}\ \int y^n = \frac{(b+2cx)y^n}{2c(2n+1)} + \frac{n(4ac-b^2)}{2c(2n+1)}\int y^{n-1}.$$

Es ist

$$\partial y = b + 2cx$$

$$\partial^2 y = 2c$$

$$2y\partial^2 y - \partial y^2 = 4ac - b^2.$$

Vergleiche den vorstehenden Nachtrag. Ferner ist

$$\partial \frac{\partial y}{y^{n-1}} = \frac{y^{n-1}\partial^2 y - (n-1)y^{n-2}\partial y^2}{y^{2n-2}}$$

$$= \frac{y\partial^2 y - (n-1)\partial y^2}{y^n}$$

$$= \frac{[2y\partial^2 y - \partial y^2](n-1) - (2n-3)y\partial^2 y}{y^n}$$

$$= (n-1)(4ac-b^2)\frac{1}{y^n} - 2c(2n-3)\frac{1}{y^{n-1}}$$

und daraus folgt

$$\int \frac{1}{y^n} = \frac{\partial y}{(n-1)(4ac-b^2)y^{n-1}} + \frac{2c(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{1}{y^{n-1}}.$$

Das ist die Formel I).

Die Formel II) ergiebt sich aus I), indem man $-n+1$ für n setzt, und darauf $\int y^n$ entwickelt.

§. 366.

Es ist, unter y den Ausdruck $a + bx + cx^2$ verstanden,

$$\text{I)}\ \int x^m y^n dx = \frac{x^{m+1}y^n}{m+1} - \frac{nb}{m+1}\int x^{m+1}y^{n-1}dx$$
$$- \frac{2nc}{m+1}\int x^{m+2}y^{n-1}dx.$$

$$\text{II)}\ \int x^m y^n dx = \frac{x^m y^{n+1}}{(n+1)b} - \frac{m}{(n+1)b}\int x^{m-1}y^{n+1}dx$$
$$- \frac{2c}{b}\int x^{m+1}y^n dx.$$

$$\text{III)}\ \int x^m y^n dx = \frac{x^{m-1}y^{n+1}}{2(n+1)c} - \frac{m-1}{2(n+1)c}\int x^{m-2}y^{n+1}dx$$
$$- \frac{b}{2c}\int x^{m-1}y^n dx.$$

$$\text{IV)}\quad \int x^m y^n dx = \frac{x^{m+1}y^{n+1}}{(m+1)a} - \frac{(m+n+2)b}{(m+1)a}\int x^{m+1}y^n dx - \frac{(m+2n+3)c}{(m+1)a}\int x^{m+2}y^n dx.$$

$$\text{V)}\quad \int x^m y^n dx = \frac{x^m y^{n+1}}{(m+n+1)b} - \frac{ma}{(m+n+1)b}\int x^{m-1}y^n dx - \frac{(m+2n+2)c}{(m+n+1)b}\int x^{m+1}y^n dx.$$

$$\text{VI)}\quad \int x^m y^n dx = \frac{x^{m-1}y^{n+1}}{(m+2n+1)c} - \frac{(m-1)a}{(m+2n+1)c}\int x^{m-2}y^n dx - \frac{(m+n)b}{(m+2n+1)c}\int x^{m-1}y^n dx.$$

$$\text{VII)}\quad \int x^m y^n dx = \frac{x^{m+1}y^n}{m+n+1} + \frac{na}{m+n+1}\int x^m y^{n-1} dx - \frac{nc}{m+n+1}\int x^{m+2}y^{n-1} dx.$$

$$\text{VIII)}\quad \int x^m y^n dx = -\frac{x^{m+1}y^{n+1}}{(n+1)a} + \frac{m+n+2}{(n+1)a}\int x^m y^{n+1} dx + \frac{c}{a}\int x^{m+2}y^n dx.$$

$$\text{IX)}\quad \int x^m y^n dx = \frac{x^{m-1}y^{n+1}}{(n+1)c} - \frac{m+n}{(n+1)c}\int x^{m-2}y^{n+1} dx + \frac{a}{c}\int x^{m-2}y^n dx.$$

Es ist

$$\partial x^{m+1}y^n = (m+1)x^m y^n + nx^{m+1}y^{n-1}(b+2cx)$$

oder

$$\alpha)\quad \partial x^{m+1}y^n = (m+1)x^m y^n + nbx^{m+1}y^{n-1} + 2ncx^{m+2}y^{n-1}.$$

Ferner ist

$$(m+1)x^m y^n = (m+1)x^m(a+bx+cx^2)y^{n-1}.$$

Dies in α) gesetzt liefert

$$\beta)\quad \partial x^{m+1}y^n = (m+1)ax^m y^{n-1} + (m+n+1)bx^{m+1}y^{n-1} + (m+2n+1)cx^{m+2}y^{n-1}.$$

Alsdann ist

$$nx^{m+1}(b+2cx)y^{n-1} = nx^m(bx+2cx^2)y^{n-1} = nx^m(y-a+cx^2)y^{n-1}$$

und dadurch geht die erste Gleichung über in

$\gamma)\quad \partial x^{m+1}y^n = (m+n+1)x^m y^n - nax^m y^{n-1} + ncx^{m+2}y^{n-1}.$

Die Gleichung α) integrirt liefert

$$\alpha\alpha)\quad x^{m+1}y^n = (m+1)\int x^m y^n + nb\int x^{m+1}y^{n-1} + 2nc\int x^{m+2}y^{n-1}$$

und daraus folgt

$$\int x^m y^n = \frac{x^{m+1}y^n}{m+1} - \frac{nb}{m+1}\int x^{m+1}y^{n-1} - \frac{2nc}{m+1}\int x^{m+2}y^{n-1}.$$

Das ist die Gleichung I).

Weiter folgt aus $\alpha\alpha$)

$$\int x^{m+1}y^{n-1} = \frac{x^{m+1}y^n}{nb} - \frac{m+1}{nb}\int x^m y^n - \frac{2c}{b}\int x^{m+2}y^{n-1}.$$

Hierin setze man $m-1$ statt m, und $n+1$ statt n, das liefert die Gleichung II).

Endlich folgt aus $\alpha\alpha$)

$$\int x^{m+2}y^{n-1} = \frac{x^{m+1}y^n}{2nc} - \frac{m+1}{2nc}\int x^m y^n - \frac{b}{2c}\int x^{m+1}y^{n-1}.$$

Hierin setze man $m-2$ statt m, und $n+1$ statt n, und es entsteht die Gleichung III).

Aehnlich ergeben sich die übrigen Gleichungen aus β) und γ).

§. 367.

Beispiele.

1) $$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\left(\frac{x^3}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\arcsin x.$$

2) $$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\left(\frac{x^4}{5} + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 5}x^2 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

3) $$\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\arcsin x.$$

$$2)\quad \int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n dx = -\frac{\operatorname{Sin} x^{m-1} \operatorname{Cos} x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \operatorname{Sin} x^{m-2} \operatorname{Cos} x^{n+2} dx.$$

$$3)\quad \int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n dx = \frac{\operatorname{Sin} x^{m+1} \operatorname{Cos} x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \operatorname{Sin} x^{m+2} \operatorname{Cos} x^n dx.$$

$$4)\quad \int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n dx = -\frac{\operatorname{Sin} x^{m-1} \operatorname{Cos} x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \operatorname{Sin} x^{m-2} \operatorname{Cos} x^n dx.$$

$$5)\quad \int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n dx = -\frac{\operatorname{Sin} x^{m+1} \operatorname{Cos} x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^{n+2} dx.$$

$$6)\quad \int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n dx = \frac{\operatorname{Sin} x^{m+1} \operatorname{Cos} x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^{n-2} dx.$$

Es ist

$$\alpha)\quad \partial \operatorname{Sin} x^{m+1} \operatorname{Cos} x^{n+1} = (m+1) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^{n+2} - (n+1) \operatorname{Sin} x^{m+2} \operatorname{Cos} x^n.$$

Nun ist

$$(m+1) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^{n+2} = (m+1) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n (1 - \operatorname{Sin} x^2) = (m+1) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n - (m+1) \operatorname{Sin} x^{m+2} \operatorname{Cos} x^n$$

Dadurch geht α) über in

$$\beta)\quad \partial \operatorname{Sin} x^{m+1} \operatorname{Cos} x^{n+1} = (m+1) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n - (m+n+2) \operatorname{Sin} x^{m+2} \operatorname{Cos} x^n.$$

Andererseits ist

$$-(n+1) \operatorname{Sin} x^{m+2} \operatorname{Cos} x^n = -(n+1) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n (1 - \operatorname{Cos} x^2) = -(n+1) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n + (n+1) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^{n+2}$$

und dadurch geht α) über in

$$\gamma)\quad \partial \operatorname{Sin} x^{m+1} \operatorname{Cos} x^{n+1} = -(n+1) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^n + (m+n+2) \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^{n+2}.$$

Aus α) hat man

$$\alpha\alpha)\quad \operatorname{Sin} x^{m+1} \operatorname{Cos} x^{n+1} = (m+1)\int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^{n+2} dx - (n+1)\int \operatorname{Sin} x^{m+2} \operatorname{Cos} x^n dx$$

und daraus folgt

$$\int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^{n+2} dx = \frac{\operatorname{Sin} x^{m+1} \operatorname{Cos} x^{n+1}}{m+1} + \frac{n+1}{m+1}\int \operatorname{Sin} x^{m+2} \operatorname{Cos} x^n dx.$$

Hierin setze man $n-2$ statt n und es entsteht die Formel 1).

Weiter ist aus $\alpha\alpha$)

$$\int \operatorname{Sin} x^{m+2} \operatorname{Cos} x^n dx = -\frac{\operatorname{Sin} x^{m+1} \operatorname{Cos} x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+1}{n+1}\int \operatorname{Sin} x^m \operatorname{Cos} x^{n+2} dx$$

und dies liefert $m-2$, statt m gesetzt, die Formel 2).

Aehnlich ergeben sich die übrigen Formeln aus β) und γ).

§. 370.

1) $$\int \operatorname{Sin} x^n dx = -\frac{\operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{Sin} x^{n-2} dx.$$

2) $$\int \operatorname{Cos} x^n dx = \frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{Cos} x^{n-2} dx.$$

3) $$\int \frac{1}{\operatorname{Sin} x^n} dx = -\frac{\operatorname{Cos} x}{(n-1)\operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\operatorname{Sin} x^{n-2}} dx.$$

4) $$\int \frac{1}{\operatorname{Cos} x^n} dx = \frac{\operatorname{Sin} x}{(n-1)\operatorname{Cos} x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\operatorname{Cos} x^{n-2}} dx.$$

5) $$\int \operatorname{tg} x^n dx = \frac{\operatorname{tg} x^{n-1}}{n-1} - \int \operatorname{tg} x^{n-2} dx.$$

6) $$\int \operatorname{Cotg} x^n dx = -\frac{\operatorname{Cotg} x^{n-1}}{n-1} - \int \operatorname{Cotg} x^{n-2} dx.$$

Die Formel 1) entsteht aus §. 369 3), wenn man n statt m und Null für n setzt. Die zweite Formel geht hervor, indem man in §. 369 4) Null setzt für m. Die Formel 3) zu erhalten, setze man in §. 369 5) $m = -n$ und $n = 0$. Die Formel 4) ergiebt sich, wenn man in §. 369 6) $m = 0$ und

$n = -n$ setzt. Die Formel 5) folgt aus §. 369 1), wenn $n = -m$, die Formel 6) aus §. 369 2), wenn $m = -n$ genommen wird.

§. 371.

$$1)\ \int x \operatorname{Sin} x\, dx = \operatorname{Sin} x - x \operatorname{Cos} x.$$

$$2)\ \int x \operatorname{Cos} x\, dx = \operatorname{Cos} x + x \operatorname{Sin} x.$$

Beide Formeln ergeben sich geradezu aus §. 349 4).

§. 372.

$$1)\ \int x^n \operatorname{Sin} x\, dx = -x^n \operatorname{Cos} x + n x^{n-1} \operatorname{Sin} x - n(n-1)\int x^{n-2} \operatorname{Sin} x\, dx.$$

$$2)\ \int x^n \operatorname{Cos} x\, dx = x^n \operatorname{Sin} x + n x^{n-1} \operatorname{Cos} x - n(n-1)\int x^{n-2} \operatorname{Cos} x\, dx.$$

$$3)\ \int x \operatorname{Sin} x^n dx = \frac{\operatorname{Sin} x^n}{n^2} - \frac{x \operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int x \operatorname{Sin} x^{n-2} dx.$$

$$4)\ \int x \operatorname{Cos} x^n dx = \frac{\operatorname{Cos} x^n}{n^2} + \frac{x \operatorname{Cos} x^{n-1} \operatorname{Sin} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int x \operatorname{Cos} x^{n-2} dx.$$

$$5)\ \int x^n \operatorname{Sin} x^m dx = \frac{n x^{n-1} \operatorname{Sin} x^m}{m^2} - \frac{x^n \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m}\int x^n \operatorname{Sin} x^{m-2} dx - \frac{n(n-1)}{m^2}\int x^{n-2} \operatorname{Sin} x^m dx.$$

$$6)\ \int x^n \operatorname{Cos} x^m dx = \frac{n x^{n-1} \operatorname{Cos} x^m}{m^2} + \frac{x^n \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m}\int x^n \operatorname{Cos} x^{m-2} dx - \frac{n(n-1)}{m^2}\int x^{n-2} \operatorname{Cos} x^m dx.$$

Nach §. 349 4) ist

$$\alpha)\ \int x^n \operatorname{Sin} x\, dx = -x^n \operatorname{Cos} x + n\int x^{n-1} \operatorname{Cos} x\, dx$$

und

$$\beta)\ \int x^n \operatorname{Cos} x\, dx = x^n \operatorname{Sin} x - n\int x^{n-1} \operatorname{Sin} x\, dx.$$

Nach diesen Formeln ist

$$\int x^{n-1} \operatorname{Cos} x\, dx = x^{n-1} \operatorname{Sin} x - (n-1)\int x^{n-2} \operatorname{Sin} x\, dx.$$

und

$$\int x^{n-1} \operatorname{Sin} x\, dx = -x^{n-1} \operatorname{Cos} x + (n-1)\int x^{n-2} \operatorname{Cos} x\, dx.$$

Die eben erhaltenen Werthe substituire man in α) und β), und es entstehen die Formeln 1) und 2).

Es ist

$$\int x \operatorname{Sin} x^n dx = \int \operatorname{Sin} x^{n-1} x \operatorname{Sin} x\, dx,$$

oder wenn man hierauf §. 349 4) anwendet

$$\int x \operatorname{Sin} x^n dx$$

$$= \operatorname{Sin} x^{n-1} \int x \operatorname{Sin} x\, dx - (n-1)\int (\operatorname{Sin} x^{n-2} \operatorname{Cos} x \int x \operatorname{Sin} x\, dx) dx.$$

Nach dem vorigen Paragraph ist

$$\int x \operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin} x - x \operatorname{Cos} x.$$

Diesen Werth substituire man und es entsteht

$$\int x \operatorname{Sin} x^n dx$$

$$= \operatorname{Sin} x^n - x \operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x - (n-1)\int \operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x\, dx$$

$$+ (n-1)\int x \operatorname{Sin} x^{n-2} \operatorname{Cos} x^2 dx$$

$$= \operatorname{Sin} x^n - x \operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x - (n-1)\int \operatorname{Sin} x^{n-1} \partial \operatorname{Sin} x\, dx.$$

$$+ (n-1)\int x \operatorname{Sin} x^{n-2} dx - (n-1)\int x \operatorname{Sin} x^n dx$$

$$= \operatorname{Sin} x^n - x \operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x - \frac{n-1}{n} \operatorname{Sin} x^n$$

$$+ (n-1)\int x \operatorname{Sin} x^{n-2} dx - (n-1)\int x \operatorname{Sin} x^n dx.$$

Hieraus folgt

$$n\int x \operatorname{Sin} x^n dx$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} x^n}{n} - x \operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x + (n-1)\int x \operatorname{Sin} x^{n-2} dx$$

und das ist, wenn man mit n dividirt, die Formel 3). Eben so findet sich die Formel 4).

Es ist

$$\int x^n \operatorname{Sin} x^m dx = \int x^{n-1} \operatorname{Sin} x^{m-1} x \operatorname{Sin} x\, dx,$$

also nach §. 349 4)

$$\int x^n \operatorname{Sin} x^m dx$$

$$= x^{n-1} \operatorname{Sin} x^{m-1} \int x \operatorname{Sin} x\, dx - \int \Big([(m-1) x^{n-1} \operatorname{Sin} x^{m-2} \operatorname{Cos} x\, dx$$

$$+ (n-1) x^{n-2} \operatorname{Sin} x^{m-1}] \int x \operatorname{Sin} x\, dx \Big)$$

oder wenn man für $\int x \operatorname{Sin} x\, dx$ den Werth setzt

$$\int x^n \operatorname{Sin} x^m dx$$
$$= x^{n-1} \operatorname{Sin} x^m - x^n \operatorname{Sin} x^{m-1} \operatorname{Cos} x - (m-1)\int x^{n-1} \operatorname{Sin} x^{m-1} \operatorname{Cos} x dx$$
$$+ (m-1)\int x^n \operatorname{Sin} x^{m-2} \operatorname{Cos} x^2 dx - (n-1)\int x^{n-2} \operatorname{Sin} x^m dx$$
$$+ (n-1)\int x^{n-1} \operatorname{Sin} x^{m-1} \operatorname{Cos} x dx$$
$$= x^{n-1} \operatorname{Sin} x^m - x^n \operatorname{Sin} x^{m-1} \operatorname{Cos} x + (m-1)\int x^n \operatorname{Sin} x^{m-2} dx$$
$$- (m-1)\int x^n \operatorname{Sin} x^m dx - (n-1)\int x^{n-2} \operatorname{Sin} x^m dx$$
$$+ \frac{n-m}{m}\int x^{n-1} \partial \operatorname{Sin} x^m dx.$$

Der letzte Summand ist nach §. 349 3) gleich

$$\frac{(n-m)x^{n-1} \operatorname{Sin} x^m}{m} - \frac{(n-m)(n-1)}{m}\int x^{n-2} \operatorname{Sin} x^m dx.$$

Wenn man diesen Werth substituirt, folgt

$$m\int x^n \operatorname{Sin} x^m dx = \frac{n x^{n-1} \operatorname{Sin} x^m}{m} - x^n \operatorname{Sin} x^{m-1} \operatorname{Cos} x$$
$$+ (m-1)\int x^n \operatorname{Sin} x^{m-2} dx - \frac{n(n-1)}{m}\int x^{n-2} \operatorname{Sin} x^m dx$$

und dies ist, durch m dividirt, die Formel 5). Eben so ergiebt sich die Formel 6).

§. 373.

1) $\int \operatorname{Sin}(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\operatorname{Cos}(ax+b).$

2) $\int \operatorname{Cos}(ax+b)dx = \frac{1}{a}\operatorname{Sin}(ax+b).$

3) $\int \operatorname{tg}(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln \operatorname{Cos}(ax+b)$ u. s. w.

4) $\int \operatorname{Sin}(ax+b)\operatorname{Cos}(px+q)dx = -\frac{\operatorname{Cos}[(a+p)x+b+q]}{2(a+p)}$
$$-\frac{\operatorname{Cos}[(a-p)x+b-q]}{2(a-p)}.$$

5) $\int \operatorname{Sin}(ax+b)\operatorname{Sin}(px+q)dx = \frac{\operatorname{Sin}[(a-p)x+b-q]}{2(a-p)}$
$$-\frac{\operatorname{Sin}[(a+p)x+b+q]}{2(a+p)}.$$

6) $\int \operatorname{Cos}(ax+b)\operatorname{Cos}(px+q)\,dx = \frac{\operatorname{Sin}[(a+p)x+b+q]}{2(a+p)}$
$+ \frac{\operatorname{Sin}[(a-p)x+b-q]}{2(a-p)}$.

Die Formeln 1), 2), 3) u. s. w. ergeben sich sehr leicht, wenn man $ax+b=z$, also $\partial x_z = \frac{1}{a}$ setzt. Es ist

$$\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta = \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)$$
$$\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta = \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}(\alpha+\beta)$$
$$\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta = \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}(\alpha-\beta).$$

Man setze $\alpha = ax+b$, $\beta = px+q$, integrire und wende auf die rechts entstehenden Integrale die Formeln 1) und 2) an, so gehen die Formeln 4), 5) und 6) hervor.

§. 374.

1) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{Cos}x} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x.$

2) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{Cos}x} = -\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}x.$

3) $\int \frac{dx}{a+b\operatorname{Cos}x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,cos}\frac{a\operatorname{Cos}x+b}{a+b\operatorname{Cos}x}$
$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{a\operatorname{Cos}x+b+\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{Sin}x}{a+b\operatorname{Cos}x}.$

Ist $a=b$, so sind beide Ausdrücke unbrauchbar, und das Integral bestimmt sich sofort nach 1) oder 2).

4) $\int \frac{\operatorname{Cos}x}{a+b\operatorname{Cos}x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+b\operatorname{Cos}x}.$

5) $\int \frac{\operatorname{Sin}x}{a+b\operatorname{Cos}x} = -\frac{1}{b}\ln(a+b\operatorname{Cos}x).$

Es ist

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{Cos}x} = \int \operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}x^2\,\partial(\tfrac{1}{2}x) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x$$

und

$$\int \frac{dx}{1-\operatorname{Cos}x} = \int \operatorname{Cosec}\tfrac{1}{2}x^2\,\partial\tfrac{1}{2}x = -\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}x.$$

Das dritte Integral zu bestimmen, werde

$$\mathrm{Cos}\,x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

gesetzt. Dann ist

$$\mathrm{Sin}\,x = \frac{2z}{1 + z^2}$$

$$\partial \mathrm{Cos}\,x_z = -\frac{4z}{(1 + z^2)^2}.$$

Es ist aber auch

$$\partial \mathrm{Cos}\,x_z = -\mathrm{Sin}\,x\,\partial x_z$$

also

$$-\frac{4z}{(1 + z^2)^2} = -\frac{2z}{1 + z^2}\partial x_z$$

und

$$\partial x_z = \frac{2}{1 + z^2}.$$

Hiernach entsteht

$$\int \frac{dx}{a + b\,\mathrm{Cos}\,x} = \int \frac{\partial x_z}{a + b\frac{1 - z^2}{1 + z^2}}\,dz = 2\int \frac{1}{a + b + (a - b)z^2}\,dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,z\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \quad [§.\ 357\ 3)].$$

Aus §. 176 5) folgt, wenn man $z = y$ setzt,

$$2\,\mathrm{arc\,tg}\,y = \mathrm{arc\,tg}\frac{2y}{1 - y^2}.$$

Diese Formel werde oben angewendet und es entsteht

$$\int \frac{1}{a + b\,\mathrm{Cos}\,x}\,dz = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2z\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b - (a - b)z^2}.$$

Aus

$$\mathrm{Cos}\,x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

ergiebt sich

$$z^2 = \frac{1 - \mathrm{Cos}\,x}{1 + \mathrm{Cos}\,x} = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x^2.$$

Dieser Werth werde substituirt, und es entsteht, wenn man darauf Zähler und Nenner mit $\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x^2$ multiplicirt,

$$\int \frac{dx}{a + b\,\mathrm{Cos}\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{Sin}\,x\sqrt{a^2 - b^2}}{a\,\mathrm{Cos}\,x + b}$$

und wendet man noch die Formel

$$\operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

an, so ergiebt sich der erste von den oben angegebenen Ausdrücken. Den zweiten zu erhalten, setze man

$$2\int \frac{dz}{a+b+(a-b)z^2} = 2\int \frac{dz}{a+b-(b-a)z^2}$$

und bringe §. 357 4) zur Anwendung. Das liefert

$$\int \frac{1}{a+b\operatorname{Cos} x} dz = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{a+b}+z\sqrt{b-a}}{\sqrt{a+b}-z\sqrt{b-a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{a+b+2z\sqrt{b^2-a^2}+(b-a)z^2}{a+b-(b-a)z^2}$$

für z^2 setze man den Werth $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x^2$ und multiplicire Zähler und Nenner mit $\operatorname{Cos} \frac{1}{2} x^2$, und es ergiebt sich der andere Ausdruck.

Die vierte Formel zu erhalten bilde man durch Division

$$\frac{\operatorname{Cos} x}{a+b\operatorname{Cos} x} = \frac{1}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a+b\operatorname{Cos} x}$$

und integrire.

Die fünfte Formel erhellet sehr leicht, da $\partial(a+b\operatorname{Cos} x) = -b\operatorname{Sin} x$ ist, also

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x}{a+b\operatorname{Cos} x} dx = -\frac{1}{b}\int \frac{\partial(a+b\operatorname{Cos} x)}{a+b\operatorname{Cos} x} dx.$$

§. 375.

1) $\int \operatorname{arc\,sin} x = x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2}$.

2) $\int \operatorname{arc\,cos} x = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2}$

3) $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$

4) $\int \operatorname{arc\,cotg} x\, dx = x \operatorname{arc\,cotg} x + \ln\sqrt{1+x^2}$

Es ist $\int \operatorname{arc\,sin} x\, dx = \int \operatorname{arc\,sin} x \cdot \partial x\, dx$ und nach §. 349 4)

$$\int \operatorname{arc\,sin} x\, dx = x \operatorname{arc\,sin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \operatorname{arc\,sin} x + \tfrac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \partial(1-x^2) dx$$

$$= x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2}.$$

Eben so ergeben sich die übrigen Formeln.

§. 376.

Und ist X eine beliebige Funktion, so ist

1) $\int X \arcsin x\,dx = \arcsin x \int X\,dx - \int \frac{\int X}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

2) $\int X \arccos x\,dx = \arccos x \int X\,dx + \int \frac{\int X}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

3) $\int X \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \operatorname{arc\,tg} x \int X\,dx - \int \frac{\int X}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

4) $\int X \operatorname{arc\,cotg} x\,dx = \operatorname{arc\,cotg} x \int X\,dx + \int \frac{\int X}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

welches aus §. 349 4) erhellet.

§. 377.

Beispiele.

1) $\int \operatorname{Sin} x^2 dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x).$
2) $\int \operatorname{Sin} x^3 dx = \frac{1}{3}\operatorname{Cos} x^3 - \operatorname{Cos} x.$
3) $\int \operatorname{Cos} x^2 dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x).$
4) $\int \operatorname{Cos} x^3 dx = \operatorname{Sin} x - \frac{1}{3}\operatorname{Sin} x^3.$
5) $\int \operatorname{Cosec} x^3 dx = -\frac{\operatorname{Cos} x}{2 \operatorname{Sin} x^2} + \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}x.$
6) $\int \operatorname{Sec} x^3 dx = \frac{\operatorname{Sin} x}{2 \operatorname{Cos} x^2} + \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x).$
7) $\int \operatorname{tg} x^4 dx = x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3.$
8) $\int \operatorname{Cotg} x^5 dx = \ln \operatorname{Sin} x + \frac{1}{2}\operatorname{Cotg} x^2 - \frac{1}{4}\operatorname{Cotg} x^4.$
9) $\int \operatorname{Sin} x^3 \operatorname{Cos} x^2 dx = \frac{1}{5}\operatorname{Cos} x^5 - \frac{1}{3}\operatorname{Cos} x^3.$
10) $\int \operatorname{Sin} x^2 \operatorname{Cos} x^3 dx = \frac{1}{3}\operatorname{Sin} x^3 - \frac{1}{5}\operatorname{Sin} x^5.$
11) $\int \operatorname{Sin} x^2 \operatorname{Cos} x^2 dx = \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\operatorname{Sin} 4x).$
12) $\int \operatorname{Sin} x^3 \operatorname{Cos} x^3 dx = \frac{1}{4}\operatorname{Sin} x^4 - \frac{1}{6}\operatorname{Sin} x^6.$
13) $\int \operatorname{tg} x^2 \operatorname{Sec} x\,dx = \frac{1}{2}[\operatorname{tg} x \operatorname{Sec} x - \ln \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)].$
14) $\int \operatorname{Sin} x^{-3} \operatorname{Cos} x^2 dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x^2} - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}x\right].$
15) $\int \frac{dx}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x^3} = \frac{1}{2}\operatorname{Sec} x^2 + \ln \operatorname{tg} x.$
16) $\int \frac{1}{\operatorname{Sin} x^2 \operatorname{Cos} x^2} dx = -2\operatorname{Cotg} 2x.$

17) $\int \mathrm{Sin}\,x^{-4}\mathrm{Cos}\,x^5 dx = \frac{8 - 12\,\mathrm{Cos}\,x^2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x^4}{3\,\mathrm{Sin}\,x^3}.$

18) $\int x^2 \mathrm{Sin}\,x\,dx = -x^2\mathrm{Cos}\,x + 2x\,\mathrm{Sin}\,x + 2\,\mathrm{Cos}\,x.$

19) $\int x^2 \mathrm{Cos}\,x\,dx = x^2\mathrm{Sin}\,x + 2x\,\mathrm{Cos}\,x - 2\,\mathrm{Sin}\,x.$

20) $\int x(6 + x^2)\mathrm{Cos}\,x\,dx = x^2(x\,\mathrm{Sin}\,x + 3\,\mathrm{Cos}\,x).$

21) $\int x(6 + x^2)\mathrm{Sin}\,x\,dx = x^2(3\,\mathrm{Sin}\,x - x\,\mathrm{Cos}\,x).$

22) $\int [(x^2 + \frac{3}{2})x\,\mathrm{Sin}\,x^2 - \frac{1}{2}x^3]dx = \frac{1}{4}(3\,\mathrm{Sin}\,x - 2x\,\mathrm{Cos}\,x)x^2\mathrm{Sin}\,x.$

23) $\int \mathrm{Sin}\,3x\,\mathrm{Cos}\,5x\,dx = \frac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2x - \frac{1}{16}\mathrm{Cos}\,8x.$

24) $\int 2\,\mathrm{Sin}\,2x^2\,\mathrm{Cos}\,2x\,dx = \frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2x - \frac{1}{12}\mathrm{Sin}\,6x.$

25) $\int \mathrm{Cos}\,2x\,\mathrm{Cos}\,x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,x + \frac{1}{6}\mathrm{Sin}\,3x.$

26) $\int (\mathrm{Cos}\,2x - \mathrm{Sin}\,2x\,\mathrm{Sin}\,4x)dx = \frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{1}{12}\mathrm{Sin}\,6x.$

27) $\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx = \frac{1}{2}[(1 + x^2)\mathrm{arc\,tg}\,x - x].$

28) $\int x^2\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx = \frac{1}{6}[2x^3\mathrm{arc\,tg}\,x - x^2 + \ln(1 + x^2)].$

VI. Integration logarithmischer und exponentieller Funktionen.

§. 378.

Es ist

1) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ und $\int a^{\phi x}\partial\phi_x dx = \frac{a^{\phi x}}{\ln a}.$

2) $\int e^x dx = e^x \qquad \int e^{\phi x}\partial\phi_x dx = e^{\phi x}.$

unmittelbar nach §. 260 6).

§. 379.

Bei dem Integriren der logarithmischen und exponentiellen Funktionen ist es wieder die theilweise Integration, d. h. die Anwendung der schon häufig gebrauchten Formel §. 349 4), auf welche man hauptsächlich sich angewiesen sieht.

So hat man, wenn X eine beliebige Funktion von x vorstellt

1) $\int X(\ln x)^n dx = (\ln x)^n \int X\,dx - n\int\left[\frac{(\ln x)^{n-1}}{x}\int X\right]dx.$

Für $X = x^m$ entspringt hieraus

$$2)\quad \int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1} dx.$$

In dieser Formel verschwinden die Nenner, wenn $m = -1$ ist. Dann ergiebt sich aber

$$3)\quad \int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \text{ und}$$

$$4)\quad \int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}}.$$

Es ist nämlich

$$\int \frac{(\ln x)^n}{x} = \int (\ln x)^n \partial \ln x.$$

Die Formel 4) ist für $n = 1$ unbrauchbar; und es ist

$$5)\quad \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x).$$

Denn es ist

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{\partial \ln x}{\ln x} dx = \ln(\ln x).$$

Ferner ist, unter X eine beliebige Funktion von x verstanden

$$6)\quad \int \frac{X}{(\ln x)^n} dx = -\frac{Xx}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\partial X_x Xx}{(\ln x)^{n-1}} dx.$$

Denn es ist

$$\int \frac{X}{(\ln x)^n} dx = \int Xx \frac{1}{x(\ln x)^n} dx$$

und hieraus entsteht die obere Formel, wenn man theilweise integrirt und 4) anwendet.

Aus 6) ergiebt sich, für $X = x^m$,

$$7)\quad \int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m}{(\ln x)^{n-1}} dx.$$

Für den Werth 1 von n verschwinden die Nenner. In diesem Fall setze man

$$\alpha)\quad x^{m+1} = z$$

so ist

$$\ln x = \frac{\ln z}{m+1}$$

und, wenn man α) nach z differenziirt,

$$(m+1)x^m \partial x_z = 1$$

$$\partial x_z = \frac{1}{(m+1)x^m}.$$

Nun entsteht

$$\int \frac{x^m}{\ln x} \partial x_z dz = \int \frac{1}{\ln z} dz$$

und so hat man

$$8) \int \frac{x^m}{\ln x} = \int \frac{1}{\ln z} \text{ während } x^{m+1} = z \text{ ist.}$$

Von der Bestimmung des Integrals $\int \frac{1}{\ln z} dz$ können wir erst später handeln.

Endlich ist

$$9) \int \ln x\, dx = x \ln x - x$$

welches folgt, wenn man in 2) $m = 0$ und $n = 1$ setzt, oder auch, indem man $\int \ln x\, \partial x\, dx$ theilweise integrirt.

§. 380.

Es bezeichne X eine beliebige Funktion von x. Durch theilweises Integriren folgt

$$\int X a^x dx = X \int a^x dx - \int (\partial X \int a^x) dx$$

oder, §. 378 angewendet,

$$1) \int X a^x dx = \frac{X a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a} \int a^x \partial X\, dx.$$

Für $X = x^n$ entspringt hieraus

$$2) \int x^n a^x dx = \frac{x^n a^x}{\ln a} = \frac{n}{\ln a} \int x^{n-1} a^x dx.$$

Weiter hat man

$$3) \int X a^x dx = a^x \int X dx - \ln a \int (a^x \int X) dx$$

und $X = x^{-n}$ gesetzt,

$$4) \int \frac{a^x}{x^n} dx = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1} \int \frac{a^x}{x^{n-1}} dx.$$

Wenn $n = 1$ ist, verschwinden die Nenner. Für diesen Fall sei

$$\alpha) \quad a^x = z$$

so folgt
$$x = \frac{\ln z}{\ln a}$$
und α) nach z differenzirt,
$$a^x \ln a \partial x_z = 1$$
also
$$\partial x_z = \frac{1}{a^x \ln a}$$
und es entsteht
$$\int \frac{a^x}{x} \partial x_z dz = \int \frac{1}{\ln z} dz.$$
Man hat demnach
$$5) \quad \int \frac{a^x}{x} dx = \int \frac{1}{\ln z} dz, \text{ während } a^x = z \text{ ist,}$$
und sieht sich auf dasselbe Integral geführt, auf welches wir bereits im vorigen Paragraph unter 8) gestoßen sind.

VII. Bestimmte Integrale.

§. 381.

Es sei
$$\int \phi_x dx = f_x.$$
Dann ist, unter C eine beliebige Constante verstanden, auch
$$\int \phi_x dx = f_x + C.$$
In den Anwendungen ist die Constante C nicht beliebig. Sie bestimmt sich jedesmal durch die Bedingung, daß für einen gewissen Werth a von x das Integral einen gewissen Werth A erhalte, während der vorliegende Fall der Anwendung die Werthe a und A darbietet. Es muß also sein
$$f_a + C = A$$
und daraus ist
$$C = A - f_a.$$
Nehmen wir
$$\int \phi_x dx = f_x - f_a + A$$
so enthält das Integral eine bestimmte Constante; denn sollte auch f_x beim Integriren eine überflüssige Constante aufgenommen haben, so wird sich dieselbe in der Differenz $f_x - f_a$ offenbar heben.

Das Integral

$$\int \phi_x = f_x - f_a + A$$

ist noch eine allgemeine Form, welche durch die verschiedenen für x zulässigen Werthe eben so viele verschiedene Werthe annehmen kann. Sie ist aber verbunden mit einer bestimmten Constante, entsprechend der Bedingung, daß das Integral zu A werde, für $x = a$. Setzt man noch x gleich b, so entsteht

$$f_b - f_a + A$$

als ein völlig bestimmter jenem Fall der Anwendung entsprechender Werth, vorausgesetzt natürlich, daß der Werth b für x überhaupt zulässig sei.

Bei weitem in den meisten Fällen ist A gleich Null; und wir werden fortab stets A gleich Null annehmen. Ist A nicht Null, so ist sein Werth nur einfach anzuhängen.

§. 382.

Es sei

$$\int \phi_x dx = f_x.$$

Dann bezeichnet man die Differenzen

$$f_x - f_a \text{ und } f_b - f_a$$

beziehlich durch

$$\int_a^x \phi_x dx \text{ und } \int_a^b \phi_x dx$$

so daß also

$$\int_a^x \phi_x dx = f_x - f_a$$

und

$$\int_a^b \phi_x dx = f_b - f_a.$$

Jede dieser Differenzen heißt ein **bestimmtes** Integral, und zwar das Integral innerhalb der Gränzen a und x oder b, das mit a anfangende und mit x oder b aufhörende Integral, schlechthin das Integral von a bis x oder b.

§. 383.

Ist $\int \phi_x dx = f_x$ bekannt, so hat man sofort

$$\int_a^b \phi_x dx = f_b - f_a.$$

In manchen Fällen läßt sich aber auch $\int_a^b \phi_x dx$ für bestimmte Werthe von a und b ermitteln, ohne daß $\int \phi_x dx = f_x$

vorläge; in anderen läßt sich $\int_a^b \phi_x dx$ näherungsweise herstellen. Wir werden hier einiges, und das Nothwendigste, von diesen Gegenständen erörtern.

§. 384.

Es ist

$$\int_a^b f_x dx = [\Sigma f_{a+(n-1)k} + \frac{k}{2!} \cdot \Sigma \partial f_{a+(n-1)k} + \frac{k^2}{3!} \Sigma \partial^2 f_{a+(n-1)k} + \ldots]k$$

während $k = \frac{b-a}{n}$ ist, und $\Sigma f_{a+(n-1)k}$ die Summe der Werthe bezeichnet, die aus f_x hervorgehen, wenn man statt x nach und nach a, a + k, a + 2k, ... a + (n — 1)k setzt, eben so $\Sigma \partial f_{a+(n-1)k}$ die Summe der Werthe vorstellt, welche aus ∂f_x erhalten werden, indem man statt x jene Werthe a, a + k .... setzt, u. s. f. n ist natürlich eine ganze Zahl.

Es sei $\int f_x = \phi_x$. Dann ist $\partial \phi_x = f_x$, $\partial^2 \phi_x = \partial f_x$ u. s. w., und nach dem Taylorschen Satz

$$\phi_{x+h} - \phi_x = f_x h + \partial f_x \frac{h^2}{2!} + \partial^2 f_x \frac{h^3}{3!} + \ldots.$$

Man substituire k für h, und nach und nach a, a + k, a + 2k,.... a + (n — 1)k für x; das liefert

$$\phi_{a+k} - \phi_a = f_a k + \partial f_a \frac{k^2}{2!} + \partial^2 f_a \frac{k^3}{3!} + \ldots.$$

$$\phi_{a+2k} - \phi_{a+k} = f_{a+k} k + \partial f_{a+k} \frac{k^2}{2!} + \ldots.$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\phi_{a+nk} - \phi_{a+(n-1)k} = f_{a+(n-1)k} k + \partial f_{a+(n-1)k} \frac{k^2}{2!} + \ldots.$$

Diese Gleichungen addire man, und es entsteht, da $k = \frac{b-a}{n}$, also a + nk = b, und $\phi_b - \phi_a = \int_a^b f_x dx$ ist, die Behauptung.

Das Gesetz erheischt, daß die Funktion f innerhalb der Gränzen a und b stetig sei.

§. 385.

Es ist

$$\int_a^b f_x dx = f_a \cdot dx + f_{a+dx} \cdot dx + f_{a+2dx} \cdot dx + \ldots . f_b dx$$

d. h. das Integral einer beliebigen Funktion f_x nach x und zwischen den Gränzen a und b, ist die Summe der Werthe, welche erhalten werden, wenn man in f_x nach und nach die stetig auf einander folgenden Werthe a, $a + dx$, $a + 2dx, \ldots . b$ substituirt, und jeden der so entstehenden Werthe mit dx multiplicirt.

Dieser Satz folgt aus dem vorigen. Man setze nämlich n gleich ∞, so wird k zu dx, und die mit k multiplicirten Glieder in der Klammer werden unendlich klein und verschwinden gegen das erste endlich bleibende Glied; es entsteht

$$\int_a^b f_x dx = k\Sigma f_{a+(n-1)k}$$

$$= [f_a + f_{a+k} + f_{a+2k} + \ldots . + f_{a+(n-1)k}]k$$

und das ist die Behauptung, da $a + (n-1)k = b - k$, welches, für $k = dx$, gleich b zu nehmen ist.

§. 386.

Der Satz des vorigen Paragraphen gilt nur unter der besonderen Voraussetzung, daß die Funktion f_x zwischen den Gränzen a und b stetig sei, d. h. daß keiner der Werthe f_a, f_{a+dx}, $f_{a+2dx} \ldots . f_b$ die Form $\frac{1}{0}$ oder eine andere unzulässige Form annehme. Dieselbe Beschränkung erheischt der Satz §. 384.

§. 387.

Man betrachte in §. 384 n sehr groß, also k sehr klein und vernachlässige die mit k^2 und mit höheren Potenzen von k multiplicirten Glieder, als von geringerer Bedeutung, und es entsteht, als Näherungsformel

$$1) \int_a^b f_x dx = k\Sigma f_{a+(n-1)k}$$

$$= k[f_a + f_{a+k} + \ldots . + f_{a+(n-1)k}].$$

Nach der eben erhaltenen Formel ist näherungsweise

$$f_b - f_a = k\Sigma \partial f_{a+(n-1)k}.$$

Dann ist $\int_a^c \phi_x dx = f_c - f_a$

$\int_c^b \phi_x dx = f_b - f_c$

also $\int_a^c \phi_x dx + \int_c^b \phi_x dx = f_b - f_a = \int_a^b \phi_x dx.$

Gewöhnlich kommt das Gesetz zur Anwendung während

$$a < c < b.$$

§. 393.

Es ist $\int_a^b f_x dx = \int_{\phi_{1}a}^{\phi_{1}b} f\phi_x \partial\phi_x dx$

während ϕ_x eine beliebige Funktion von x vorstellt, $\phi_{1}a$ und $\phi_{1}b$ aber die Werthe bezeichnen, welche sich für z ergeben, wenn man dies aus den Gleichungen

$$a = \phi_z$$
$$b = \phi_z$$

entwickelt.

Es sei vorgelegt

$$\int f_x dx.$$

Es werde

$$x = \phi_z$$

substituirt. Man setzt alsdann

$$\int f_x dx = \int f\phi_z \partial\phi_z dz$$

und findet sich

$$\int f\phi_z \partial\phi_z dz = F_z$$

so erhält man hieraus $\int f_x dx$, indem man z aus

$$x = \phi_z$$

entwickelt, und den Werth substituirt. Aus

$$x = \phi_z$$

möge folgen

$$z = \phi_{1}x$$

und dann ist

$$\int f_x dx = F\phi_{1}x.$$

Hat man nun zu bestimmen

$$\int_a^b f_x dx$$

so ist dies gleich

$$F\phi_{1}b - F\phi_{1}a$$

d. h. es ist

$$\int_a^b f_x dx = \int_{\phi_1 a}^{\phi_1 b} f_{\phi_z} \partial\phi_z dz$$

oder, da es gleichgiltig ist, ob z oder x den urvariabeln Ausdruck bezeichnet,

$$\int_a^b f_x dx = \int_{\phi_1 a}^{\phi_1 b} f_{\phi_x} \partial\phi_x dx.$$

Darin liegt das Gesetz.

§. 394.

Es ist

1) $\int_a^b f_x dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\frac{(b-a)x + a\beta - b}{\beta-\alpha}.$

2) $\int_a^b f_x dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x+h)dx.$

3) $\int_a^b f_x dx = \int_0^{b-a} f(x+a)dx.$

4) $\int_a^b f_x dx = \frac{1}{q}\int_{aq}^{bq} f\frac{x}{q}dx.$

5) $\int_a^b f_x dx = q\int_{a:q}^{b:q} f(qx)dx.$

6) $\int_a^b f_x dx = (b-a)\int_0^1 f[(b-a)x + a]dx.$

7) $\int_0^b f_x dx = b\int_0^1 f(bx)dx.$

8) $\int_0^1 f_x dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\frac{x-a}{b-a}dx.$

9) $\int_0^1 f_x dx = \frac{1}{b}\int_0^b f\frac{x}{b}dx.$

10) $\int_0^1 f_x dx = \int_0^\infty \left[f\frac{x}{1+x}\right]\frac{1}{(1+x)^2}dx.$

11) $\int_a^b f_x dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$

12) $\int_{-a}^0 f_x dx = \int_0^a f(-x)dx.$

13) $\int_{-a}^a f_x dx = \int_0^a [fx + f(-x)]dx.$

14) $\int_0^x f_x dx = x\int_0^1 f(xz)dz.$

15) $\int_0^1 f_x dx = \frac{1}{x}\int_0^x f\frac{z}{x}dz.$

Die erste Formel herzuleiten stellen wir uns die Aufgabe, die Funktion ϕ_z dergestalt zu bestimmen, daß, wenn wir sie in $\int_a^b f_x$ statt x setzen, das Integral dadurch die gegebenen neuen

Gränzen α und β erhalte. Setzen wir, unter p und q unbestimmte Coefficienten verstanden,

$$x = \phi_z = pz + q$$

so muß nach dem vorigen Paragraphen

$$b = p\beta + q$$
$$a = p\alpha + q$$

sein, und diese Gleichungen bestimmen die Coefficienten p und q. Aus ihnen ergiebt sich

$$p = \frac{b - a}{\beta - \alpha}$$

$$q = \frac{a\beta - b\alpha}{\beta - \alpha}.$$

Daher ist

$$\phi_z = \frac{(b - a)z + a\beta - b\alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\partial\phi_z = \frac{b - a}{\beta - \alpha}$$

und es folgt jetzt

$$\int_a^b f_x dx = \frac{b - a}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f\frac{(b - a)z + a\beta - b\alpha}{\beta - a}dz$$

welches die Formel 1) ist, sobald man den Veränderlichen, nach welchem zu integriren ist, statt mit z wiederum mit x bezeichnet.

Die Formeln 2) bis 9) folgen aus 1), können auch nach dem vorigen Paragraph erhalten werden; um z. B. 2) zu entwickeln, setze man

$$x = \phi_z = z + h$$

so ist $\partial x_z = 1$

aus $a = \phi_z = z + h$

und $b = \phi_z = z + h$

folgt beziehlich $z = a - h$

$$z = b - h.$$

Daher ist

$$\int_a^b f_x dx = \int_{a-h}^{b-h} f(z + h)dz$$

und dies giebt die Formel 2), wenn man x statt z setzt.

Die Formel 10) zu bilden, setze man

$$x = \phi_z = \frac{z}{1+z}$$

dann ist

$$\partial x_z = \frac{1}{(1+z)^2}.$$

Aus $a = \phi_z$ und $b = \phi_z$ folgt beziehlich $z = \frac{a}{1-a}$ und $z = \frac{b}{1-b}$. Daher ist

$$\int_a^b f_x dx = \int_{\frac{a}{1-a}}^{\frac{b}{1-b}} \left[f \frac{z}{1+z}\right] \frac{1}{(1+z)^2} dz$$

welches, wenn man $a = 0$ und $b = 1$ setzt, die Formel 10) giebt.

Die Formel 11) zu erhalten, setze man

$$x = \phi_z = a + b - z$$

so ist

$$\partial x_z = -1.$$

Aus

$$a = \phi_z$$

folgt

$$z = b$$

während aus

$$b = \phi_z$$

$$z = a$$

sich ergiebt. Daher ist

$$\int_a^b f_x dx = -\int_b^a f(a+b-z)dz$$

und dies liefert die Formel 11), wenn man §. 390 anwendet.

In 5) setze man -1 statt q, das liefert

$$\int_a^b f_x dx = -\int_{-a}^{-b} f(-x)dx$$

oder nach §. 390

$$\int_a^b f_x dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)dx$$

und wenn man $-a$ statt a und 0 statt b setzt, giebt dies die Formel 12).

Es ist nach §. 392

$$\int_{-a}^{a} f_x = \int_{-a}^{0} f_x + \int_0^a f_x.$$

Auf $\int_{-a}^{0} f_x$ wende man 12) an und es entsteht 13).

Die Formel 7) liefert, wenn man rechts z statt x setzt

$$\int_0^b f_x dx = b\int_0^1 f(bz)dz$$

nun wenn man hierin x setzt für b, so entsteht 14). Eben so folgt 15) aus 9).

Aus 13) folgt für den besonderen Fall, daß $f(-x) = f_x$ ist

$$\int_{-a}^{a} f_x dx = 2\int_0^a f_x dx$$

und für den Fall, daß $f(-x) = -f_x$ ist

$$\int_{-a}^{a} f_x dx = 0.$$

§. 395.

Statt

$$\int f_x dx$$

werden wir in der Folge öfter

$$dx\int f_x$$

schreiben.

§. 396.

Es ist

$$\partial[dy\int f_{x,y}]_x = dy\int \partial[f_{x,y}]_x.$$

Es sei

$$\alpha)\quad \partial[dy\int f_{xy}]_x = \phi_{x,y}$$

und es folgt

$$dy\int f_{x,y} = \int \phi_{x,y} dx$$
$$f_{x,y} = \partial(\int \phi_{x,y} dx)_y$$
$$\partial[f_{x,y}]_x = \partial[\partial(\int \phi_{x,y} dx)_y]_x$$
$$= \partial[\partial(\int \phi_{x,y} dx)_x]_y$$
$$= \partial(\phi_{x,y})_y$$

also

$$dy\int \partial[f_{x,y}]_x = \phi_{x,y}.$$

Aus dieser Gleichung und der α) erhellet das Gesetz.

§. 397.

Es ist

$$dx\int dy\int f_{x,y} = dy\int dx\int f_{x,y}.$$

Es sei

$$dx\int dy\int f_{x,y} = \phi_{x,y}$$

so folgt

$$f_{x,y} = \partial^{1,1}(\phi_{x,y})_{x,y}$$
$$dy\int dx\int f_{x,y} = \phi_{x,y}$$

und daraus erhellet der Satz.

§. 398.

Es ist

$$\partial[dy\int_a^b f_{x,y}]_x = dy\int_a^b \partial[f_{x,y}]_x.$$

Es sei

$$\alpha)\quad dy\int f_{x,y} = \phi_{x,y}$$

und es folgt

$$dy\int_a^b f_{x,y} = \phi_{x,b} - \phi_{x,a}$$

$$\beta)\quad \partial[dy\int_a^b f_{x,y}] = \partial(\phi_{x,b})_x - \partial(\phi_{x,a})_x.$$

Aus α) folgt ferner

$$f_{x,y} = \partial(\phi_{x,y})_y$$

$$\partial[f_{x,y}]_x = \partial[\partial(\phi_{xy})_y]_x = \partial[\partial(\phi_{x,y})_x]_y$$

$$dy\int \partial[f_{x,y}]_x = \partial(\phi_{x,y})_x$$

$$\gamma)\quad dy\int_a^b \partial[f_{xy}]_x = \partial(\phi_{x,a})_x - \partial(\phi_{x,b})_x.$$

Und aus β) und γ) erhellet der Satz.

§. 399.

Es ist

$$dy\int_\alpha^\beta dx\int_a^b f_{x,y} = dx\int_a^b dy\int_\alpha^\beta f_{x,y}.$$

Es sei

$$dy\int dx\int f_{x,y} = \phi_{x,y}$$

und es folgt

$$1)\quad f_{x,y} = \partial^{1,1}(\phi_{x,y})_{x,y}$$

$$dx\int f_{xy} = \partial(\phi_{xy})_y$$

$$dx\int_a^b f_{x,y} = \partial(\phi_{b,y})_y - \partial(\phi_{a,y})_y$$

$$2)\quad dy\int_\alpha^\beta dx\int_a^b f_{x,y} = \phi_{b,\beta} - \phi_{a,\beta} - \phi_{b,\alpha} + \phi_{a,\alpha}.$$

Andererseits folgt aus 1)

$$dy\int f_{x,y} = \partial(\phi_{x,y})_x$$

$$dy\int_\alpha^\beta f_{x,y} = (\partial\phi_{x,\beta})_x - \partial(\phi_{x,\alpha})_x$$

$$3)\quad dx\int_a^b dy\int_\alpha^\beta f_{x,y} = \phi_{b,\beta} - \phi_{b,\alpha} - \phi_{a,\beta} + \phi_{a,\alpha}$$

und aus 2) und 3) erhellet das Gesetz.

§. 400.

Ist

$$X = dy\int_{\phi x}^{\psi x} f_{x,y}$$

so ist

$$\partial X_x = f_{x_I \psi_x} \partial \psi_x - f_{x_I \phi_x} \partial \phi_x + dy \int_{\phi_x}^{\psi_x} \partial (f_{x_I y})_x.$$

Wir setzen

$$dy \int f_{x_I y} = F_{x_I y}.$$

Daraus ist

$$1) \quad f_{x_I y} = \partial (F_{x_I y})_y$$

und

$$2) \quad X = dy \int_{\phi_x}^{\psi_x} f_{x_I y} = F_{x_I \psi_x} - F_{x_I \phi_x}.$$

Aus 2) folgt

$$\partial X_x = \partial \left(F_{x_I \psi_x}\right)_{\psi_x} \partial \psi_x + \partial \left(F_{x_I \psi_x}\right)_x - \partial \left(F_{x_I \phi_x}\right)_{\phi_x} \partial \phi_x - \partial \left(F_{x_I \phi_x}\right)_x$$

oder

$$3) \quad \partial X_x = \partial \left[F_{x_I \psi_x} - F_{x_I \phi_x}\right]_x + \partial \left(F_{x_I \psi_x}\right)_{\psi_x} \partial \psi_x - \partial \left(F_{x_I \phi_x}\right)_{\phi_x} \partial \phi_x.$$

Nun entsteht $F_{x_I \psi_x}$ indem in $F_{x_I y}$ statt y die Funktion ψ_x gesetzt wird. Mithin ist nach 1)

$$4) \quad \partial \left(F_{x_I \psi_x}\right)_{\psi_x} = f_{x_I \psi_x}$$

eben so

$$5) \quad \partial \left(F_{x_I \phi_x}\right)_{\phi_x} = f_{x_I \phi_x}.$$

Ferner ist nach 2)

$$\partial \left[F_{x_I \phi_x} - F_{x_I \phi_x}\right]_x = \partial \left[dy \int_{\phi_x}^{\psi_x} f_{x_I y}\right]_x$$

oder wegen §. 396

$$6) \quad \partial \left[F_{x_I \psi_x} - F_{x_I \phi_x}\right]_x = dy \int_{\phi_x}^{\psi_x} \partial (f_{x_I y})_x.$$

Die Werthe aus 4), 5), 6) substituiren wir in 3) und es entsteht

$$\partial X_x = f_{x_I \psi_x} \partial \psi_x - f_{x_I \phi_x} \partial \phi_x + dy \int_{\phi_x}^{\psi_x} \partial (f_{x_I y})_x$$

wie zu erweisen war.

§. 401.

Die bisher aufgestellten Gesetze sind fruchtbare Mittel zur Herstellung der Werthe von bestimmten Integralen.

Die Gesetze in den §§. 396 und 397 tragen allgemeineren Charakter, und können überhaupt beim Integriren angewendet werden. Sie begründen die Methode des Differenzirens und Integrirens unter dem Integralzeichen. In den nächsten Paragraphen geben wir zuerst ein Paar Beispiele zur Anwendung dieser Methode im Allgemeinen, und lassen dann die Ermittelung einiger bestimmten Integrale folgen, die Anwendung der übrigen Gesetze darzulegen.

§. 402.

Es ist
$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$
Wir differenziren nach m, und es entsteht
$$\partial[\int x^m dx]_m = \frac{(m+1)x^{m+1}\ln x - x^{m+1}}{(m+1)^2}$$
$$= [(m+1)\ln x - 1]\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}.$$
Zur Linken wenden wir §. 396 an, und erhalten
$$\partial[\int x^m dx]_m = \int \partial(x^m)_m dx$$
$$= \int x^m \ln x\, dx$$
so daß entsteht
$$\int x^m \ln x\, dx = [(m+1)\ln x - 1]\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}.$$

§. 403.

Es ist
$$\int \frac{adx}{1+a^2x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg} ax.$$
Wir integriren diese Gleichung nach a. Der Ausdruck zur Linken liefert, zunächst §. 397 anwendend,
$$da\int dx \int \frac{a}{1+a^2x^2} = dx\int da \int \frac{a}{1+a^2x^2}$$
$$= dx\int \frac{da}{2x^2}\int \frac{2ax^2}{1+a^2x^2}$$
$$= dx\int \frac{1}{2x^2}\ln(1+a^2x^2)$$
$$= dx\int \frac{\ln\sqrt{1+a^2x^2}}{x^2}.$$

Der Ausdruck oben zur Rechten liefert

$$da\int \operatorname{arc}\operatorname{tg} ax = \frac{da}{x}\int \operatorname{arc}\operatorname{tg} ax \cdot \partial(ax)$$

$$= a \cdot \operatorname{arc}\operatorname{tg} ax - \frac{\ln\sqrt{1+a^2x^2}}{x}.$$

Demnach wird gewonnen

$$dx\int \frac{\ln\sqrt{1+a^2x^2}}{x^2} = a \cdot \operatorname{arc}\operatorname{tg} ax - \frac{\ln\sqrt{1+a^2x^2}}{x}.$$

§. 404.

Es ist

$$\int x^{m-1}dx = \frac{x^m}{m}$$

folglich

$$1)\quad dx\int_0^1 x^{m-1} = \frac{1}{m}.$$

Wir integriren diese Gleichung in den Gränzen von p bis q nach m. Die linke Seite liefert

$$dm\int_p^q dx\int_0^1 x^{m-1} = dx\int_0^1 dm\int_p^q x^{m-1}$$

oder, da

$$dm\int x^{m-1} = \frac{x^{m-1}}{\ln x}$$

ist, und

$$\int_p^q x^{m-1} = \frac{x^{q-1} - x^{p-1}}{\ln x}$$

$$2)\quad dm\int_p^q dx\int_0^1 x^{m-1} = dx\int_0^1 \frac{x^{q-1} - x^{p-1}}{\ln x}.$$

Die rechte Seite der Gleichung 1) liefert

$$3)\quad \int_p^q \frac{dm}{m} = \ln q - \ln p = \ln\frac{q}{p}.$$

Daher gewinnt man nach 2) und 3)

$$dx\int_0^1 \frac{x^{q-1} - x^{p-1}}{\ln x} = \ln\frac{q}{p}.$$

§. 405.

Es sei

$$dx\int_0^\infty e^{-x^2} = A$$

und es ist

$$dy\int_0^\infty e^{-y^2} \cdot dx\int_0^\infty e^{-x^2} = A\int_0^\infty e^{-y^2}dy = A^2.$$

Andererseits ist

$$dy\int_0^\infty e^{-y^2} \cdot dx\int_0^\infty e^{-x^2} = dx\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}.$$

Wir setzen

$$y = xz$$

dann ist $\qquad dy = x\,dz$

und erhalten dadurch, indem die Gränzen bleiben

$$dy\int_0^\infty e^{-y^2} \cdot dx\int_0^\infty e^{-x^2} = dx\int_0^\infty dz\int_0^\infty xe^{-(1+z^2)x^2}.$$

Nun ist

$$\partial[-(1+z^2)x^2]_x = -(1+z^2)2x.$$

Das liefert

$$dy\int_0^\infty e^{-y^2}dx\int_0^\infty e^{-x^2}$$

$$= dz\int_0^\infty \frac{dx}{-2(1+z^2)}\int_0^\infty e^{-(1+z^2)x^2}\,\partial[-(1+z^2)x^2]_x.$$

Es ist aber

$$dx\int e^{-(1+z^2)x^2}\partial[-(1+z^2)x^2]_x = e^{-(1+z^2)x^2}$$

welches von 0 bis ∞ genommen -1 gewährt. Deshalb ist

$$dy\int_0^\infty e^{-y^2}dx\int_0^\infty e^{-x^2} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}$$

und das liefert, da

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z$$

ist, von 0 bis ∞ genommen, den Werth

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Folglich

$$\frac{\pi}{4} = A^2$$

und überhaupt

$$dx\int_0^\infty e^{-x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§. 406.

Es ist

$$dx\int e^x = e^x$$

$$dx\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$dx\int e^{(a+bi)x} = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi}.$$

Hieraus folgt, indem

$$e^{bxi} = \text{Cos}\,bx + i\,\text{Sin}\,bx$$

ist

$$dx\int e^{ax}(\text{Cos}\,bx + i\,\text{Sin}\,bx) = \frac{e^{ax}(\text{Cos}\,bx + i\,\text{Sin}\,bx)}{a+bi}$$

oder, Zähler und Nenner mit $a - bi$ multiplicirt

$$= \frac{e^{ax}[a\,\text{Cos}\,bx + b\,\text{Sin}\,bx + i(a\,\text{Sin}\,bx - b\,\text{Cos}\,bx)]}{a^2+b^2}.$$

Links einzeln integrirend und das Reelle dem Reellen, das Imaginaire dem Imaginairen gleich setzend, entsteht

$$dx\int e^{ax}\text{Cos}\,bx = \frac{e^{ax}(a\,\text{Cos}\,bx + b\,\text{Sin}\,bx)}{a^2+b^2}$$

$$dx\int e^{ax}\text{Sin}\,bx = \frac{e^{ax}(a\,\text{Sin}\,bx - b\,\text{Cos}\,bx)}{a^2+b^2}$$

oder a negativ setzend

$$dx\int e^{-ax}\text{Cos}\,bx = \frac{e^{-ax}(b\,\text{Sin}\,bx - a\,\text{Cos}\,bx)}{a^2+b^2}$$

$$dx\int e^{-ax}\text{Sin}\,bx = -\frac{e^{-ax}(a\,\text{Sin}\,bx + b\,\text{Cos}\,bx)}{a^2+b^2}.$$

Mit $x = \infty$ verschwinden die Werthe rechts, weil $e^{-\infty} = 0$ ist, während Sin und Cos in den Gränzen $+1$ und -1 bleiben.

Daher folgt

$$dx\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Cos} bx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$dx\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Sin} bx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

§. 407.

Es ist

$$da\int e^{-ax} = -\frac{e^{-ax}}{x}$$

folglich

$$da\int_q^p e^{-ax} = \frac{e^{-qx}-e^{-px}}{x}.$$

Ferner ist

$$da\int \frac{a}{a^2+b^2} = \tfrac{1}{2}\ln(a^2+b^2)$$

also

$$da\int_q^p \frac{a}{a^2+b^2} = \tfrac{1}{2}\ln\frac{p^2+b^2}{q^2+b^2}$$

und

$$da\int \frac{b}{a^2+b^2} = da\int \frac{\frac{1}{b}}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$$

also

$$da\int_q^p \frac{b}{a^2+b^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{p}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{q}{b}.$$

Wenn man daher die beiden Resultate des vorigen Paragraphen nach a in den Gränzen von q bis p integrirt, so entsteht

$$dx\int_0^\infty \frac{e^{-qx}-e^{-px}}{x}\operatorname{Cos} bx = \tfrac{1}{2}\ln\frac{p^2+b^2}{q^2+b^2}$$

$$dx\int_0^\infty \frac{e^{-qx}-e^{-px}}{x}\operatorname{Sin} bx = \operatorname{arc\,tg}\frac{p}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{q}{b}.$$

Das letzte Ergebniß liefert noch, wenn man $p=\infty$ setzt und $q=0$

$$dx\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} bx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

§. 408.

Es sei vorgelegt

$$dx\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos} ax}{1+x^2}.$$

Man setze

$$V = dx\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} \operatorname{Cos}\frac{ax}{1+x^2}$$

und es folgt nach §. 398, indem man nach a differenzirt

$$\partial V_a = \frac{\operatorname{Cos} 2k\pi}{1+\frac{4k^2\pi^2}{a^2}} 2k\pi\left(-\frac{1}{a^2}\right) + dx\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} \frac{-\operatorname{Sin} ax}{1+x^2}x$$

$$= -\frac{2k\pi}{a^2+4k^2\pi^2} - dx\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} \frac{x\operatorname{Sin} ax}{1+x^2}$$

$$\partial^2 V_a = \frac{4ak\pi}{(a^2+4k^2\pi^2)^2} - dx\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} \frac{x^2\operatorname{Cos} ax}{1+x^2}.$$

Demnach ist

$$V - \partial^2 V_a = dx\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} \operatorname{Cos} ax - \frac{4ak\pi}{(a^2+4k^2\pi^2)^2}.$$

Nun ist

$$dx\int \operatorname{Cos} ax = -\frac{1}{a}\operatorname{Sin} ax$$

und das liefert, genommen von 0 bis $\frac{2k\pi}{a}$ den Werth Null, also hat man

$$V - \partial^2 V_a = -\frac{4ak\pi}{(a^2+4k^2\pi^2)^2}.$$

Für $k=\infty$ ist dies Null, und demnach

$$V = \partial^2 V_a.$$

Es ist aber, unter A und B constante Werthe verstanden,

$$\partial(Ae^{-a}+Be^a)_a = -Ae^{-a}+Be^a$$

$$\partial^2(Ae^{-a}+Be^a)_a = Ae^{-a}+Be^a.$$

Demnach könnte man setzen

$$V = Ae^{-a}+Be^a.$$

Indeß darf nur gesetzt werden

$$\phi)\quad dx\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\,ax}{1+x^2} = Ae^{-a}.$$

Aus

$$dx\int \frac{\mathrm{Cos}\,ax}{1+x^2} = Ae^{-a} + Be^{a}$$

würde nämlich folgen

$$\frac{\mathrm{Cos}\,ax}{1+x^2} = -Ae^{-a} + Be^{a}$$

und steigt a bis ∞, so wird der Ausdruck zur Rechten ∞, während der zur Linken endlich bleibt.

Die Constante A zu bestimmen setze man in ϕ) $a = 0$, und es entsteht, da

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\,x$$

ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = A = \frac{\pi}{2}.$$

Demnach hat man

$$dx\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\,ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

§. 409.

Man setze in dem Ergebniß des vorigen Paragraphen ma statt a und $\frac{x}{m}$ statt x; das liefert

$$\frac{dx}{m}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\,ax}{1+\frac{x^2}{m^2}} = \frac{\pi}{2}e^{-ma}$$

oder

$$dx\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\,ax}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}e^{-ma}.$$

Hiervon werde die Ableitung nach a genommen und es entsteht

$$dx\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{Sin}\,ax}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-ma}.$$

§. 410.

Es ist

$$dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2rx$$

$$= dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{e^{2rxi} + e^{-2rxi}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2rxi} + \tfrac{1}{2}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2rxi}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,dx\,e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2rxi+r^2} + \tfrac{1}{2}\,dx\,e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2rxi+r^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx\,e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ri)^2} + \tfrac{1}{2}dx\,e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ri)^2}.$$

Nun ist nach §. 405

$$dx\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

und es ist auch

$$dx\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

welches sofort erhellet, wenn man diese beiden Integrale nach §. 384 entwickelt denkt. Folglich ist

$$dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = dx\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} + dx\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

Außerdem ist

$$dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+c)^2} = dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}.$$

Deshalb folgt nun

$$dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2rx = e^{-r^2}\sqrt{\pi}$$

ferner auch

$$dx\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2rx = \tfrac{1}{2}e^{-r^2}\sqrt{\pi}$$

woraus für $r = 0$ wiederum

$$dx\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

sich ergiebt.

§. 411.

Wir wenden uns zu dem Integral $\int \frac{1}{\ln x} dx$, auf welches wir in §. 379 und §. 380 gestoßen sind.

Man potenzire e mit allen stetig auf einander folgenden Werthen von $-\infty$ bis $+\infty$, bilde also die Reihe

$$e^{-\infty} \ldots\ldots e^0 \ldots\ldots e^\infty$$

so erhält man die Reihe aller stetig auf einander folgenden Zahlenwerthe x von 0 bis $+\infty$, d. h. die Reihe

$$0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots +\infty$$

Die Logarithmen $\ln x$ dieser Zahlenwerthe bilden also die Zahlenwerthe

$$-\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots +\infty$$

Und hieraus erhellet, daß während x alle Werthe von 0 bis $+\infty$ durchläuft, die Funktion $\frac{1}{\ln x}$ die Werthe

$$-0 \ldots\ldots \infty \ldots\ldots +0$$

der Reihe nach annimmt.

Man denke $\int_a^x \frac{1}{\ln x} dx$ nach §. 384 in einer Reihe entwickelt, so ist aus dem Vorigen ersichtlich, daß das Integral einen endlichen bestimmten Werth hat, so lange jede der Gränzen a und x größer als 1 ist oder kleiner, daß aber das Integral ∞ ist, also nicht bestimmbar, sobald 1 zwischen den Gränzen a und x liegt, oder eine dieser Gränzen selbst 1 ist.

Es sei $x = e^z$, so ist $\ln x = z$ und $\partial x_z = e^z$, also

$$\int \frac{1}{\ln x} dx = \int \frac{e^z}{z} dz.$$

Es ist aber

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots$$

$$\int \frac{e^z}{z} dz = \ln z + z + \frac{z^2}{2!2} + \frac{z^3}{3!3} + \ldots$$

Aus $a = e^z$ folgt $z = \ln a$, daher ist nach §. 000

$$\int_a^x \frac{1}{\ln x} dx = \int_{\ln a}^{\ln x} \frac{e^z}{z} dz$$

$$= \ln(\ln x) + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2!2} + \frac{(\ln x)^3}{3!3} + \dots$$

$$- \ln(\ln a) - \ln a - \frac{(\ln a)^2}{2!2} - \frac{(\ln a)^3}{3!3} - \dots$$

oder

$$\int_a^x \frac{1}{\ln x} dx = \ln \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln x - \ln a}{1!1} + \frac{(\ln x)^2 - (\ln a)^2}{2!2}$$

$$+ \frac{(\ln x)^3 - (\ln a)^3}{3!3} + \dots$$

und diese Formel ist so lange giltig, als a und x positiv sind und weder 1 zwischen den Gränzen a und x sich befindet, noch eine der Gränzen selbst 1 ist. In dem besonderen Fall, daß die Gränze a Null ist, läßt sich die Formel nicht anwenden, denn es ist $\ln 0 = -\infty$. Dennoch hat das Integral $\int_0^x \frac{1}{\ln x}$, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, einen bestimmten Werth, so lange die Gränze x die Einheit nicht erreicht. Setzen wir für diesen Fall, da $x < 1$, $x = e^{-z}$, so ist $\ln x = -z$, $\partial x_z = -e^{-z}$, also

$$\int \frac{1}{\ln x} dx = \int \frac{1}{z e^z} dz.$$

Es ist

$$1) \quad e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

und, wenn durch z dividirt wird und darauf integrirt,

$$2) \quad \int \frac{1}{z e^z} dz = \ln z - z + \frac{z^2}{2!2} - \frac{z^3}{3!3} + \dots$$

Aus 1) folgt

$$\frac{e^{-z} - 1}{z} = -1 + \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} + \dots$$

$$\int \frac{e^{-z} - 1}{z} dz = -z + \frac{z^2}{2!2} - \frac{z^3}{3!3} + \dots$$

Der letzte Ausdruck verschwindet für $z = 0$, deshalb ist

$$\int_0^z \frac{e^{-z} - 1}{z} dz = -z + \frac{z^2}{2!2} - \frac{z^3}{3!3} + \ldots.$$

Diesen Werth substituire man in 2), und es entsteht

$$3) \int \frac{1}{ze^z} dz = \ln z + \int_0^z \frac{e^{-z} - 1}{z}.$$

Aus $0 = e^{-z}$ folgt $z = \infty$, aus $x = e^{-z}$ folgt $z = -\ln x$, daher ist nach §. 393

$$\int_0^x \frac{1}{\ln x} dx = \int_\infty^{-\ln x} \frac{1}{ze^z} dz$$

oder, wenn man auf das letzte Integral 2) und 3) anwendet,

$$\int_0^x \frac{1}{\ln x} dx = \ln(-\ln x) + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2!2} + \frac{(\ln x)^3}{3!3} + \ldots.$$

$$-\ln\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-z} - 1}{z}$$

wobei nicht zu übersehen, daß $\ln x$ an sich negativ ist, da $x < 1$. Setzen wir die zu $\int_0^x \frac{1}{\ln x} dx$ gehörige Constante gleich C, so ist also

$$C = -\ln\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-z} - 1}{z}$$

oder, wenn p wächst bis ∞

$$C = -\lim\left[\ln p + \int_0^p \frac{e^{-z} - 1}{z}\right].$$

Nach §. 136 ist

$$\lim\left(1 - \frac{z}{p}\right)^p = e^{-z}.$$

Diesen Werth substituiren wir, und es entsteht

$$C = -\lim\left[\ln p + \int_0^p \frac{\left(1 - \frac{z}{p}\right)^p - 1}{z} dz\right].$$

Das letzte Integral zu bestimmen setzen wir

$$1 - \frac{z}{p} = y$$

so ist

$$z = p(1 - y)$$

$$\partial z_y = -p$$

aus $0 = p(1-y)$ folgt $y = 1$, aus $p = p(1-y)$ folgt $y = 0$, also ist nach §. 393

$$\int_0^p \frac{\left(1-\frac{z}{p}\right)^p - 1}{z} dz = \int_1^0 \frac{1-y^p}{1-y} dy$$
$$= \int_1^0 (1 + y + y^2 + y^3 + \ldots + y^{p-1})$$
$$= -\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{p}\right)$$

und daher ist endlich

$$C = \lim\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{p} - \ln p\right).$$

Die genauere Berechnung dieses Werthes erfordert weitere Erörterungen, die wir hier unterlassen müssen. Es findet sich übrigens $C = 0{,}5772156649\ldots$

§. 412.

Das Integral $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1} dx$ pflegt man das Eulersche Integral zu nennen und durch Γp zu bezeichnen. Es ist also

$$1)\quad \Gamma p = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1} dx.$$

Man setze $x = e^{-z}$, so ist $\partial x_z = -e^{-z}$, und $\ln\frac{1}{x} = z$; aus $1 = e^{-z}$ folgt $z = 0$, aus $0 = e^{-z}$ folgt $z = \infty$. Daher folgt nach §. 393

$$\Gamma p = -\int_\infty^0 e^{-z} z^{p-1} dz$$

oder

$$2)\quad \Gamma p = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Die Ausdrücke unter 1) und 2) sind zwei verschiedene Formen desselben Integrals.

Es ist $\int e^{-x} dx = -\int e^{-x} \partial(-x)\, dx = -e^{-x}$; und da $-e^{-x}$ für $x = \infty$ in 0 und für $x = 0$ in 1 übergeht, so folgt

$$3)\quad \Gamma 1 = 1.$$

Man setze $x = az$, so ist $\partial x_z = a$; aus $\infty = az$ und

$0 = az$ folgt beziehlich $z = \infty$ und $z = 0$; daher entsteht nach §. 393 aus 2)

$$\Gamma p = a^p \int_0^\infty e^{-az} z^{p-1} dz$$

oder

$$4) \quad \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma p}{a^p}$$

Es sei y positiv und man setze in 4) $1 + y$ statt a, das liefert

$$\frac{\Gamma p}{(1+y)^p} = \int_0^\infty e^{-(1+y)x} x^{p-1} dx$$

oder, wenn man mit y^{q-1} multiplicirt,

$$\Gamma p \frac{y^{q-1}}{(1+y)^p} = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} e^{-xy} y^{q-1} dx.$$

Diese Gleichung integrire man nach y von 0 bis ∞, und es entsteht mit Rücksicht auf §. 399

$$\begin{aligned} \Gamma p \int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^p} dy &= \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \left(\int_0^\infty e^{-xy} y^{q-1} dy\right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \frac{\Gamma q}{x^q} dx \quad [4)] \\ &= \Gamma q \int_0^\infty e^{-x} x^{p-q-1} dx \\ &= \Gamma q \Gamma(p-q) \quad [2)] \end{aligned}$$

oder, mit Γp dividirt,

$$\int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^p} dy = \frac{\Gamma q \Gamma(p-q)}{\Gamma p}$$

oder, wenn man $p = q + n$ und x statt y setzt

$$5) \quad \int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{q+n}} dx = \frac{\Gamma q \Gamma n}{\Gamma(q+n)}.$$

Die theilweise Integration liefert

$$\int e^{-x} x^p dx = -e^{-x} x^p + p \int e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Man nehme hier das Integral von 0 bis ∞. Der Ausdruck $-e^{-x}x^p$ geht sowohl für $x = 0$ als für $x = \infty$ in Null über, und deshalb ist

$$\int_0^\infty e^{-x} x^p dx = p \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

oder

$$6) \quad \Gamma(p+1) = p \Gamma p.$$

Nach 6) ist

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) &= p\Gamma p\\ \Gamma(p+2) &= (p+1)\Gamma(p+1)\\ \Gamma(p+3) &= (p+2)\Gamma(p+2)\\ &\vdots\\ \Gamma(p+n+1) &= (p+n)\Gamma(p+n)\end{aligned}$$

weiter folgt

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) &= p\Gamma p\\ \Gamma p &= (p-1)\Gamma(p-1)\\ \Gamma(p-1) &= (p-2)\Gamma(p-2)\\ &\vdots\\ \Gamma(p-n+1) &= (p-n)\Gamma(p-n).\end{aligned}$$

Durch Multiplication entsteht hieraus

$$7)\quad \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma p} = p(p+1)(p+2)\ldots.(p+n)$$

und

$$8)\quad \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n)} = p(p-1)(p-2)\ldots.(p-n).$$

Aus 7) folgt, wenn man $p=1$ setzt, 3) beachtet, und darauf $n-1$ für n substituirt,

$$9)\quad \Gamma(n+1) = n!$$

Die Herleitung der Formel 7) bedingt jedoch, daß hier n eine positive ganze Zahl sei, und zwar >0, denn aus 6) folgt

$\Gamma p = \dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$ und das liefert nach 3) für $p=0$

$$10)\quad \Gamma 0 = \frac{1}{0} = \infty.$$

In 7) werde $1-p$ statt p gesetzt, und $n-1$ statt n, das liefert

$$\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(1-p)} = (1-p)(2-p)(3-p)\ldots.(n-p).$$

Diese Gleichung mit 7) multiplicirt giebt

$$\frac{\Gamma(n+1+p)\Gamma(n+1-p)}{\Gamma p\Gamma(1-p)}$$
$$= p(1-p^2)(2^2-p^2)(3^2-p^2)\ldots.(n^2-p^2).$$

Nach 9) ist

$$[\Gamma(n+1)]^2 = 1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\ldots. n^2$$

also, wenn man dividirt,

$$\frac{\Gamma(n+1+p)\Gamma(n+1-p)}{[\Gamma(n+1)]^2}\cdot\frac{1}{\Gamma p\Gamma(1-p)}$$
$$= p\left(1-\frac{p^2}{1}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{3^2}\right)\ldots.\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right).$$

Der erste Faktor links wird gleich 1, wenn man n unendlich setzt. Daher folgt

$$\frac{1}{\Gamma p\Gamma(1-p)} = p\left(1-\frac{p^2}{1}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^3}{3^2}\right)\ldots. \text{ ohne Ende.}$$

Nun ist aber nach §. 314

$$\operatorname{Sin} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots.$$

Man setze $x = p\pi$; es entsteht

$$\frac{\operatorname{Sin} p\pi}{\pi} = p\left(1-\frac{p^2}{1}\right)\left(1-\frac{p^2}{4}\right)\left(1-\frac{p^2}{9}\right)\ldots.$$

und, wenn man dies Resultat mit dem oberen vergleicht, folgt

$$11)\quad \Gamma p\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} p\pi}.$$

Für $p = \frac{1}{2}$ liefert diese Formel

$$12)\quad \Gamma\tfrac{1}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Es sei $x = ay^n$, so ist $\partial x_y = nay^{n-1}$; aus $0 = ay^n$ und $\infty = ay^n$ folgt beziehlich $y = 0$ und $y = \infty$. Wenn man daher in 2) $x = ay^n$ substituirt, so entsteht

$$\Gamma p = na^p\int_0^\infty e^{-ay^n}y^{np-1}dy$$

oder, indem man $p = \frac{q}{n}$ setzt,

$$13)\quad \Gamma\frac{q}{n} = na^{\frac{q}{n}}\int_0^\infty e^{-ax^n}x^{q-1}.$$

§. 413.

Aus 13) des vorigen Paragraphen folgt nochmals

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

wenn man $a = q = 1$ und $n = 2$ setzt und 12) beachtet.

§. 414.

Man pflegt $\int\int\phi_x dx$ durch $\int^2\phi_x dx$, $\int\int\int\phi_x dx$ durch $\int^3\phi_x dx$, u.s.f. zu bezeichnen und beziehlich das zweite, dritte u.s.w. Integral von ϕ_x zu nennen.

§. 415.

Es ist

1) $\int\phi_x\psi_x dx = \phi_x\int\psi_x - \partial\phi_x\int^2\psi_x dx + \partial^2\phi_x\int^3\psi dx - \ldots$
$\pm \partial^{n-1}\phi_x\int^n\psi_x dx \mp \int(\partial^n\phi_x\int^n\psi_x)dx.$

2) $\int\phi_x\partial\psi_x dx = \phi_x\psi_x - \partial\phi_x\int\psi_x dx + \partial^2\phi_x\int^2\psi_x dx - \ldots$
$\pm \partial^{n-1}\phi_x\int^{n-1}\psi_x dx \mp \int(\partial^n\phi_x\int^{n-1}\psi_x)dx.$

Die theilweise Integration liefert nämlich

$$\int\phi_x\psi_x dx = \phi_x\int\psi_x dx - \int(\partial\phi_x\int\psi_x)dx$$
$$-\int(\partial\phi_x\int\psi_x)dx = -\partial\phi_x\int^2\psi_x dx + \int(\partial^2\phi_x\int^2\psi_x)dx$$
$$\int(\partial^2\phi_x\int^2\psi_x)dx = \partial^2\phi_x\int^3\psi_x dx - \int(\partial^3\phi_x\int^3\psi_x)dx$$
$$-\int(\partial^3\phi_x\int^3\psi_x)dx = -d^3\phi_x\int^4\psi_x dx + \int(\partial^4\phi_x\int^4\psi_x)dx$$

. . .
. . .
. . .
. . .

$$\pm\int(\partial^{n-1}\phi_x\int^{n-1}\psi_x)dx = \pm\partial^{n-1}\phi_x\int^n\psi_x dx \mp \int(\partial^n\phi_x\int^n\psi_x)dx$$

und die Addition dieser Gleichungen giebt die Formel 1). Die zweite Formel entsteht aus der ersten, wenn man $\partial\psi_x$ statt ψ_x setzt.

§. 416.

In 2) des vorigen Paragraphen werde $\psi_x = x - a$ gesetzt, so ist

$$\partial\psi_x = 1,\ \int\psi_x dx = \frac{1}{2!}(x-a)^2,\ \int^2\psi_x dx = \frac{1}{3!}(x-a)^2$$

u. s. w.; und es entsteht

$$1)\ \int \phi_x dx = (x-a)\phi_x - \frac{(x-a)^2}{2!}\partial\phi_x + \frac{(x-a)^3}{3!}\partial^2\phi_x - \ldots$$
$$\pm \frac{(x-a)^n}{n!}\partial^{n-1}\phi_x \mp \int \frac{(x-a)^n}{n!}\partial^n\phi_x dx.$$

Es sei $\int \phi_x dx = f_x$, so ist $\int_a^x \phi_x dx = f_x - f_a$. Die n ersten Glieder des Ausdruckes zur Rechten in 1) verschwinden für $x = a$; daher wird $\int_a^x \phi_x dx$ auch in diesem Ausdruck erhalten, sobald man das letzte Integral von a bis x nimmt. Und deshalb ist, wenn man überall f_x einführt,

$$f_x - f_a = (x-a)\partial f_x - \frac{(x-a)^2}{2!}\partial^2 f_x + \frac{(x-a)^3}{3!}\partial^3 f_x - \ldots$$
$$\pm \frac{(x-a)^n}{n!}\partial^n f_x \mp \frac{1}{n!}\int_a^x (x-a)^n \partial^{n+1} f_x.$$

Hieraus folgt

$$f_a = f_x + (a-x)\partial f_x + \frac{(a-x)^2}{2!}\partial^2 f_x + \ldots + \frac{(a-x)^n}{n!}\partial^n f_x$$
$$- \frac{1}{n!}\int_a^x (a-x)^n \partial^{n+1} f_x dx$$

oder

$$2)\ f_a = f_x + (a-x)\partial f_x + \ldots + \frac{(a-x)^n}{n!}\partial^n f_x$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_x^a (a-x)^n \partial^{n+1} f_x dx.$$

Man denke zwei Funktionen P_x und Q_x, nehme an, Q_x sei für alle in den Gränzen c und $c+h$ liegenden Werthe von x positiv, und g und k seien die zwischen c und $c+h$ liegenden Werthe von x, für welche P_x beziehlich den größten und kleinsten der Werthe erhält, die es annimmt, während x die Werthe von c bis $c+h$ durchläuft; und es erhellet, wenn man die Integrale nach §. 384 in Summen entwickelt denkt, daß

$$P_g \int_c^{c+h} Q_x dx > \int_c^{c+h} P_x Q_x dx$$

und

$$P_k \int_c^{c+h} Q_x dx < \int_c^{c+h} P_x Q_x dx.$$

Die Funktion P_x muß stetig sein für die Werthe von x zwischen c und $c+h$; daher läßt sich ein in diesen Gränzen befindlicher

Werth $c + \mu h$ (unter μ also einen echten Bruch verstanden) von x annehmen, für welchen

$$P_{c+\mu h}\int_c^{c+h} Q_x dx = \int_c^{c+h} P_x Q_x dx$$

ist, und μ liegt zwischen 0 und 1.

Der Ausdruck $(a - x)^n$ in dem Integral in 2) ist stets positiv, wenn n gerade ist; bezeichnet n eine ungerade Zahl, so ist $(a - x)^n$ beständig positiv oder beständig negativ, je nachdem $a - x$ positiv ist oder negativ. Der Ausdruck $(a - x)^n$ ist daher für alle Werthe von x zwischen x und a positiv, wenn n gerade ist, und für dieselben Werthe von x stets positiv oder stets negativ, wenn n ungerade ist; in dem letzteren Fall läßt sich aber der Ausdruck wiederum positiv machen, wenn man das Integral negativ nimmt. Das Resultat der vorigen Erörterung findet hiernach auf das gedachte Integral Anwendung und man darf setzen

$$\int_x^a (a-x)^n \partial^{n+1} f_x dx = \partial^{n+1} f_{[x+\mu(a-x)]} \int_x^a (a-x)^n dx.$$

Die Gränzen x und a lassen sich nämlich durch x und $x + (a - x)$ wiedergeben, und μ ist ein unbekannter aber zwischen 0 und 1 liegender Werth. Der erhaltene Ausdruck werde in 2) substituirt und es ergiebt sich, weil noch $\int_a^x (a - x)^n = \frac{(a-x)^{n+1}}{n+1}$ ist

$$3)\ f_a = f_x + (a-x)\partial f_x + \frac{(a-x)^2}{2!}\partial^2 f_x + \ldots + \frac{(a-x)^n}{n!}\partial^n f_x + \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\partial^{n+1} f_{[x+\mu(a-x)]} dx.$$

Für a setze man jetzt $x + h$; das liefert

$$4)\ f_{x+h} = f_x + h\partial f_x + \frac{h^2}{2!}\partial^2 f_x + \ldots + \frac{h^n}{n!}\partial^n f_x + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\partial^{n+1} f_{[x+\mu h]}$$

und dies ist nochmals die Taylorsche Reihe mit dem Rest. Man setze weiter in 3) $a = x$ und $x = a$, und es entsteht

$$5)\ f_x = f_a + (x-a)\partial f_a + \frac{(x-a)^2}{2!}\partial^2 f_a + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\partial^n f_x + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\partial^{n+1} f_{[a+\mu(x-a)]}$$

und für $a = 0$ folgt wiederum hieraus

$$6)\quad f_x = f_0 + x\partial f_0 + \frac{x^2}{2!}\partial^2 f_0 + \ldots + \frac{x^n}{n!}\partial^n f_0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\partial^{n+1} f_{\mu x}.$$

Die Reiheu 5) und 6) sind die Maclaurinschen Reihen mit dem Ergänzungsgliede.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch erweisen, daß, wenn für einen besonderen Werth a von x sich f_{x+h} nicht in eine Reihe verwandeln läßt, welche lediglich nach positiven ganzen Potenzen von h fortschreitet, sondern nur in eine Reihe, welche auch positive gebrochene Potenzen von h enthält, alsdann doch die Entwickelung von f_{x+h} so lange dem Taylorschen Gesetze folgt, bis das erste eine Bruchpotenz von h enthaltende Glied erscheint, dessen Coefficient dann aber, nach Taylors Satz bestimmt, die Form $\frac{1}{0}$ annimmt. — Es werde gesetzt, für $x = a$:

$$f_{x+h} = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \ldots + A_n h^n + B h^{n+\frac{p}{q}} + \ldots$$

und es werde diese Gleichung wiederholt nach dem veränderlichen h differentiirt. Zuvor setze man $x + h = y$, dann ist $\partial y_h = 1$ und

$$\partial(f_{x+h})_h = \partial f_y . \partial y_h = \partial f_y$$

$$\partial^2(f_{x+h})_h = \partial(\partial f_y)_h = \partial^2 f_y \partial y_h = \partial^2 f_y \text{ u. s. w.}$$

Hiernach folgt

$$\partial f_y = A_1 + 2A_2 h + 3A_3 h^2 + \ldots + \left(n + \frac{p}{q}\right) B h^{n+\frac{p}{q}-1} + \ldots$$

$$\partial^2 f_y = 2!A_2 + 3\cdot 2A_3 h + \ldots + \left(n + \frac{p}{q}\right)\left(n + \frac{p}{q} - 1\right) B h^{n+\frac{p}{q}-2} + \ldots$$

$$\partial^3 f_y = 3!A_3 + \ldots + \left(n + \frac{p}{q}\right)\left(n + \frac{p}{q} - 1\right)\left(n + \frac{p}{q} - 2\right) B h^{n+\frac{p}{q}-3} + \ldots$$

. . .

. . .

. . .

. . .

$$\partial^n f_y = n!A_n + \left(n + \frac{p}{q}\right)\left(n + \frac{p}{q} - 1\right) \ldots \left(\frac{p}{q} + 1\right) B h^{\frac{p}{q}} + \ldots$$

$$\partial^{n+1}f_y = \left(n+\frac{p}{q}\right)\left(n+\frac{p}{q}-1\right)\ldots\left(\frac{p}{q}\right)Bh^{\frac{p}{q}-1}+\ldots$$

$$\begin{matrix} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{matrix}$$

Daher hat man für $h = 0$, wobei $z = x$ ist, für das man a zu setzen hat:

$$A_0 = f_a,\quad A_1 = \partial f_a,\quad A_2 = \frac{1}{2!}\partial^2 f_a,\quad A_3 = \frac{1}{3!}\partial^3 f_a \text{ u. s. f.}$$

und weil $\frac{p}{q} - 1$ negativ ist, $\partial^{n+1}f_a = \frac{1}{0}$. Darin liegt die Behauptung.

§. 417.

Man setze in §. 415 2) x statt ψ_x, und es entsteht

$$1)\quad \int \phi_x dx = x\phi_x - \frac{x^2}{2!}\partial\phi_x + \frac{x^3}{3!}\partial^2\phi_x - \frac{x^4}{4!}\partial^3\phi_x + \ldots$$

Diese Reihe heißt die Bernoullische Reihe.

Und wenn man die Maclaurinschen Reihen §. 000 integrirt, ergiebt sich

$$\int f_x dx = xf_a + \frac{(x-a)^2}{2!}\partial f_a + \frac{(x-a)^3}{3!}\partial^2 f_a + \frac{(x-a)^4}{4!}\partial^3 f_a + \ldots$$

also

$$2)\quad \int_a^x f_x dx = (x-a)f_a + \frac{(x-a)^2}{2!}\partial f_a + \frac{(x-a)^3}{3!}\partial^2 f_a + \ldots$$

und für $a = 0$

$$3)\quad \int_0^x f_x dx = xf_0 + \frac{x^2}{2!}\partial f_0 + \frac{x^3}{3!}\partial^2 f_0 + \frac{x^4}{4!}\partial^3 f_0 + \ldots$$

§. 418.

Wenn man sich, wie es nicht selten der Fall ist, außer Stande sieht, ein vorgelegtes Integral zu bestimmen, so bleibt zuletzt nichts anderes übrig, als dasselbe näherungsweise anzugeben. Dazu können die Reihen im vorigen Paragraphen benutzt werden, besonders aber die Entwickelungen in §. 387. Noch eine Methode der genäherten Integration möge hier Platz finden.

Es sei $\int f_x$ zu bestimmen, während bekannt ist, daß einander die Werthe

$$x = a,\quad b,\quad c,\quad d, \ldots\ldots$$
$$f_x = A,\quad B,\quad C,\quad D, \ldots\ldots$$

entsprechen, übrigens f_x selbst nicht einmal gegeben zu sein braucht. Könnte man eine Funktion ϕ_x herstellen, welche sich integriren läßt, und welche für die Werthe a, b, ... von x, beziehlich die Werthe A, B, ... erhält, so würde, unter der Voraussetzung, daß die Funktionen stetig sind, die Funktion ϕ_x auch für die übrigen Werthe von x nicht sehr von der Funktion f_x abweichen, und um so weniger, je größer die Anzahl der Werthe a, b, ... von x ist, für welche beide Funktioneu übereinstimmen, und je näher diese Werthe an einander liegen; und es würde dann in $\int \phi_x$ näherungsweise das Integral von f_x geboten werden. Die Funktion ϕ_x, welche für n Werthe von x mit f_x übereinstimmen soll, kann als eine Summe von n Summanden gedacht werden von der Beschaffenheit, daß wenn für x einer jener Werthe, etwa a, gesetzt wird, dann $n - 1$ der Summanden verschwinden und der übrig bleibende der zu a gehörige Werth A ist. Sollen aber $n - 1$ Summanden verschwinden für $x = a$, so muß jeder derselben den Faktor $x - a$ enthalten; und es erhellet, daß ϕ_x gleich zu setzen ist

$$(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots Q + (x-a)(x-c)(x-d)\ldots\ldots Q'$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-d)\ldots\ldots Q'' + \ldots\ldots$$

damit zunächst $n - 1$ der Summanden verschwinden für jeden einzelnen der Werthe a, b, c, d, ... von x. Setzen wir hier etwa $x = a$, so bleibt der erste Summand stehen, und damit dieser zu A werde, muß Q gleich $\dfrac{A}{(a-b)(a-c)(a-d)}$ sein. Hiernach ist zu setzen

$$\phi_x = \frac{(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots\ldots}A + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)\ldots\ldots}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots\ldots}B$$
$$+ \frac{(x-a)(x-b)(x-d)\ldots\ldots}{(c-a)(c-b)(c-d)\ldots\ldots}C + \ldots\ldots$$

Und dann ist annähernd

$$\partial^{n+1} f_y = \left(n+\frac{p}{q}\right)\left(n+\frac{p}{q}-1\right)\dots$$

$\cdot$

$\cdot$

$\cdot$

$\cdot$

Daher hat man für h = 0, wobei … —d)....dx
zu setzen hat:

$A_0 = f_a,\ A_1 = \partial f_a,\ A_2 = \frac{1}{2}$ … —d)....dx

und weil $\frac{p}{q} - 1$ negativ ist, … (x—d)dx
Behauptung. … + ...

§.

Man setze in §. 415 2) … von x, und

1) $\int \phi_x dx = x\phi_x - \frac{x^2}{2!}\partial\phi_x$ … $\int (x-a)dx$

Diese Reihe heißt die Bern…

Und wenn man die M…
ergiebt sich

$\int f_x dx = xf_a + \frac{(x-a)^2}{2!}\partial$…

also

2) $\int_a^x f_x dx = (x-a)f_a$ …

und für $a = 0$

3) $\int_0^x f_x dx = xf_0 +$ …

… von x das … werden. Bequemer … die Werthe von x … wenn man das Inte- … nimmt. Dadurch ge- … ein Integral zwischen … die Gränzen 0 und 1

Wenn man si…
Stande sieht, ein … Gleichung über in
letzt nichts andere…
Dazu können die…
besonders aber di…

$$\int f_x dx = \frac{f_0}{(0-\frac{1}{2})(0-1)}\int(x-\tfrac{1}{2})(x-1)dx$$
$$+\frac{f_{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)}\int(x-0)(x-1)dx$$
$$+\frac{f_1}{(1-0)(1-\frac{1}{2})}\int(x-0)(x-\tfrac{1}{2})dx.$$

…ste Summand rechts ist

$$2f_0\int(x^2-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2})dx = 2(\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{3}{4}x^2+\tfrac{1}{2}x)f_0.$$

…weite ist

$$-4f_{\frac{1}{2}}\int(x^2-x)dx = -4(\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2)f_{\frac{1}{2}}$$

…itte

$$2f_1\int(x^2-\tfrac{1}{2}x)dx = 2(\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^2)f_1.$$

…r folgt

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{f_0+4f_{\frac{1}{2}}+f_1}{6}.$$

Für die Werthe 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1 oder 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, oder 0, $\frac{1}{5}$, …, $\frac{4}{5}$, 1 u. s. f. von x findet sich eben so ohne Schwierigkeit …Integral. Für den praktischen Gebrauch mögen folgende Re…te dienen:

$$\int f_x dx = \frac{f_0+f_1}{2}$$

$$\int_0 f_x dx = \frac{f_0+4f_{\frac{1}{2}}+f_1}{6}$$

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{f_0+3f_{\frac{1}{3}}+3f_{\frac{2}{3}}+f_1}{8}$$

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{7f_0+32f_{\frac{1}{4}}+12f_{\frac{1}{2}}+32f_{\frac{3}{4}}+7f_1}{90}$$

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{19f_0+75f_{\frac{1}{5}}+50f_{\frac{2}{5}}+50f_{\frac{3}{5}}+75f_{\frac{4}{5}}+19f_1}{288}$$

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{41f_0+216f_{\frac{1}{6}}+27f_{\frac{1}{3}}+272f_{\frac{1}{2}}+27f_{\frac{2}{3}}+216f_{\frac{5}{6}}+41f_1}{840}.$$

Es ist

$$\int\frac{1}{x}dx = \ln x$$

$$\int f_x dx = \int \left[\frac{(x-b)(x-c)(x-d)\ldots.}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots.} A + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)\ldots.}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots.} B + \ldots.\right] dx$$

oder

$$\int f_x dx = \frac{f_a}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots.} \int (x-b)(x-c)(x-d)\ldots. dx$$
$$+ \frac{f_b}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots.} \int (x-a)(x-c)(x-d)\ldots. dx$$
$$+ \frac{f_c}{(c-a)(c-b)(c-d)\ldots.} \int (x-a)(x-b)(x-d) dx$$
$$\ldots. + \ldots.$$

Bedient man sich nur zweier Werthe a und b von x, und der dazu gehörigen f_a und f_b von f_x, so ist annähernd

$$\int f_x dx = \frac{f_a}{a-b} \int (x-b) dx + \frac{f_b}{b-a} \int (x-a) dx$$
$$= \frac{(x-b)^2}{2(a-b)} f_a + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} f_b$$

und es folgt

$$\int_a^b f_x dx = \frac{(b-a)(f_b + f_a)}{2}.$$

Eben so könnte bei drei und mehr Werthen von x das Integral allgemein und annähernd bestimmt werden. Bequemer führt sich diese Bestimmung durch, wenn man die Werthe von x in gleichen Intervallen und am einfachsten, wenn man das Integral dabei zwischen den Gränzen 0 und 1 nimmt. Dadurch geschieht der Allgemeinheit kein Abbruch, weil ein Integral zwischen den Gränzen α und β nach §. 394 6) in die Gränzen 0 und 1 sich bringen läßt.

Für $a = 0$ und $b = 1$ geht die letzte Gleichung über in

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{f_0 + f_1}{2}.$$

Für die drei Werthe 0, $\frac{1}{2}$, 1 von x entsteht

$$\int f_x dx = \frac{f_0}{(0-\frac{1}{2})(0-1)}\int(x-\tfrac{1}{2})(x-1)dx$$
$$+\frac{f_{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)}\int(x-0)(x-1)dx$$
$$+\frac{f_1}{(1-0)(1-\frac{1}{2})}\int(x-0)(x-\tfrac{1}{2})dx.$$

Der erste Summand rechts ist

$$2\cdot f_0\int(x^2-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2})dx = 2(\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{3}{4}x^2+\tfrac{1}{2}x)f_0.$$

Der zweite ist

$$-4f_{\frac{1}{2}}\int(x^2-x)dx = -4(\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2)f_{\frac{1}{2}}$$

der dritte

$$2f_1\int(x^2-\tfrac{1}{2}x)dx = 2(\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^2)f_1.$$

Daher folgt

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{f_0+4f_{\frac{1}{2}}+f_1}{6}.$$

Für die Werthe 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1 oder 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, oder 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1 u. s. f. von x findet sich eben so ohne Schwierigkeit das Integral. Für den praktischen Gebrauch mögen folgende Resultate dienen:

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{f_0+f_1}{2}$$

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{f_0+4f_{\frac{1}{2}}+f_1}{6}$$

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{f_0+3f_{\frac{1}{3}}+3f_{\frac{2}{3}}+f_1}{8}$$

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{7f_0+32f_{\frac{1}{4}}+12f_{\frac{1}{2}}+32f_{\frac{3}{4}}+7f_1}{90}$$

$$\int_0^1 f_x dx = \frac{19f_0+75f_{\frac{1}{5}}+50f_{\frac{2}{5}}+50f_{\frac{3}{5}}+75f_{\frac{4}{5}}+19f_1}{288}$$

$$\int_0^1 f_x dx$$
$$=\frac{41f_0+216f_{\frac{1}{6}}+27f_{\frac{1}{3}}+272f_{\frac{1}{2}}+27f_{\frac{2}{3}}+216f_{\frac{5}{6}}+41f_1}{840}.$$

Es ist

$$\int\frac{1}{x}dx = \ln x$$

also

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0{,}69314718 \ldots.$$

und wir wollen beispielsweise dasselbe Integral nach den vorstehenden Formeln annähernd bestimmen. Nach §. 394 6) ist zunächst

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

und die Näherungsformeln liefern

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = 0{,}75$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1+\frac{1}{2}+4\cdot\frac{2}{3}}{6} = 0{,}694 \ldots.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1+\frac{1}{2}+3(\frac{3}{4}+\frac{3}{5})}{8} = 0{,}6937 \ldots.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{7(1+\frac{1}{2})+32(\frac{4}{5}+\frac{4}{7})+12\cdot\frac{2}{3}}{90} = 0{,}69317 \ldots.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{19(1+\frac{1}{2})+75\cdot(\frac{5}{6}+\frac{5}{9})+50(\frac{5}{7}+\frac{5}{8})}{90}$$

$$= 0{,}693163 \ldots.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{41(1+\frac{1}{2})+216(\frac{6}{7}+\frac{6}{11})+27(\frac{3}{4}+\frac{3}{5})+272\cdot\frac{2}{3}}{840}$$

$$= 0{,}6931517 \ldots.$$

Der letzte Werth ist nur um 0,000004 .... zu groß.

VIII. Integration der Funktionen mit mehreren Veränderlichen.

§. 419.

Während $dy = \phi_x dx$ stets als Differential einer Funktion $y = f_x$ angesehen werden kann, und also auch die Integration sich fordern läßt, ist dies anders bei einem Differential zweier Veränderlichen

$$dU = Pdx + Qdy.$$

Hier muß $\partial U_x = P$, $\partial U_y = Q$ sein, wenn das Differential durch Differenziren einer Funktion U entstanden sein soll und alsdann wird

$$\frac{d^2U}{dx\,dy} = \frac{d^2U}{dy\,dx}$$

oder was dasselbe sagt

$$\partial Q_x = \partial P_y.$$

Dies ist das Kennzeichen, daß $dU = Pdx = Qdy$ wirklich ein Differential sei.

Es sei nun

$$dU = Pdx + Qdy$$

ein Differential.

Alsdann ist

$$U = \int Pdx + Y$$

unter Y die Constante nach x verstanden, d. h. einen Ausdruck, der kein x enthält, aber im Allgemeinen eine Funktion von y ist. Denn indem $\partial U_x = P$ gebildet worden, sind die bloß y enthaltenden Glieder ausgefallen.

Es folgt jetzt

$$\partial U_y = dx \int \partial P_y + \partial Y_y$$

d. h.

$$Q = dx \int \partial P_y + dY_y$$

also

$$\partial Y_y = Q - dx \int \partial P_y$$

und

$$Y = C + dy \int [Q - dx \int \partial P_y].$$

Demnach endlich

$$U = C + \int dxP + dy \int [Q - dx \int \partial P_y].$$

Die Constante C ist absolut, weil Y Funktion nur von y ist.

Beispiele.

$$1)\quad \frac{x}{y}dx + \frac{y^2 - x^2}{2y^2}dy.$$

Es ist

$$\partial\left(\frac{x}{y}\right)_y = -x\,\frac{1}{y^2}$$

und

$$\partial\left(\frac{y^2 - x^2}{2y^2}\right)_x = -\frac{1}{2y^2}2x = -\frac{x}{y^2}$$

also die vorgelegte Funktion ein vollständiges Differential, und es folgt nun

$$U = dx\int\frac{x}{y} = \frac{x^2}{2y} + Y$$

$$\partial U_y = -\frac{x^2}{2y^2} + \partial Y_y = \frac{y^2 - x^2}{2y^2}$$

$$\partial Y_y = \frac{1}{2}$$

$$Y = \frac{y}{2}$$

$$U = \frac{x^2}{2y} + \frac{y}{2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{2y} + C$$

oder

$$\frac{x^2 + y^2}{2y} = C.$$

$$2)\quad \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

oder

$$\frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

Es ist

$$\partial P_y = \frac{x^2 + y^2 - y2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\partial Q_x = -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

also die Funktion ein Differential, und es folgt

$$U = dx\int\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$= dx\int\frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + Y$$

$$\partial\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + Y\right)_y = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} + \partial Y_y$$

$$= \frac{-x}{x^2+y^2} + \partial Y_y$$

$$= Q = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

liefert

$$\partial Y_y = 0$$
$$Y = C$$

folglich

$$U = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + C.$$

3) $$dU = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right).$$

Es findet sich

$$\partial P_y = \partial Q_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

Die vorgelegte Funktion ist deshalb ein Differential, und es folgt

$$U = dx\int\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)x} + Y$$

$$= dx\int\left(\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{x}\right) + Y$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \ln x + Y$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \ln x + Y$$

$$\partial U_y = -\frac{x}{x^2+y^2} + \partial Y_y$$

$$\partial Y_y = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)y}$$

$$= -\frac{1}{y}$$

$$Y = -\ln y + C$$

also

$$U = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \ln\frac{x}{y} + C$$

§. 420.

Es sei

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Dies ist ein Differential, wenn

$$\frac{d^2U}{dx\,dy} = \frac{d^2U}{dy\,dx}, \quad \frac{d^2U}{dx\,dz} = \frac{d^2U}{dz\,dx}, \quad \frac{d^2U}{dy\,dz} = \frac{d^2U}{dz\,dy}$$

oder hier

$$\partial P_y = \partial Q_x, \quad \partial P_z = \partial R_x, \quad \partial Q_z = \partial Q_y.$$

Man hat alsdann

$$U = dx\int P + Y$$

unter Y eine Funktion von y und z verstanden.

$$\partial U_y = dx\int \partial P_y + \partial Y_y$$

oder

$$Q = dx\int \partial P_y + \partial Y_y$$

also

$$Y = dy\int [Q - dx\int \partial P_y] + Z$$

unter Z eine Funktion von z verstanden.

Demnach

$$U = dx\int P + dy\int [Q - dx\int \partial P_y] + Z$$

$$\partial U_z = dx\int \partial P_z + dy\int [\partial Q_z - dx\int \partial'' P_{y,z}] + \partial Z_z$$

d. h.

$$R = dx\int \partial P_z + dy\int [\partial Q_z - dx\int \partial'' P_{y,z}] + \partial Z_z$$

folglich

$$\partial Z_z = R - dx\int \partial P_z - dy\int [\partial Q_z - dx\int \partial'' P_{yz}]$$

$$Z = dz\int [R - dx\int \partial P_z - dy\int (\partial Q_z - dx\int \partial'' P_{y,z})] + C$$

und endlich

$$U = Const + dx\int P + dy\int [Q - dx\int \partial P_y]$$
$$+ dz\int (R - dx\int \partial P_z - dy\int [\partial Q_z - dx\int \partial'' P_{yz}]).$$

Beispiele.

1) $$dU = -\frac{2x(y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy - \frac{2z}{x^2 + z^2}dz$$

$$U = -dx\int\frac{2x(y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)}$$

$$= dx\int\left[\frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + z^2}\right]$$

$$U = \ln(x^2 + y^2) - \ln(x^2 + z^2) + Y$$

$$Q = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \partial Y_y$$

$$\partial Y_y = 0$$

folglich

$$Y = Z_z$$

$$U = \ln(x^2 + y^2) - \ln(x^2 + z^2) + Z$$

$$\partial U_z = -\frac{2z}{x^2 + z^2} + \partial Z_z = R$$

$$Z = C$$

also

$$U = \mathrm{Const} + \ln\frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}.$$

2) $$dU = -\frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\frac{dx}{x} + \frac{x^2 + (y - z)^2}{x^2 + y^2 + z^2}\frac{dy}{z} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\frac{dz}{z} - \frac{ydz}{z^2} + \frac{dz}{z^3}$$

$$U = \ln\frac{xz}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y}{z} - \frac{1}{2z^2} + C.$$

Von den Differentialgleichungen.

§. 421.

Es sei gegeben
$$f_{xy} = 0$$
so ist
$$\partial f_y \partial y_x + \partial f_x = 0$$
oder
$$\partial f_y dy + \partial f_x dx = 0$$
und dies ist eine **unmittelbare** Differentialgleichung, während f_{xy} die primitive Gleichung heißt. Sie ist entstanden ebenso, wie wenn in f_{xy} die beiden Veränderlichen unabhängig wären; und man wird daher auch f_{xy} aus derselben zurück erhalten, indem man integrirt wie zuvor. Nur bleibt eine Constante, welche in f_{xy} vielleicht enthalten und bestimmt war, jetzt unbestimmt, so daß sich ein allgemeineres Resultat ergiebt, welches auch das allgemeine Integral genannt wird, während, wenn die Constante einen bestimmten Werth hat, das Integral ein besonderes heißt.

Z. B.
$$1)\quad (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$
liefert
$$2(x - a)dx + 2(y - b)dy = 0$$
oder
$$2)\quad (x - a)dx + (y - b)dy = 0.$$
Man nehme an, es sei gewesen $U_{xy} = 0$ und es ist
$$U = dx\int(x - a) + Y$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 - ax + Y$$
$$\partial U_y = \partial Y_y = y - b$$
also
$$Y = \tfrac{1}{2}y^2 - by + C$$
also ist
$$U = \tfrac{1}{2}x^2 - ax + \tfrac{1}{2}y^2 - by + C = 0$$
das allgemeine Integral. Aus ihm kann man machen, weil es $= 0$ ist,
$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + a^2 + b^2 + C = 0$$

oder

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + C = 0,$$

welches immer noch allgemein ist und erst ein Besonderes wird, indem man dem C einen besonderen Werth beilegt.

Die Differentialgleichung spricht also allgemeine Eigenschaften aus.

§. 422.

Aus einer ersten oder primitiven Gleichung und ihrer unmittelbaren Differentialgleichung kann man einen constanten Werth eliminiren, z. B.

$$1)\quad ax - xy - by = 0$$

liefert

$$2)\quad adx - ydx - xdy - bdy = 0.$$

Hieraus b eliminirt entsteht

$$(a - y)dx - xdy - \frac{ax - xy}{y}dy = 0$$

oder

$$(a - y)dx - \frac{ax}{y}dy = 0$$

oder

$$3)\quad (a - y)ydx - axdy = 0$$

und eliminirt man a aus 1) und 2), so folgt

$$\frac{xy + by}{x}dx - ydx - xdy - bdy = 0$$

oder

$$4)\quad bydx - x^2dy - bxdy = 0.$$

Die Gleichungen 3) und 4) bilden die mittelbaren Differentialgleichungen der 1) von der ersten Ordnung. Aus ihnen kann in gleicher Weise a oder b eliminirt werden, nämlich 3) liefert

$$ay - y^2 = ax\partial y_x$$

$$a\partial y_x - 2y\partial y_x = ax\partial^2 y_x + a\partial y_x$$

folglich

$$a = -\frac{2y\partial y_x}{x\partial^2 y_x}$$

substituirt

$$-\frac{2y^2\partial y_x}{x\partial^2 y_x} - y^2 = -\frac{2xy\partial y_x^2}{x\partial^2 y_x}$$

$$2y^2\partial y_x + xy^2\partial^2 y_x = 2xy\partial y_x^2$$

oder

$$2y\partial y_x + xy\partial^2 y_x = 2x\partial y_x^2.$$

Die Gleichung 4) ist

$$by = x^2\partial y_x + bx\partial y_x$$

und liefert

$$b\partial y_x = x^2\partial^2 y_x + 2x\partial y_x + bx\partial^2 y_x + b\partial y_x$$

also

$$b = -\frac{x\partial^2 y_x + 2\partial y_x}{\partial^2 y_x}$$

substituirt

$$-xy\partial^2 y_x - 2y\partial y_x = x^2\partial y_x\partial^2 y_x - x^2\partial^2 y_x\partial y_x - 2x\partial y_x^2$$

oder

$$2y\partial y_x + xy\partial^2 y_x = 2x\partial y_x^2$$

welches die vorige Gleichung ist. Diese heißt die mittelbare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die Gleichung

$$ax - xy - by - 0$$

als primitive liefert demnach

$$(a - y)dx - (b + x)dy = 0 \text{ unmittelbare}$$

$$\left.\begin{array}{l}(a - y)y - axdy_x = 0\\ by - x(b + x)\partial y_x = 0\end{array}\right\} \text{ mittelbare erster Ordnung.}$$

Man unterscheidet den Grad der Gleichung nach $(\partial y_x)^n$ bei der ersten Ordnung, nach $(\partial^q y_x)^n$ bei der qten Ordnung.

Die letzte Gleichung ist die Allgemeinste. Die durch sie ausgesprochenen Eigenschaften werden für alle Werthe der Constanten von der primitiven erfüllt.

§. 423.

Es sei nun gegeben

$$Pdx + Qdy = 0.$$

Ist

$$\partial P_y = \partial Q_x$$

so ist, nach dem anfänglich gesagten, dies eine unmittelbare Differentialgleichung und die primitive Gleichung von der Form

$$U = c$$

während

$$dU = Pdx + Qdy = 0$$

und aus

$$dU = Pdx + Qdy$$

sich U finden läßt.

Ist dagegen ∂P_y nicht gleich ∂Q_x, so ist die vorgelegte Gleichung anzusehen als eine mittelbare, so daß doch die primitive

$$f_{xy} = 0$$

besteht, doch nicht immer sich erlangen läßt.

§. 424.

Es sei

$$Xdx + Ydy = 0$$

wobei X nur x, Y nur y enthalte. Man sagt, die Veränderlichen seien gesondert und hier findet sich stets die primitive Gleichung. Denn man setze

$$dU = Xdx + Ydy$$

und es folgt

$$U = dx\int X + Y'$$

also

$$= f_x + c + y'$$

$$\partial U_y = \partial Y'_y$$

also

$$\partial Y'_y = Y$$

$$Y' = dy\int Y = C$$

und mithin

$$U = dx\int X + dy\int Y + C = 0$$

so daß man nur einzeln zu integriren braucht.

Lineäre Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 425.

$$dy + Pydx + Qdx = 0$$

unter P und Q Funktionen von x allein verstanden.

Man setze

$$y = Xt$$

unter X eine Funktion von x verstanden, so ist

$$dy = Xdt + tdx$$

also

$$Xdt + tdX + PXtdx + Qdx = 0$$

und setze

$$Xdt + PXtdx = 0$$

und

$$tdX + Qdx = 0.$$

$$dt + Ptdx = 0$$

liefert

$$\frac{dt}{t} = -Pdx$$

$$\ln t = -dx\int P$$

$$t = e^{-dx\int P}.$$

Aus

$$tdX + Qdx = 0$$

folgt dann

$$dX = -\frac{Qdx}{t} = -Qe^{dx\int P}dx$$

$$X = -dx\int Qe^{dx\int P} + C$$

und man hat

$$y = Xt$$

d. h.

$$y = e^{-dx\int P}[-dx\int Qe^{dx\int P} + C].$$

Beispiel.

$$dy + \frac{y}{x}dx - x^m dx = 0$$

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = -x^m$$

$$dx \int P = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$e^{\ln x} = x, \quad e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$Y = \frac{1}{x}[-dx\int -x^m \cdot x + C]$$

$$= \frac{1}{x}[dx\int x^{m+1} + C]$$

$$Y = \frac{1}{x}\left[\frac{x^{m+2}}{m+2} + C\right]$$

oder

$$xY - \frac{x^{m+2}}{m+2} + C = 0$$

§. 426.

Auch die Gleichung

$$y^{m-1}dy + Py^m dx + Qdx = 0$$

P und Q Funktionen von x, kann in dieser Weise behandelt werden, denn man setze

$$y^m = Z$$

so ist

$$my^{m-1}dy = dz$$

und es entsteht

$$dz + mPzdx + mQdx = 0.$$

Vom Faktor, der integrabel macht.

§. 427.

$$Pdx + Qdy = 0$$

kann immer durch Multiplication mit einem Faktor $\phi_{x,y}$ integrabel gemacht werden.

Man mache daraus, mit Qdx dividirend,

$$\frac{dy}{dx} + V = 0$$

und setze als primitive Gleichung

$$U = a$$

so folgt $$\partial U_x + \partial U_y \partial y_x = 0$$

oder $$\partial y_x + \frac{\partial U_x}{\partial U_y} = 0.$$

Dies muß gleich dem Obigen sein, also

$$\frac{dy}{dx} + V = \frac{dy}{dx} + \frac{\partial U_x}{\partial U_y}$$

oder $$\left(\frac{dy}{dx} + V\right)\partial U_y = \partial U_x + \partial U_y \partial y_x$$

und da das letzte die vollständige Ableitung ist, so auch das erste, und die Stammfunktion ist

$$U = a.$$

Das Differential derselben ist dann

$$dx\left(\frac{dy}{dx} + V\right)\partial U_y = 0$$

oder $$dy + Vdx = 0.$$

Auch kann nun

$$\phi U = a$$

Stammfunktion sein, denn die Ableitung wird

$$\partial \phi_u \cdot \partial U_x = 0$$

oder $$\partial \phi_u (\partial U_x + \partial U_y \partial y_x) = 0$$

wobei die $\partial \phi_u$ dividirt werden kann. ϕ ist beliebig.

Homogene Funktion.

§. 428.

$$Pdx + Qdy = 0$$

heißt homogen, wenn, indem man $y = Zx$ setzt, x gemeinschaftlicher Faktor wird; die Gleichung geht dann über in

$$px^n dx + qx^n(xdz + zdx) = 0$$

oder

$$(p + qz)x^n dx + qx^{n+1}dz = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{q}{p + qz}dz = 0$$

wobei die Veränderlichen gesondert erscheinen.

Beispiel.

$$(x - 2y)dx + ydy = 0.$$

Man setze

$$y = xz$$

und es folgt

$$(1 - 2z)xdx + xz(xdz + zdx) = 0$$

$$(1 - 2z + z^2)xdx + x^2zdz = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{z}{(1 - z)^2}dz = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{1 - z} + \frac{dz}{(1 - z)^2} = 0$$

$$\ln x + \ln(1 - z) + \frac{1}{1 - z} = A$$

oder statt z wiederum $\frac{y}{z}$ gesetzt

$$\ln(x - y) + \frac{x}{x - y} = A$$

$$\ln(x - y) = A - \frac{x}{x - y}$$

$$x - y = e^A \cdot e^{-\frac{x}{x - y}}.$$

Druck von Carl Schultze in Berlin, Neue Friedrichsstraße 47.